FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

16. september 1999

Ime in priimek: ________________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Zaporedna številka izpita: ________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bosta $U, V \subset \mathbb{R}^2$ odprti množici in naj bodo $f_1, f_2 \colon U \to V$ in $g_1, g_2 \colon V \to U$ zvezno odvedljive. Predpostavite, da velja

$$\begin{aligned} x &= g_1(f_1(x,y), f_2(x,y)) \\ y &= g_2(f_1(x,y), f_2(x,y)) \end{aligned}$$

a. (10) Pokažite, da velja

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pri tem so parcialni odvodi f_1 in f_2 izračunani v točki (x, y), parcialni odvodi $g_1$in g_2 pa v točki $(u, v) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$.

Rešitev: Odvajamo zgornji enačbi najprej po x.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial g_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial g_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{aligned}$$

Podobno dobimo z odvajanjem po y

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial g_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ 1 &= \frac{\partial g_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja, da odvajamo po x ali po y: 2 točki.*
- *Prvo posredno odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo posredno odvajanje: 2 točki.*
- *Opažanje, da so rezultati točno matrični produkti: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Naj U vsebuje točko $(0, 0)$ in naj V vsebuje točko $(1, 0)$. Naj bo bosta $g_1, g_2 \colon V \to U$ zvezno odvedljivi in naj velja

$$\begin{aligned} x &= g_1(e^x \cos y, e^x \sin y) \\ y &= g_2(e^x \cos y, e^x \sin y) \end{aligned}$$

Izračunajte

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial g_1}{\partial x}(1, 0) \\ &\tfrac{\partial g_2}{\partial x}(1, 0) \\ &\tfrac{\partial g_1}{\partial y}(1, 0) \\ &\tfrac{\partial g_2}{\partial y}(1, 0) \end{aligned}$$

Rešitev: *V a. postavimo* $f_1(x,y) = e^x \cos y$ *in* $f_2(x,y) = e^x \sin y$. *Izračunamo*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Iz a. potem sledi, da je

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(1,0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

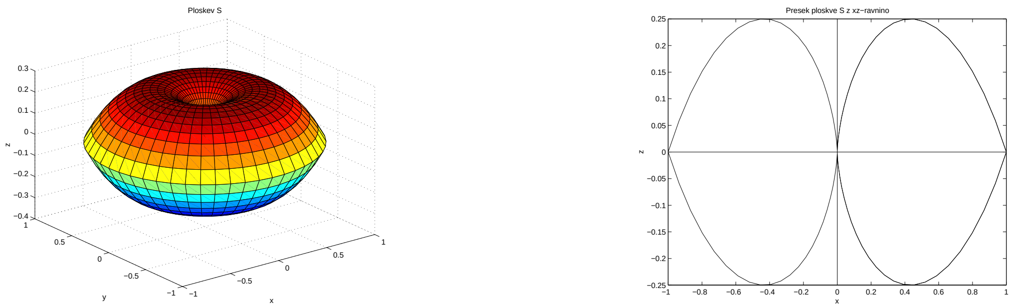
Ocenjevanje:

- *Ideja uporabiti a.: 2 točki.*
- *Definicija* f_1, f_2*: 2 točki.*
- *Prava izbira točke: 2 točki.*
- *Matrika parcialnih odvodov: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ na sliki 1 je dana v krogelnih koordinatah z enačbo

$$r = 1 - |\cos\theta|$$

za $0 \le \phi \le 2\pi$ in $0 \le \theta \le \pi$.



Sl. 1 Ploskev $\mathcal{S}$ in presek ploskve z xz-ravnino.

a. (10) Izračunajte prostornino telesa, ki ga omejuje ploskev $\mathcal{S}$.

Rešitev: Uporabimo krogelne koordinate in računamo

$$\begin{aligned}
V &= \int_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{1-|\cos\theta|} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta\,\frac{1}{3}(1-|\cos\theta|)^3\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\,(1-\cos\theta)^3\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4\pi}{3}\int_0^{1} (1-u)^3\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1}{4} \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja o uporabi krogelnih koordinat: 2 točki.*
- *Pravilne meje in Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte ploščino preseka telesa, ki ga omejuje ploskev $\mathcal{S}$, z xz-ravnino.

Rešitev: Lotimo se najprej desnega dela preseka. Uvedemo polarne koordinate in računamo

$$\begin{aligned} P &= \int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{1-|\cos\theta|} r\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\pi/2} (1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{3\pi}{4} - 2 \end{aligned}$$

Ploščina celotnega preseka je $3\pi/2 - 4$.

