FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

3. september 1999

Ime in priimek: ________________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana z

$$f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8\,.$$

a. (10) Poiščite točki, kjer bi lahko bil maksimum funkcije $g(x,y) = x^2 + y^2$ pri pogoju $f(x,y) = 0$.

Rešitev: Po Lagrangeu sestavimo funkcijo $F(x,y) = g(x,y) - \lambda f(x,y)$. *Odvajamo parcialno po* x *in* y *in odvode izenačimo z* 0.

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= 2x - \lambda(10x - 6y) = 0 \\ F_y(x,y) &= 2y - \lambda(10y - 6x) = 0 \end{aligned}$$

Dobimo homogeni sistem dveh linearnih enačb oblike

$$\begin{array}{lcll} (2-10\lambda)x & + & 6\lambda y & = 0 \\ 6\lambda x & + & (2-10\lambda)y & = 0 \end{array}$$

Zanimajo nas samo rešitve, za katere je $f(x,y) = 0$, *torej mora biti rang matrike sistema enak* 1. *To se zgodi, če je determinanta enaka* 0, *zato mora biti*

$$(2-10\lambda)^2 - 36\lambda^2 = 4 - 40\lambda + 64\lambda^2 = 0\,.$$

Zgornja enačba ima rešitvi $\lambda_1 = 1/2$ *in* $\lambda_2 = 1/8$. *Za* λ_1 *dobimo, da je* $x = -y$, *za* λ_2 *pa* $x = y$. *Ker mora točka* (x,y) *ustrezati še enačbi* $f(x,y) = 0$, *dobimo za* λ_1 *enačbo*

$$5x^2 + 6x^2 + 5x^2 - 8 = 0$$

ali $x = \pm\sqrt{2}/2$. *Točki sta* $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ *in* $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. *Za* λ_2 *dobimo podobno točki* $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ *in* $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. *Ker iščemo maksimum funkcije* $g(x,y)$ *pri danih pogojih, sta kandidatki samo točki* $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ *in* $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek po Lagrangeu: 2 točki.*
- *Parcialni odvajanji: 1+1 točka.*
- *Ideja s homogenim sistemom: 2 točki.*
- *Lambde in lastni vektorji: 2 točki.*
- *Končni točki: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da v neki okolici U točke $x_0 = \sqrt{2}$ obstaja funkcija $h(x)$, taka da je $h(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ in $f(x, h(x)) = 0$. Izračunajte drugi odvod funkcije $k(x) = x^2 + h^2(x)$ v točki $x_0 = \sqrt{2}$.

Rešitev: Označimo $x_0 = y_0 = \sqrt{2}$. *Najprej preverimo, da je* $f(x_0, y_0) = 0$. *Po izreku o implicitni funkciji bo obstajala želena funkcija* $h(x)$, *če je* $f_y(x_0, y_0) \neq 0$. *Odvajamo in dobimo*

$$f_y(x,y) = -6x + 10y\,.$$

Očitno je $f_y(x_0, y_0) = 4\sqrt{2} \neq 0$. *Za drugi odvod funkcije* $k(x)$ *računamo*

$$k'(x) = 2x + 2h(x)h'(x)$$

in

$$k''(x) = 2 + 2(h'(x))^2 + 2h(x)h''(x)\,.$$

Računamo

$$h'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -1\,.$$

Za drugi odvod $h(x)$ *odvajamo* $f(x, h(x)) = 0$ *parcialno po* x *dvakrat. Dobimo*

$$f_x + f_y h' = 0$$

in

$$f_{xx} + f_{xy}h' + (f_{xy} + f_{yy}h')h' + f_y h'' = 0\,.$$

Upoštevamo še $h'(x_0) = -1$ *in dobimo*

$$10 + 6 - (-6 - 10)\cdot 1 + 4\sqrt{2}h''(x_0) = 0\,.$$

ali $h''(x_0) = -8/\sqrt{2}$. *Vstavimo še v izraz za drugi odvod* $k(x)$ *in dobimo*

$$k''(x_0) = 2 + 2 - 2\sqrt{2}\cdot 8/\sqrt{2} = -12\,.$$

Ocenjevanje:

- *Preverjanje predpostavk za izrek o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Odvajanje* $f(x, h(x))$ *prvič: 2 točki.*
- *Odvajanje* $f(x, h(x))$ *drugič: 2 točki.*
- $h''(x_0)$*: 2 točki.*
- $k''(x_0)$*: 2 točki. in dobimo*
-
-

2. (20) Naj bo $\Delta = \{(x,y,z)\colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$ piramida v $\mathbb{R}^3$.

a. (10) Izračunajte

$$I = \int_\Delta \frac{1}{\sqrt{xyz(1-x-y-z)}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

Namig: Uporabite $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\, \mathrm{d}u = \pi$ *in* $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u = \pi/2$.

Rešitev: Računamo po Fubiniju

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{1}{\sqrt{y}}\, \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} \frac{1}{\sqrt{z(1-x-y-z)}}\, \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{1}{\sqrt{y}}\, \mathrm{d}y \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\, \mathrm{d}u \qquad z = (1-x-y)u \\
&= \pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{1}{\sqrt{y}}\, \mathrm{d}y \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x\, \sqrt{1-x} \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x \\
&= \pi^2
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s Fubinijem: 2 točki.*
- *Prave meje: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki*
- *Srednji integral: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\Pi = \{(x,y,z)0, |x| + |y| + |z| \leq 1\}$ oktaeder v $\mathbb{R}^3$. Izračunajte masni vztrajnostni moment I_{zz} tega telesa okrog osi z. Privzemite, da je gostota konstantno 1.

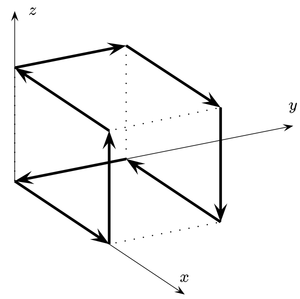
Rešitev: Oktaeder je sestavljen iz 8 *piramid, zato lahko računamo s piramido iz a. in razultat pomnožimo z* 8. *Računamo*

$$
\begin{aligned}
I_{zz} &= 8\int_{\Delta}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= 8\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z \\
&= 8\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= 8\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\Big[(1-x)x^2-yx^2+(1-x)y^2-y^3\Big]\,\mathrm{d}y \\
&= 8\int_0^1 \mathrm{d}x\left[(1-x)^2x^2-\frac{1}{2}(1-x)^2x^2+\frac{1}{3}(1-x)^4-\frac{1}{4}(1-x)^4\right] \\
&= 8\int_0^1 (\frac{x^2(1-x)^2}{2}+\frac{1}{12}(1-x)^4)\,\mathrm{d}x \\
&= 8\cdot(\frac{1}{60}+\frac{1}{60}) \\
&= \frac{4}{15}
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s Fubinijem: 2 točki.*
- *Prave meje: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki*
- *Srednji integral: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

3. (20) Vektorsko polje naj bo dano z $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - (x+z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$.



Slika 1 Kocka z včrtano potjo $\mathcal{C}$.

a. (10) Naj bo $\mathcal{C}$ zaključena pot z začetno točko 0, ki sledi robovom kocke z robom 1 kot na sliki 1. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} d\mathbf{r} \, .$$

Rešitev: Najprej izračunamo rotor vektorskega polja $\mathbf{F}$. *Dobimo*

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Za uporabo Stokesovega izreka si moramo izbrati ploskev, katere rob bo dana krivulja. Ena od možnosti je, da si izberemo ploskvi kocke, ki sta vzporedni xy-ravnini in ploskev, ki je vzporedna yz-ravnini, vendar ne leži v njej. Po vijačnem pravilu si za normalo na ploskev vedno izberemo vektorje, ki kažejo iz kocke. Pretoka skozi ploskvi vzporedni xy-ravnini se uničita, ker sta nasprotnega predznaka. Izračunati moramo samo se pretok skozi tretji kos ploskve. Normala je tam $\mathbf{i}$, *tako da je zaradi konstantnosti rotorja pretok* 2 *(ploščina ploskve krat skalarni produkt normale in vektorskega polja).*

