FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

4. september, 1997

Ime in priimek: ______________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ naj bo dana z

$$f(x,y) = x\log y - y\,.$$

a. (10) Pokažite, da v okolici U točke $x_0 = 2/\log 2$ obstaja funkcija $g\colon U\to\mathbb{R}$, taka da je $g(x_0)=2$ in $f(x,g(x))=0$ za $x\in U$.

Rešitev: V izreku o implicitni funkciji bo $x_0 = 2/\log 2$ in $y_0 = 2$. Preveriti moramo, da je $f(x_0,y_0)=0$ in

$$f_y(x_0,y_0) = \frac{x_0}{y_0} - 1 = \frac{1}{\log 2} - 1 \neq 0\,.$$

Po izreku o implicitni funkciji torej obstaja na neki okolici U točke x_0 funkcija $g(x)$ z želenimi lastnostmi.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje $f(x_0,y_0)=0$: 3 točke.*
- *Preverjanje $f_y(x_0,y_0)\neq 0$: 4 točke.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte $g''(x_0)$.

Rešitev: Identiteto $f(x,g(x))=0$ odvajamo dvakrat po x. Po prvem odvajanju dobimo

$$f_x + f_y\cdot g' = 0$$

po drugem pa

$$f_{xx} + f_{yx}\cdot g' + (f_{xy} + f_{yy}\cdot g')\cdot g' + f_y\cdot g'' = 0\,.$$

V vse dvojne parcialne odvode je potrebno vstaviti točko (x_0,y_0) in v odvod g točko x_0. Izračunamo

$$\begin{aligned} & g''(0) = \\ = \;& -\frac{f_{xx}(x_0,y_0) + f_{xy}(x_0,y_0)g'(x_0) + (f_{xy}(x_0,y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)\cdot g'(x_0))\cdot g'(x_0)}{f_y(x_0,y_0)} \\ = \;& \frac{2y_0\log y_0}{(x_0-y_0)^2} - \frac{y_0\log^2 y_0}{(x_0-y_0)^3}\,. \end{aligned}$$

Vstavimo x_0 in y_0 in dobimo

$$g''(x_0) = \frac{\log^3 2}{(\log 2 - 1)^2} - \frac{2\log^5 2}{4(\log 2 - 1)^3}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvi odvod identitete $f(x,g(x))=0$: 2 točki.*
- *Drugi odvod identitete: 6 točk.*
- *Vstavljanje in rezultat: 2 točki.*

2. (20) Območje G naj bo krog dan s predpisom

$$G = \{(x,y)\colon (x-a)^2 + y^2 \le a^2\}\,.$$

za $a \ge 0$.

a. (10) Izračunajte

$$\int_G |xy|\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

Rešitev: Uvedemo polarne koordinate. Območje G se preslika v območje

$$H = \{(t,\phi)\colon -\pi/2 \le \phi \le \pi/2, 0 \le r \le 2a\cos\phi\}\,.$$

Dobimo

$$\begin{aligned}
\int_G |xy|\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \int_H r^3|\cos\phi\sin\phi|\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \sin\phi\cos\phi\ \mathrm{d}\phi \int_0^{2a\cos\phi} r^3\ \mathrm{d}r \\
&= 2\frac{(2a)^4}{4}\int_0^{\pi/2} \sin\phi\cos^5\phi\ \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{4a^4}{3}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Transformacija področja: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 2 točki.*
- *Rezultat: 4 točke.*

b. (10) Utemeljite, da je izlimitirani integral

$$\int_G |x|^{-1/2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

dobro definiran in ga izračunajte.

Rešitev: Integriramo nenegativno funkcijo, zato je vseeno, kako napihujemo področja, ki bodo zajela vse področje. Uvedemo polarne koordinate in dobimo podobno kot v a.

$$\begin{aligned}
\int_G |x|^{-1/2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \int_H \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\cos\phi}}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos\phi}}\ \mathrm{d}\phi \int_0^{2a\cos\phi} \sqrt{r}\ \mathrm{d}r \\
&= 4\frac{(2a)^{3/2}}{3}\int_0^{\pi/2} \cos\phi\ \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{8\sqrt{2}a^{3/2}}{3}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev, zakaj izlimitirani integral dobro definiran: 2 točki.*
- *Transformacija področja: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Naj bo $\mathbf{F}$ zvezno odvedljivo vektorsko polje v $\mathbb{R}^3$, za katerega je $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = 0$ in naj bo $\mathbf{a}$ dan fiksen vektor.

a. (10) Dokažite, da je za poljubno področje $G \subset \mathbb{R}^3$ pretok skozi površino

$$\int_{\partial G} (\mathbf{a} \times \mathbf{F})\, d\mathbf{S} = 0\,.$$

Rešitev: Izračunamo

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{F}) &= -a_1\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - a_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) - a_3\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\ &= -\mathbf{a} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{F}) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Po Gaussovem izreku je pretok tega vektorskega polja skozi površino poljubnega telesa v $\mathbb{R}^3$ enak integralu divergence, kar je 0.

