FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

19. marec 2010

Ime in priimek: ______________________ **Vpsina št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bodo a,b in c števila, za katera velja $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Naj bo $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$ dan vektor. Označite $s = a\alpha + b\beta + c\gamma$. Za funkcijo $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ naj velja

$$(bz - cy)u_x(x, y, z) + (cx - az)u_y(x, y, z) + (ay - bx)u_z(x, y, z) = 0\,.$$

Definirajte funkcije $x, y, z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & as + (\alpha - as)\cos t + (b\gamma - c\beta)\sin t \\ y(t) & = & bs + (\beta - bs)\cos t + (-a\gamma + c\alpha)\sin t \\ z(t) & = & cs + (\gamma - cs)\cos t + (a\beta - b\alpha)\sin t \end{array}\;.$$

a. (10) Pokažite, da je $bz - cy = \dot{x}$, $cx - az = \dot{y}$ in $ay - bx = \dot{z}$.

b. (10) Definirajte funkcijo $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\phi(t) = u(x(t), y(t), z(t))\,.$$

Izračunajte $\phi'(t)$.

2. (20) Funkcijo $f(x,y)$ za $x>0$ in $y>0$ definiramo z

$$f(x,y)=x^{2/3}y^{1/3}\,.$$

a. (10) Poiščite možne ekstreme funkcije $f(x,y)$ pri pogoju $g(x,y)=x^2+y^2=1$.

b. (10) Poiščite možne ekstreme funkcije $f(x,y)$ pri pogoju

$$g(x,y)=x^{2010}+y^{2010}=1.$$

3. (20) Predpostavite, da je $0 \leq h < R_1 < R_2$. Krogelna lupina naj bo dana z $K = \{(x,y,z)\colon {R_1}^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq {R_2}^2\}$.

a. (10) Izračunajte integral

$$\int_K \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(h-z)^2}}\,.$$

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_K \frac{(h-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\left(x^2+y^2+(h-z)^2\right)^{3/2}}\,.$$

Namig: Kot znano upoštevajte, da je

$$\int \frac{(c-e\,u)\,\mathrm{d}u}{(a-2bu)^{3/2}} = \frac{b(c+eu)-ae}{b^2\sqrt{a-2bu}}\,.$$

4. (20) Ploskev naj bo dana parametrično z

$$\Phi(u,v) = \left(a\sqrt{1+v^2}\cos u,\ a\sqrt{1+v^2}\sin u,\ v \right)$$

za $0 \leq u \leq 2\pi$ in $-1 \leq v \leq 1$.

a. (10) Poiščite vektor $\mathbf{n}$, ki je pravokoten na ploskev v točki $(\sqrt{2}a, 0, 1)$.

b. (10) Naj bo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev v smeri normale z negativno z-komponento za $z > 0$.

5. (20) Naj bo $\mathbf{F} = (x^3, x^2 y, x^2 z)$.

a. (10) Izračunajte pretok tega vektorskega polja skozi površino valja, danega z $V = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq b\}$.

b. (10) Izračunajte še pretok $\mathbf{F}$ skozi zgornjo polovico površine krogle s polmerom R in izhodiščem v središču. Zgornja polovica je tista, za katero je $z \geq 0$.