Ocenjevanje:

- *Izračun rotorja: 2 točki.*
- *Ideja s Stokesovim izrekom: 2 točki.*
- *Izbira ploskve: 2 točki.*
- *Vijačno pravilo: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte pretok polja skozi površino kocke brez ploskev vzporednih xz-ravnini. Za normalo si vedno izberite vektor, ki kaže iz kocke.

Rešitev: Uporabili bomo Gaussov izrek. Zlahka izračunamo, da je $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$, *torej je pretok skozi celotno površino kocke enak* 0. *Izračunajmo pretok skozi ploskvi vzporedni xz-ravnini. Najprej se lotimo ploskve, ki leži v xz-ravnini. Tam je $y = 0$ in je vektorsko polje enako* $(0, -x-z, 0)$. *Normala je tam* $-\mathbf{j}$, *zato je pretok enak*

$$\int_0^1 dx \int_0^1 (x+z)\, dz = 1 \, .$$

Na ploskvi vzporedni xz-ravnini je $y = 1$, normala pa je enaka $\mathbf{j}$. Pretok je tako

$$-\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}z = -1\,.$$

Pretoka skozi manjkajoči ploskvi se uničita in je tako želeni pretok enak 0.

Ocenjevanje:

- *Ideja z Gaussovim izrekom: 2 točki.*
- *Divergenca: 2 točki.*
- *Formula za pretok za posamezni ploskvi: 2 točki.*
- *Rezultata za posamezni ploskvi: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

4. (20) Dan naj bo sistem enačb

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}\,.$$

a. (10) Poiščite tri linearno neodvisne rešitve zgornjega sistema enačb.

Rešitev: Najprej moramo izračunati lastne vrednosti matrike, torej

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + (2-\lambda) = (2-\lambda)^3\,.$$

Označimo z $\mathbf{A}$ *matriko sistema. Zlahka ugotovimo, da je* $\operatorname{rang}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 2$, *torej obstaja samo en lastni vektor in sicer* $\mathbf{x} = (1,0,0)$. *Ta lastni vektor da rešitev*

$$\mathbf{y}_1 = e^{2t}\mathbf{x}\,.$$

Linearno neodvisno rešitev iščemo z nastavkom $\mathbf{y}_2 = te^{2t}\mathbf{x} + e^{2t}\mathbf{u}$, *kjer mora* $\mathbf{u}$ *zadoščati enačbi* $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{x}$. *Zapisano na široko dobimo enačbe*

$$u_3 = 1, \qquad -u_2 + u_3 = 0 \qquad \textit{in} \qquad -u_2 + u_3 = 0\,.$$

Kot vidimo, si lahko u_1 *poljubno izberemo, recimo* $u_1 = 0$, *sicer pa je* $u_2 = u_3 = 1$. *S tem smo našli drugo rešitev. Tretjo iščemo z nastavkom*

$$\mathbf{y}_3 = \frac{t^2}{2}e^{2t}\mathbf{x} + te^{2t}\mathbf{u} + e^{2t}\mathbf{v}\,,$$

kjer $\mathbf{v}$ *zadošča enačbi* $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{u}$. *Izpišemo enačbe in dobimo*

$$v_3 = 0. \qquad -v_2 + v_3 = 1 \qquad \textit{in} \qquad -v_2 + v_3 = 1$$

z rešitvijo recimo $\mathbf{v} = (0,-1,0)$.