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 4 točki.*
- *Opažanje, da je divergenca enaka 0: 4 točke.*
- *Citiranje Gaussovega izreka: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x - y + 3z, -x - y + z, 3x + y + z)$. Izračunajte

$$\int_{\partial \Delta} \mathbf{a} \times \mathbf{F}\, d\mathbf{S}\,,$$

kjer je $\Delta = \{(x, y, z) \colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

Rešitev: Rotor polja $\mathbf{F}$ je enak 0, kar ugotovimo s preprostim računom. Iskani pretok je enak 0.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je rotor enak 0: 2 točki.*
- *Divergenca: 2 točki.*
- *Citiranje Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Izračun pretoka: 4 točke.*

4. (20) Vektorsko polje v $\mathbb{R}^3$ naj bo dano z $\mathbf{F} = (-x, -y, 2z)$.

a. (10) Naj bo $\mathcal{S}$ ploskev v $\mathbb{R}^3$. Pokažite da je

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\partial\mathcal{S}} -zy\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}y\,.$$

4,.tex: No such file or directory

Rešitev: Označimo z $\mathbf{G} = (-zy, zx, 0)$. *Izračunamo, da je* $\mathbf{rot}(\mathbf{G}) = \mathbf{F}$. *Zgornja trditev je Stokesov izrek za polje* $\mathbf{G}$.

Ocenjevanje:

- *Izračun rotorja: 4 točki.*
- *Pravilna uporaba Stokesovega izreka: 6 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathcal{S}$ poljubna gladka ploskev napeta na krivuljo v xy-ravnini dano z $x(t) = \cos t$ in $y(t) = \sin t$ za $0 \le t \le 2\pi$. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Rešitev: Uporabimo Stokesov izrek. Za poljubno ploskev $\mathcal{S}$ *je*

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{G})\, \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{G}\, \mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

ker je v xy*-ravnini polje* $\mathbf{G}$ *enako 0.*

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da lahko uporabimo Stokesov izrek: 5 točk.*
- *Opažanje, da je krivuljni integral enak 0: 5 točk.*

5. (20) Na intervalu $[-\pi, \pi]$ naj bo funkcija $f(x)$ dana z $f(x) = \cosh(\mu x)$, sicer pa naj bo $f(x)$ periodična s periodo 2π.

a. (10) Pokažite, da je za vse x

$$f(x) = \frac{\sinh(\mu\pi)}{\mu\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu(-1)^n \sinh(\mu\pi)\cos(nx)}{\pi(n^2+\mu^2)} .$$

Utemeljite, zakaj Fourierova vrsta konvergira za vsak x proti $f(x)$.

Rešitev: Najprej ugotovimo, da je $f(x)$ soda funkcija, torej je $b_n = 0$ za vse $n \geq 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh \mu x \, \mathrm{d}x = \frac{2\sinh \mu\pi}{\mu\pi} .$$

Za $n \geq 0$ integritamo per partes.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cosh\, \mu x \cos\, nx \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sinh\, \mu x}{\mu}\cos\, nx|_0^{\pi} + \frac{n}{\mu}\int_0^{\pi}\sinh\, \mu x \sin\, nx\, \mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2(-1)^n \sinh \mu\pi}{\pi\mu} + \frac{2n}{\pi\mu}\left(\frac{\cosh\, \mu x}{\mu}\sin\, nx|_0^{\pi} - \frac{n}{\mu}\int_0^{\pi}\cosh\, \mu x\cos\, nx\, \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2(-1)^n \sinh \mu\pi}{\pi\mu} - \frac{2n^2}{\pi\mu^2}\int_0^{\pi}\cosh(\mu x)\cos(nx)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2(-1)^n \sinh \mu\pi}{\mu\pi} - \frac{n^2}{\mu^2}a_n .
\end{aligned}$$

Iz zgornje enačbe izrazimo a_n in dobimo zaželeno Fourierovo vrsto. Funkcija $f(x)$ je odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva in za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $(f(x+) + f(x-))/2 = f(x)$. Vrsta za $f(x)$ konvergira proti $f(x)$.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je funkcija soda: 2 točki.*
- *Integriranje per partes: 4 točke.*
- *Izračun a_n: 2 točki.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte vsoto neskončne vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{36k^2+1} .$$

