FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

15. september, 1997

Ime in priimek: ________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

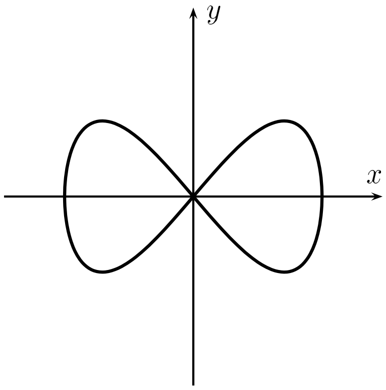
REŠITVE

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
Skupaj			

1. (20) Lemniskata je dana z enačbo

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$$

za $a > 0$. Krivulja je na spodnji sliki.



a. (10) Utemeljite, da obstaja na neki okolici U točke $y_0 = 0$ funkcija $g\colon U \to R$, taka da je $f(g(y),y) = 0$ in je $g(0) = \sqrt{2}a$. Izračunajte še $g'(0)$.

Rešitev: Označimo $x_0 = \sqrt{2}a$. Preverimo, da je $f(x_0,y_0) = 0$. Izračunamo

$$f_x(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 - 4a^2x = 4x(x^2+y^2-a^2)\,.$$

Vstavimo x_0 in y_0 in dobimo

$$f_x(x_0,y_0) = 4\sqrt{2}a(a^2+a^2) \neq 0\,.$$

Po izreku o implicitni funkciji obstaja na neki okolici U točke y_0 funkcija $g(y)$ z želenimi lastnostmi. Odvod je oblike

$$g'(0) = -\frac{f_y(x_0,y_0)}{f_x(x_0,y_0)}\,.$$

Izračunamo, da je $f_y(x_0,y_0) = 0$, torej $g'(0) = 0$.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje $f(x_0,y_0) = 0$: 2 točki.*
- *Preverjanje $f_x(x_0,y_0) \neq 0$: 4 točke.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Izračun $g'(0)$: 2 točki.*

b. (10) Poiščite točko na lemniskati v prvem kvadrantu, v kateri je tangenta na krivuljo vzporedna z x-osjo.

Rešitev: Po izreku o implicitni funkciji vemo, da bo imela tangenta na lemniskato v točki (x, y) naklon 0, če bo $f_x(x, y) = 0$ in $f_y(x, y) \neq 0$. Odvajamo in dobimo

$$f_x(x, y) = 4x^3 + 4xy^2 - 4a^2x = 0$$

ali $x^2 + y^2 = a^2$. Točka (x, y) mora ležati tudi na lemniskati, torej mora veljati $f(x, y) = a^4 + 2a^2(x^2 - y^2) = 0$. Iz obeh enačb sledi $x = \sqrt{3}a/2$ in $y = a/2$. Zlahka preverimo, da je $f_y(x, y) \neq 0$.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da mora biti $f_x(x, y) = 0$: 2 točki.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Nastavitev enačb: 4 točke.*
- *Preverjanje, da je $f_y(x, y) \neq 0$ in sklep: 2 točki.*

2. (20) Področje G v prostoru je definirano kot presek krogle in obrnjenega pokončnega stožca z vrhom v izhodišču, torej

$$G = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, x^2 + y^2 \le a^2 z^2, z \ge 0\},$$

za $0 < a$.

a. (10) Izračunajte

$$\int_G z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z\,.$$

Rešitev: Uvedemo krogelne koordinate. V krogelnih koordinatah je dano področje enako

$$H = \{(r, \phi, \theta)\colon 0 \le r \le R, 0 \le \phi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \theta_1\},$$

kjer je $\theta_1 = \mathrm{arctg}(a)$. *Dobimo*

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R r^3 \mathrm{d}r \int_0^{\theta_1} \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \\ = \; & 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} \cdot - \frac{\cos^2\theta}{2} |_0^{\mathrm{arctg}(a)} \\ = \; & \frac{\pi R^4}{4} \frac{a^2}{1 + a^2}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Transformacija področja: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 2 točki.*
- *Rezultat: 4 točke.*

b. (10) Izračunajte

$$\int_G \frac{1}{z} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z\,.$$

in utemeljite, da je izlimitirani integral dobro definiran.