Ocenjevanje:

- *Lastna vrednost: 2 točki.*
- *Lastni vektor in rang: 2 točki.*
- *Nastavek za drugo enačbo: 2 točki.*
- *Nastavek za tretjo rešitev: 2 točki.*
- *Linearno neodvisne rešitve: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev nehomogene enačbe

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} - 2\mathbf{a}\,,$$

kjer je $\mathbf{a} = (1,0,0)$ pri začetnem pogoju $\mathbf{y}(0) = (0,0,0)$.

Rešitev: Nehomogeni del enačbe je konstanten vektor, zato lahko partikularno rešitev iščemo kot konstanten vektor $\mathbf{b}$*, ki mora zadoščati pogoju*

$$0 = \mathbf{A}\mathbf{b} - 2\mathbf{a}\,.$$

Ker je $\mathbf{a}$ *lastni vektor, bo kar* $\mathbf{a} = \mathbf{b}$*. Rešitev iščemo z nastavkom*

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + c_3\mathbf{y}_3\,.$$

Takoj vidimo, da je $c_1 = -1$ *in* $c_2 = c_3 = 0$*. Rešitev je torej*

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 - e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Nastavek za rešitev: 2 točki.*
- *Enačbe za konstante: 2 točki.*
- *Konča rešitev: 2 točki.*

5. (20) Funkcija $M(x)$ naj bo definirana s potenčno vrsto

$$M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{b_{(k)}},$$

kjer je $b_{(0)} = 1$ in za $k \geq 1$ $b_{(k)} = b(b+1)(b+2)\cdots(b+k-1)$, pri čemer je $b > 0$.

a. (10) Poiščite konvergenčni radij zgornje vrste in izpeljite, da je

$$xM''(x) + (b-x)M'(x) - M(x) = 0\,.$$

Utemeljite vaše trditve.

Rešitev: Najprej izračunamo

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{b_{(k)}}{b_{(k+1)}} \right| = 0\,.$$

Radij konvergence je torej $R = \infty$. Potenčno vrsto lahko odvajamo po členih in dobimo

$$M'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{b_{(k)}}$$

in

$$M''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{b_{(k)}}\,.$$

Seštejemo in dobimo

$$\begin{aligned}
& xM''(x) + (b-x)M'(x) - M(x) \\
= \;& \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left(\frac{k(k+1)}{b_{(k+1)}} + \frac{b(k+1)}{b_{(k+1)}} - \frac{k}{b_{(k)}} - \frac{1}{b_{(k)}} \right) \\
= \;& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{b_{(k+1)}} \left(k(k+1) + b(k+1) - k(b+k) - (b+k) \right) \\
= \;& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{b_{(k+1)}} (k^2 + k + bk + b - bk - k^2 - b - k) \\
= \;& 0\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Radij konvergence: 2 točki.*
- *Prvo odvajanje po členih: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje po členih: 2 točki.*
- *Manipuliranje z vrstami: 2 točki.*
- *Zbrani koeficienti: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $b > 2$. Pokažite, da je

$$M(x) = (b-1)\int_0^1 e^{xt}(1-t)^{b-2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Utemeljite vaše korake.

Namig: Izpeljite z integracijo per partes, da je $\int_0^1 t^k(1-t)^{b-2}\,\mathrm{d}t = \frac{k!}{(b-1)b_{(k)}}$.

Rešitev: Vemo, da je $e^{xt} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k t^k}{k!}$. *Vstavimo to vrsto v zgornji integral in dobimo*

$$\begin{aligned}
(b-1)\int_0^1 e^{xt}(1-t)^{b-2}\,\mathrm{d}t &= (b-1)\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k t^k(1-t)^{b-2}}{k!} \\
&= (b-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\int_0^1 t^k(1-t)^{b-2}\,\mathrm{d}t \\
&= (b-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{k!}{(b-1)b_{(k)}}\,.
\end{aligned}$$