Rešitev: Vstaviti je potrebno $\mu = 1/6$ in $x = \pi$. Iz zgornje Fourierove vrste sledi

$$f(\pi) = \frac{\sinh\, \mu\pi}{\mu\pi} + \frac{72\mu \sinh\, \mu\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{36n^2+1} .$$

Izračunamo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{36k^2+1} = \frac{(\cosh\, \mu\pi - \frac{\sinh\, \mu\pi}{\mu\pi})\pi}{72\mu\sinh\, \mu\pi} .$$

Ocenjevanje:

- *$\mu = 1/6$: 3 točke.*
- *$x = \pi$: 3 točke.*
- *Vsota neskončne vrste: 4 točke.*

6. (20) Dana naj bo linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti

$$y'' - 2y' + y = f(x)\,.$$

a. (10) Naj bo $f(x) = e^x$. Poiščite rešitev enačbe pri začetnih pogojih $y(0) = y'(0) = 0$.

Rešitev: Karakteristični polinom $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ ima dvojno ničlo $\lambda = 1$. Rešitvi homogene enačbe sta e^x in xe^x. Partikularno rešitev iščemo z nastavkom ax^2e^x. Nastavek vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$ae^x(2 + 4x + x^2 - 4x - 2x^2 + x^2) = 0\,.$$

Iz tega razberemo $a = 1/2$. Splošna rešitev nehomogene enačbe je

$$y(x) = \frac{x^2e^x}{2} + c_1e^x + c_2xe^x\,.$$

Začetnim pogojem bo zadoščeno, če bo

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 \\ y'(0) &= c_1 + c_2 = 0\,, \end{aligned}$$

torej $c_1 = c_2 = 0$.

Ocenjevanje:

- *Rešitvi homogene enačbe: 3 točke.*
- *Nastavek za nehomogeno enačbo: 3 točke.*
- *Rešitev, ki ustreza robnim pogojem: 4 točke.*

b. (10) Naj bo $f(x) = e^x\cos(x)$. Poiščite rešitev enačbe pri začetnih pogojih $y(0) = y'(0) = 0$.

Rešitev: Enačbo rešujemo v kompleksni obliki. Partikularna rešitev bo realni del rešitve enačbe

$$y'' - 2y' + y = e^x(\cos x + i\sin x) = e^{(1+i)x}\,.$$

Kompleksno število $\mu = 1 + i$ ni koren karakterističnega polinoma, zato rešitev iščemo z nastavkom $Ae^{\mu x}$. Vstavimo v enačbo in dobimo po krajšanju z $e^{\mu x}$

$$A(1+i)^2 - 2A(1+i) + A = A(1+i-1)^2 = -A = 1\,.$$

Realni del $-e^{(1+i)x}$ je $-e^x\cos x$. Splošna rešitev bo oblike

$$y(x) = -e^x\cos x + c_1e^x + c_2xe^x\,.$$

Začetnima pogojema bo zadoščeno, če bo

$$\begin{aligned} -1 + c_1 &= 0 \\ -1 + c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Iz tega izračunamo $c_1 = 1$ in $c_2 = 0$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek za nehomogeno enačbo: 4 točke.*
- *Izračun potrebne konstante A: 3 točke.*
- *Rešitev, ki ustreza robnim pogojem: 4 točke.*

7. (20) Sistem diferencialnih enačba naj bo dan z

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1 + ay_2 \\ \dot{y}_2 &= y_1 \end{aligned}$$

za neko konstanto a.

a. (10) Predpostavite $a < -1/4$. Poiščite rešitev zgornjega sistema pri začetnih pogojih $y_1(0) = 1$ in $y_2(0) = 0$.

Rešitev: Matrika za ta sistem diferencialnih enačb je

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Karakteristični polinom te matrike je $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - a$. *Diskriminanta te kvadratne enačbe je* $D = 1 + 4a < 0$, *torej ima enačba konjugirano kompleksna korena oblike* $1/2 \pm ib/2$, *kjer je* $b = \sqrt{-D}$. *Potrebujemo še lastni vektor, ki pripada eni od lastnih vrednosti, recimo* $1/2 + ib/2$.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 1/2 - ib/2 \end{pmatrix}.$$

Linearno neodvisni rešitvi dobimo tako, da vzamemo realni in imaginarni del $e^{(1/2+ib/2)t}\mathbf{x}_1$. *Dobimo*

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(t) &= \begin{pmatrix} -ae^{t/2}\cos(bt/2) \\ e^{t/2}(\cos(bt/2)/2 + b\sin(bt/2)/2) \end{pmatrix} \qquad \text{in} \\ \mathbf{y}_2(t) &= \begin{pmatrix} -ae^{t/2}\sin(bt/2) \\ e^{t/2}(-b\cos(bt/2)/2 + \sin(bt/2)/2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Želena rešitev bo oblike $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$, *iz česar sledita enačbi*

$$-ac_1 = 1 \qquad \text{in} \qquad c_1/2 - c_2b/2 = 0\,.$$

Razberemo, da je $c_1 = -1/a$ *in* $c_2 = -1/ab$ *in iskana rešitev*

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{t/2}(\cos(bt/2) + \sin(bt/2)/b) \\ 2e^{t/2}\sin(bt/2)/b \end{pmatrix}$$

Ocenjevanje:

- *Lastne vrednosti: 2 točki.*
- *Lastni vektorji: 2 točki.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*
- *Nastavek za iskanje rešitve: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite fundamentalno matriko zgornjega sistema, če je $a = -1/4$.