Rešitev: Izlimitirani integral je dobro definiran, če je končen, ker integriramo nenegativno funkcijo. Spet uvedemo krogelne koordinate in dobimo

$$
\begin{aligned}
\int_G \frac{1}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^R r\mathrm{d}r\int_0^{\theta_1}\mathrm{tg}(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\cdot\frac{R^2}{2}\cdot -\log(\cos\theta)|_0^{\mathrm{arctg}(a)} \\
&= -R^2\log(\cos(\mathrm{arctg}(a))) \\
&= R^2\log(\sqrt{1+a^2})
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev, zakaj izlimitirani integral dobro definiran: 2 točki.*
- *Transformacija področja: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Naj bo $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$.

a. (10) Izračunajte pretok tega vektorskega polja skozi površino piramide $\Delta = \{(x,y,z)\colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.

Rešitev: Najprej izračunamo divergenco vektorskega polja.

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = x^2 \cdot (2+1+1) = 4x\,.$$

Uporabimo Gaussov izrek in prevedemo izračun pretoka na trojni integral. Dobimo

$$\int_{\partial\Delta} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = 4\int_{\Delta} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Po Fubinijevem izreku lahko zgornji integral zapišemo kot

$$4\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} \mathrm{d}z = 4\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 3 točke.*
- *Citiranje Gaussovega izreka: 3 točki.*
- *Izračun po Fubiniju: 4 točke.*

b. (10) Izračunajte še pretok $\mathbf{F}$ skozi ploskev piramide nasproti izhodišču, torej tisto, ki ne leži v nobeni od koordinatnih ravnin.

Rešitev: Na ploskvah, ki ležijo v xy-ravnini, yz-ravnini ali xz-ravnini je polje $\mathbf{F}$ *vzporedno s ploskvijo, torej je tam pretok enak 0. Iskani pretok je zato enak rezultatu iz a.*

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je* $\mathbf{F}$ *vzporedno s tremi ploskvami: 6 točk.*
- *Uporaba a. dela naloge: 4 točke.*

4. (20) Ena od Maxwellovih enačb pravi, da sta magnetno polje $\mathbf{B}$ in polje tokov v prostoru $\mathbf{J}$ povezana z enačbo $\mathbf{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{J}$, kjer je μ_0 permeabilnost prostora. Naj bo $\mathbf{B} = (2x^2y + 2z^2y, -2xy^2 - 2xz^2, 0)$.

a. (10) Naj bo $\mathcal{S}$ površina zgornjega dela krogle s polmerom R in središčem v izhodišču. Za normalo izberite $\mathbf{r}/r$. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{J}\, \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Rešitev: Uporabimo Stokesov izrek

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \mathbf{J}\, \mathrm{d}\mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0}\int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{B})\, \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \frac{1}{\mu_0}\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{B}\, \mathrm{d}\mathbf{r}\,.\end{aligned}$$

Krožnico $\partial\mathcal{S}$ parametriziramo kot $x(t) = R\cos t$ in $y(t) = R\sin t$ za $0 \le t \le 2\pi$. Krivuljni integral lahko prepišamo v

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{B}\, \mathrm{d}\mathbf{r} = -2R^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\, \mathrm{d}t = -R^4\pi\,.$$

Ocenjevanje:

- *Citiranje Stokesovega izreka: 2 točki.*
- *Prevedba na krivuljni integral: 4 točke.*
- *Izračun krivuljnega integrala: 4 točke.*

b. (10) Pokažite, da je $\operatorname{div}(\mathbf{J}) = 0$.

Rešitev: Divergenca rotorja je vedno enaka 0.