Ocenjevanje:

- *Ideja o uporabi krogelnih koordinat: 2 točki.*
- *Pravilne meje in Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Naj bo $\mathbf{u} = (x + y, z^2, x^2)$.

a. (10) Izračunajte pretok $\mathbf{u}$ skozi zgornjo polovico površine krogle s polmerom 1, torej $\mathcal{S} = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$. Za normalo si vedno izberite vektor, ki kaže iz krogle.

Rešitev: Najprej izračunamo $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 1$. *Ploskev* $\mathcal{S}$ *"zapremo" z osnovnico v* xy*-ravnini. Pretok skozi zgornjo polovico krogle je po Gaussovem izreku enak*

$$\int_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \;=\; \frac{2\pi}{3}$$

Po drugi strani je pretok skozi osnovno ploskev polkrogle enak

$$\begin{aligned} \int_D \mathbf{u} \cdot -\mathbf{k}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^1 -r^2 \cos^2 \phi \cdot r \mathrm{d}r \\ &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Celoten pretok skozi $\mathcal{S}$ *je tako enak* $2\pi/3 - (-\pi/4) = 11\pi/12$.

Ocenjevanje:

- *Izračun divergence: 2 točki.*
- *Uporaba Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Izračun pretoka skozi dodano ploskevi: 2 točki.*
- *Rezultat: 4 točke.*

b. (10) Izračunajte še krivuljni integral

$$\int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{u}\, \mathrm{d}\mathbf{r}\ ,$$

pri čemer rob ploskve pretečete v smeri nasprotni urinemu kazalcu.

Rešitev: Najprej izračunamo $\mathbf{rot}(\mathbf{u}) = (-2z, -2x, -1)$. *Na krivuljo namesto* $\mathcal{S}$ *napnemo kar enotski disk v ravnini, za normalo pa si izberemo* $\mathbf{k}$. *Pretok rotorja* $\mathbf{u}$ *dobimo takoj kot* $-\pi$, *kar je seveda po Stokesovem izreku enako iskanemu krivuljnemu integralu.*

Ocenjevanje:

- *Rotor: 2 točki.*
- *Ideja z napenjanjem ploskve: 2 točki.*
- *Pravilna uporaba Stokesovega izreka: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Dana naj bo linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = f(x)\,.$$

a. (10) Naj bo $f(x) = 0$. Rešite zgornjo enačbo pri začetnih pogojih $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$ in $y^{(3)}(0) = 0$.

Rešitev: Najprej moramo poiskati ničle karakterističnega polinoma

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2\,.$$

Ničli sta $\lambda_1 = i$ in $\lambda_2 = -i$, obe dvakratni. Linearno neodvisne rešitve so torej

$$y_1(x) = \cos x \qquad y_2(x) = x\cos x$$

in

$$y_3(x) = \sin x \qquad y_4(x) = x\sin x\,.$$

Splošna rešitev je oblike $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4$. Določiti moramo še konstante, tako da bo zadoščeno začetnim pogojem. Dobimo enačbe

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 \\ 0 &= c_2 + c_3 \\ 0 &= -c_1 + 2c_4 \\ 0 &= 3c_2 - c_3 \end{aligned}$$

Sledi $c_1 = 1$, $c_4 = 1/2$, $c_2 = 0$ in $c_3 = 0$.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Linearno neodvisne rešitve: 2+2 točki.*
- *Enačbe za konstante: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $f(x) = \cos x$. Poiščite partikularno rešitev nehomogene enačbe.

Rešitev: Desno stran enačbe nadomestimo z e^{ix}. Ker je i dvakratna ničla karakterističnega polinoma, moramo rešitev nehomogene enačbe iskati z nastavkom $y_p(x) = Ax^2e^{ix}$. Odvajamo po vrsti z uporabo Leibnizovega pravila.

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A(2x + ix^2)e^{ix} \\ y_p''(x) &= A(-x^2 + 4ix + 2)e^{ix} \\ y_p^{(3)}(x) &= A(-ix^2 - 6x + 6i)e^{ix} \\ y_p^{(4)}(x) &= A(x^2 - 8ix - 12)e^{ix} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo

$$-8Ae^{ix} = e^{ix}\,,$$

od koder sledi $A = 1/8$. *Partikularna rešitev je*

$$y_p(x) = -\frac{x^2 \cos x}{8}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nadomeščanje desne strani z* e^{ix}: *2 točki.*
- *Nastavek: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Konstanta* A: *2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

5. (20) Funkcija $f(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ naj bo definirana z

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{za } 0 < x < \pi \\ -\cos x & \text{za } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{za } x = 0, \pi, -\pi. \end{cases}$$

a. (10) Dokažite, da je za $0 < x < \pi$

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}.$$

Utemeljite, zakaj Fourierova vrsta za $0 < x < \pi$ konvergira proti $\cos x$.