Rešitev: V tem primeru je karakteristični polinom enak $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1/4$ *in ima dvojno ničlo* $\lambda = 1/2$. *Lastni vektor je* $\mathbf{x} = (1, 2)^T$. *Ker obstaja samo en* *lastni vektor, iščemo drugo rešitev z nastavkom* $\mathbf{y}_2 = e^{t/2}(t\mathbf{x} + \mathbf{u})$. *Vstavimo v enačbo in za* $\mathbf{u}$ *dobimo*

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{x}\,.$$

Sledi $\mathbf{u} = (4, 4)^T$. *Druga rešitev je* $\mathbf{y}_2(t)e^{t/2}(t\mathbf{x} + \mathbf{u})$. *Naj bo*

$$\mathbf{X}(t) = e^{t/2}\begin{pmatrix} 1 & t+4 \\ 2 & 2t+4 \end{pmatrix}$$

Fundamentalna matrika je $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(0)^{-1}$, *ali*

$$\mathbf{Y}(t) = e^{t/2}\begin{pmatrix} t/2+1 & -t/4 \\ t & -t/2+1 \end{pmatrix}$$

Ocenjevanje:

- *Lastna vrednost: 2 točki.*
- *Lastni vektor: 2 točki.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*
- *Nastavek za iskanje stolpcev: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

8. (20) Pri hitrem vrtenju dolge in ozke grede nastopi diferencialna enačba

$$EIy^{(4)} - \frac{p\omega^2}{g} y = 0\,,$$

kjer je

- E-elastični modul.
- I-vztrajnostni moment preseka.
- p-specifična teža po enoti dolžine.
- ω-kotna hitrost.
- g-zemeljski pospešek.
- l-dolžina gredi.

Funkcija y opisuje odmik od ravnovesne lege.

a. (10) Napišite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

Rešitev: Karakteristična enačba za to linearno diferencialno enačbo je $P(\lambda) = EI\lambda^4 - \frac{p\omega^2}{g} = 0$. *Če označimo* $\nu = (p\omega^2/EIg)^{1/4}$, *so koreni karakterističnega polinoma* ν, $-\nu$, $i\nu$ *in* $-i\nu$. *Splošna rešitev je torej oblike*

$$c_1 e^{\nu x} + c_2 e^{-\nu x} + c_3 \cos(\nu x) + c_4 \sin(\nu x)$$

za poljubne konstante c_1, c_2, c_3 *in* c_4.

Ocenjevanje:

- *Koreni karakterističnega polinoma: 4 točke.*
- *4 linearno neodvisne rešitve: 6 točk.*

b. (10) Naj bo

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{p}}\,.$$

Poiščite rešitev diferencialne enačbe na intervalu $[0, l]$, ki ustreza pobnim pogojem $y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0$ in **ni** identično enaka 0.

Rešitev: Konstante iz splošne rešitve moramo določiti iz danih zahtev. Prvi dve zahtevi dasta enačbi

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ \nu^2(c_1 + c_2 - c_3) &= 0 \end{aligned}$$

Iz tega sledi $c_3 = 0$ *in* $c_1 + c_2 = 0$. *Iz ostalih dveh pogojev dobimo*

$$\begin{aligned} c_1 e^{\nu l} - c_1 e^{-\nu l} + c_4 \sin(\nu l) &= 0 \\ \nu^2(c_1 e^{\nu l} - c_1 e^{-\nu l} - c_4 \sin(\nu l)) &= 0 \end{aligned}$$

Enačbi odštejemo in ugotovimo, da mora biti $c_4 \sin(\nu l) = 0$ *in* $c_1 = 0$. *Z danim* ω *je* $\nu = \pi/l$, *torej* $\sin(\nu l) = 0$ *in lahko izberemo* $c_4 \neq 0$, *sicer pa poljuben. S tem smo tudi našli rešitev, ki ni identično enaka 0.*

Ocenjevanje:

- *Nastavek enačb: 4 točke.*
- *Rešitev enačb: 4 točke.*
- *Izbira* $c_4 \neq 0$: *2 točki.*