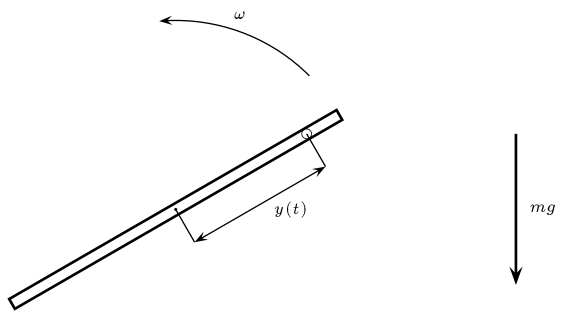
Zamenjali smo neskončno vsoto in integral, kar lahko, ker je vrsta majorizirana z $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k}{k!}$, *ki seveda konvergira. Dokažimo še namig. Računamo*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^k(1-t)^{b-2}\,\mathrm{d}t &= -t^k\frac{(1-t)^{b-1}}{b-1}\Big|_0^1 + \frac{k}{b-1}\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{k(k-1)}{(b-1)b}\int_0^1 t^{k-2}(1-t)^{b}\,\mathrm{d}t \\
&= \cdots\cdots\cdots \\
&= \frac{k(k-1)\cdots 1}{(b-1)b(b+1)\cdots(b+k-2)}\int_0^1 (1-t)^{b+k-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{k!}{(b-1)b_{(k)}}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Razvoj eksponentne funkcije: 2 točki.*
- *Utemeljitev zamenjave seštevanja in integriranja: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Primerjava vrst: 2 točki.*
- *Dokaz namiga: 2 točki.*

6. (20) Gladka cev se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω okrog osi pravokotne na cev pritrjene v sredini kot na sliki 2.



Slika 2 Gibanje kroglice v vrteči se cevi.

Kroglica se lahko prosto giblje po celi cevi. Gibanje kroglice pod vplivom težnosti in vrtenja cevi opisuje diferencialna enačba

$$m\ddot{y} - m\omega^2 y = -mg\sin(\omega t)\,,$$

kjer je m masa kroglice, y razdalja kroglice od osi in g gravitacijska konstanta.

a. (10) Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe.

Rešitev: Najprej poiščemo rešitvi homogene enačbe. Karakteristični polinom je oblike $P(\lambda) = m\lambda^2 - m\omega^2$ z ničlama $\lambda_1 = \omega$ in $\lambda_2 = -\omega$. Rešitvi homogene enačbe sta torej

$$y_1(t) = e^{\omega t} \qquad \textit{in} \qquad y_2(t) = e^{-\omega t}\,.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $y_p(t) = Ae^{i\omega t}$. Vstavimo v enačbo, pokrajšamo $me^{i\omega t}$ in dobimo

$$-A\omega^2 - A\omega^2 = -g\,.$$

Izračunamo $A = \frac{g}{2\omega^2}$, torej je

$$y_p(t) = \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)\,.$$

Splošna rešitev je

$$y(t) = \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t) + c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*
- *Nastavek za nehomogeno enačbo: 2 točki.*

- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Recimo, da je cev dolga $2l$ in je $l > \frac{g}{2\omega^2}$. Kroglica se začne gibati z začetnima pogojema $y(0) = 0$ in $\dot{y}(0) = \frac{g}{2\omega}$. Ali bo kroglica "odletela" iz cevi?

Rešitev: V a. smo poiskali splošno rešitev diferencialne enačbe. Zdaj moramo poiskati konstanti c_1 in c_2, tako da bo zadoščeno danima začetnima pogojema. Dobimo enačbi

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad \textit{in} \qquad c_1 - c_2 = 0$$

z rešitvama $c_1 = c_2 = 0$. Gibanje torej opisuje funkcija

$$y(t) = \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)\,.$$

Največjo možno razdaljo od osi kroglica doseže pri $t = \pi/2\omega$ in ta razdalja je $\frac{g}{2\omega^2}$. Ker je cev daljša od te maksimalne razdalje, kroglica ne bo odletela.

Ocenjevanje:

- *Ideja, kako uporabiti začetna pogoja: 2 točki.*
- *Enačbi za konstanti: 2 točki.*
- *Konstanti: 2 točki.*
- *Maksimalni odklon: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*