Rešitev: Funkcija je liha, zato je $a_n = 0$ za vse $n \geq 0$. Izračunajmo najprej

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin x \, \mathrm{d}x = 0\,,$$

kot se brž prepričamo s substitucijo $2x = u$. Za $n > 0$ zapišemo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)}{2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-(-1)^{n+1} + 1}{n+1} + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Brž se prepričamo, da za lihe n dobimo $b_n = 0$, za sode pa $b_n = (1/\pi) 4n/(n^2 - 1)$. Če sode n zapišemo kot $2k$ in seštevamo po k dobimo točno zgornji rezultat. Fourierova vrsta konvergira v vsaki točki, ker je $f(x)$ odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva in velja povsod $(f(x+) + f(x-))/2 = f(x)$.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je funkcija liha: 2 točki.*
- *Integriranje: 4 točke.*
- *Izračun a_n: 2 točki.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Uporabite a. za izračun vsote neskončne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{4(2n+1)^2 - 1}.$$

Rešitev: *V zgornjo vrsto vstavimo* $x = \pi/4$. *Ostanejo samo lihi členi, ker je* $\sin(k\pi) = 0$ *za vsak* k. *V Fourierovi vrsti za* $f(x)$ *na levi dobimo* $f(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, *na desni pa iskano vrsto pomnoženo z* $8/\pi$. *Rezultat je* $\pi\sqrt{2}/16$.

Ocenjevanje:

- $x = \pi/4$: *3 točke.*
- *Ostanejo samo lihi členi: 3 točke.*
- *Vsota neskončne vrste: 4 točke.*

6. (20) Naj $\mathbf{u}$ opisuje hitrost stacionarnega toka idealnega fluida, za katerega veljajo Eulerjeve enačbe

$$\rho\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -\nabla p + \rho\mathbf{f}\,.$$

Predpostavite, da je $\mathbf{f} = -\nabla\phi$ za neko funkcijo ϕ.

a. (10) Izpeljite najprej, da za poljubno vektorsko polje $\mathbf{u}$ velja

$$\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\mathbf{rot}(\mathbf{u})\,.$$

Pojasnilo: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.

Rešitev: Zapišimo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. *S temi oznakami je*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\,.$$

Izračunajmo komponente gradienta in dobimo

$$\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x}u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x}u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x}u_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial y}u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial y}u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial y}u_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial z}u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z}u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial z}u_3 \end{pmatrix}.$$

Izračunajmo še

$$\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\mathbf{rot}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ -\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Zdaj preverimo enakost obeh izrazov.

Ocenjevanje:

- *Interpretacija leve strani: 2 točki.*
- *Izračun gradianta: 2 točki.*
- *Gradient na desni strani: 2 točki.*
- *Vektorsko množenje: 2 točki.*
- *Preverjanje enakosti: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{x}(t)$ pot dana parametrično za $t_1 \le t \le t_2$ in naj velja $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Pokažite, da je za nestisljiv fluid velja Bernoullijev izrek, ki pravi, da je izraz

$$\frac{p(\mathbf{x}(t))}{\rho} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))) + \phi(\mathbf{x}(t))$$

konstanten (neodvisen od t).

Namig: Odvajajte izraz po t in uporabite a.

Rešitev: Z odvajanjem dobimo najprej

$$\frac{\nabla p}{\rho}\cdot\dot{\mathbf{x}} + (\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\mathbf{rot}(\mathbf{u}))\cdot\dot{\mathbf{x}} + \nabla\phi\cdot\dot{\mathbf{x}}\,.$$

Upoštevamo, da je $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$ *in dejstvo, da je* $\mathbf{u} \times \mathbf{rot}(\mathbf{u})$ *pravokoten na* $\mathbf{u}$ *in dobimo*

$$\frac{\nabla p}{\rho} \cdot \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \nabla \phi \cdot \mathbf{u}\,.$$

Izpostavimo $\mathbf{u}$ *in upoštevamo še* $\nabla \phi = -\mathbf{f}$ *in dobimo*

$$\left(\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{f}\right) \mathbf{u}\,.$$

Izraz v oklepaju je 0 *po Eulerjevi enačbi, torej je odvod celotnega izraza enak* 0.

Ocenjevanje:

- *Odvajanje po t prvega izraza: 2 točki.*
- *Odvajanje po t drugega izraza: 2 točki.*
- *Odvajanje po t tretjega izraza: 2 točki.*
- *Poenostavljanje: 2 točki.*
- *Uporaba Eulerjeve enačbe: 2 točki.*