Ocenjevanje:

- *Izračun* $\mathbf{J}$*: 4 točke.*
- *Izračun* $\operatorname{div}(\mathbf{J})$*: 6 točk.*
- *Opomba: Citiranje, da je divergenca rotorja vedno enak 0: 10 točk.*

5. (20) Funkcija $f(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ naj bo definirana z

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{za } 0 < x < \pi \\ -\cos x & \text{za } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{za } x = 0, \pi, -\pi. \end{cases}$$

a. (10) Dokažite, da je za $0 < x < \pi$

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}.$$

Utemeljite, zakaj Fourierova vrsta za $0 < x < \pi$ konvergira proti $\cos x$.

Rešitev: Funkcija le liha, zato je $a_n = 0$ za vse $n \geq 0$. Izračunajmo najprej

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin x \; \mathrm{d}x = 0\,,$$

kot se brž prepričamo s substitucijo $2x = u$. Za $n > 0$ zapišemo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)}{2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-(-1)^{n+1} + 1}{n+1} + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Brž se prepričamo, da za lihe n dobimo $b_n = 0$, za sode pa $b_n = (1/\pi)4n/(n^2 - 1)$. Če sode n zapišemo kot $2k$ in seštevamo po k dobimo točno zgornji rezultat. Fourierova vrsta konvergira v vsaki točki, ker je $f(x)$ odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva in velja povsod $(f(x+) + f(x-))/2 = f(x)$.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je funkcija liha: 2 točki.*
- *Integriranje: 4 točke.*
- *Izračun a_n: 2 točki.*

- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Uporabite a. za izračun vsote neskončne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{4(2n+1)^2-1}.$$

Rešitev: V zgornjo vrsto vstavimo $x = \pi/4$. *Ostanejo samo lihi členi, ker je* $\sin(k\pi) = 0$ *za vsak* k. *V Fourierovi vrsti za* $f(x)$ *na levi dobimo* $f(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, *na desni pa iskano vrsto pomnoženo z* $8/\pi$. *Rezultat je* $\pi\sqrt{2}/16$.

Ocenjevanje:

- $x = \pi/4$: *3 točke.*
- *Ostanejo samo lihi členi: 3 točke.*
- *Vsota neskončne vrste: 4 točke.*

6. (20) Eden od modelov rasti prebivalstva je diferencialna enačba

$$y' = y(b - y)$$

za $b > 0$.

a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje enačbe.

Rešitev: Enačbo prepišemo v obliko

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(b-y)} = 1\,.$$

Integriramo in dobimo

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(b-y)} = \frac{1}{b}\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b-y}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{b}\log(\frac{y}{b-y}) = x + c\,.$$

Iz tega izračunamo

$$y(x) = \frac{Cbe^{bx}}{1 + Ce^{bx}}\,,$$

kjer je $C = e^c$.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je enačba tipa $\dot{v} = g(v)$: 2 točki.*
- *Integriranje: 4 točke.*
- *Rešitev: 4 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju $y(0) = b$.

Rešitev: Za vsako začetno vrednost $y(0) \in (0, b)$ je b limitna velikost prebivalstva. Iz tega sklepamo, da je za začetno vrednost b rešitev konstantna $y(t) = b$. Zlahka se prepričamo, da je to res rešitev.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da gre za stacionarno točko: 10 točk.*
- *Sicer:*
  - *Nastavitev enačbe za določitev konstante C: 5 točk.*
  - *Ugotovitev, da takega C ni: 3 točke.*
  - *Sklep, da je morda $C = \infty$ prava rešitev: 2 točki.*

7. (20) Naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Poiščite fundamentalno matriko sistema diferencialnih enačb $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

Rešitev: Karakteristični polinom matrike $\mathbf{A}$ *je* $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ *z dvojno ničlo* $\lambda = 1$*. Pripadajoči lastni vektor je* $x = (1, 2)^T$*. Ena rešitev je torej* $\mathbf{y}_1(t) = e^t\mathbf{x}$*. Poiskati moramo še eno, od prve neodvisno, rešitev. Ker je lastni vektor samo eden, uporabimo nastavek* $\mathbf{y}_2(t) = e^t(t\mathbf{x} + \mathbf{u})$*. Vektor* $\mathbf{u}$ *mora zadoščati enačbi* $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{x}$*. Zlahko najdemo* $\mathbf{u} = (1/2, 1/2)^T$*. Iz tega dobimo*

$$\mathbf{y}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} t + 1/2 \\ 2t + 1/2 \end{pmatrix}.$$

Stolpca fundamentalne matrike bosta linearni kombinaciji $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$*. Prvi stolpec mora biti za* $t = 0$ *enak* $(1, 0)^T$*, torej* $c_1 + c_2/2 = 1$ *in* $2c_1 + c_2/2 = 0$*. Sledi* $c_1 = -1$ *in* $c_2 = 4$*. Podobno dobimo za drugi stolpec enačbi* $c_1 + c_2/2 = 0$ *in* $2c_1 + c_2/2 = 1$*, z rešitvijo* $c_1 = 1$ *in* $c_2 = -2$*. Fundamentalna matrika bo*

$$\mathbf{Y}(t) = e^t \begin{pmatrix} 4t + 1 & -2t \\ 8t & -4t + 1 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Lastna vrednost: 2 točki.*
- *Lastni vektor: 2 točki.*
- *Nastavek za dugo rešitev: 2 točki.*
- *Druga linearno neodvisna rešitev: 2 točki.*
- *Fundamentalna matrika: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, ki ustreza pogoju $\mathbf{y}(1) = (0, 1)^T$.

Rešitev: Vse rešitve so oblike $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}$ *za primeren fiksen vektor* $\mathbf{c}$*. Iz zahteve* $\mathbf{y}(1) = (0, 1)$ *dobimo*

$$e \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sledi $\mathbf{c} = (2/e, 5/e)$*.*

Ocenjevanje:

- *Nastavek za splošno rešitev: 4 točke.*
- *Rešitev: 6 točk.*

8. (20) S površja zemlje izstrelimo v trenutku $t = 0$ telo z maso m z začetno hitrostjo v_0 v smeri pravokotni na površino zemlje. Označimo z $y(t)$ oddaljenost telesa od središča zemlje ob času t, z y_0 polmer zemlje in z m_0 maso zemlje. Po Newtonovem gravitacijskem zakonu gibanje telesa opisuje diferencialna enačba

$$m\ddot{y} = -g\frac{m_0 m}{y^2},$$

kjer je g gravitacijska konstanta. Zračni upor smo zanemarili.

a. (10) Izpeljite, da velja

$$\frac{m}{2}(\dot{y}(t)^2 - v_0^2) = gm_0m(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y_0}).$$

Namig: Pomnožite diferencialno enačbo z $\dot{y}$ in integrirajte of 0 do t.

Rešitev: Obe strani enačbe pomnožimo z $\dot{y}$ in integriramo od 0 do t. Dobimo

$$\frac{m\dot{y}^2}{2}\Big|_0^t = \frac{gm_0m}{y}\Big|_0^t$$

Upoštevamo še začetne pogoje $y(0) = y_0$ in $\dot{y}(0) = v_0$ in dobimo želeno enačbo.

Ocenjevanje:

- *Integriranje leve strani: 3 točke.*
- *Integriranje desne strani: 3 točke.*
- *Določitev konstante: 4 točke.*

b. (10) Iz a. sledi, da je

$$\dot{y} = \sqrt{v_0^2 + 2gm_0(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y_0})}.$$

S kakšno najmanjšo hitrostjo bi morali iztreliti telo, da se ne bi nikoli vrnilo na zemljo?

Namig: Če se telo ne vrne na zemljo, potem $y(t)$ narašča proti ∞.

Rešitev: Če se telo ne vrne, bo $\dot{y}(t) > 0$ za vse t, torej mora biti izraz pod korenom na desni vedno pozitiven. Ker gre y proti ∞ mora biti

$$v_0^2 > \frac{2gm_0}{y_0}.$$

Izraz na desni v zgornji neenačbi je iskana najmanjša hitrost.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da mora biti izraž pod korenom pozitiven: 6 točk.*
- *Najmanjša hitrost: 4 točke.*