FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

1. kolokvij

26. november 2010

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (25) Funkciji $u(x,y)$ in $v(x,y)$ naj bosta dani z

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\log\left((1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2\right) \quad \text{in} \quad v(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2xy}{1+x^2-y^2}\right) .$$

a. (10) Pokažite, da je $u_x(x,y) = v_y(x,y)$.

Rešitev: Računamo

$$u_x(x,y) = \frac{4xy^2 + 2x\left(x^2-y^2+1\right)}{\left(x^2-y^2+1\right)^2 + 4x^2y^2}$$

in

$$v_y(x,y) = \frac{4xy^2 + 2x\left(x^2-y^2+1\right)}{\left(x^2-y^2+1\right)^2 + 4x^2y^2} .$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo za odvod sestavljene funkcije: 2 točki.*
- *$u_x(x,y)$: 2 točki.*
- *$v_y(x,y)$: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Primerjava: 2 točki.*

b. (15) Pokažite še, da je $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$ in izračunajte

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) .$$

Namig: Premislite ali je res potrebno računati u_{xx} in u_{yy}.

Rešitev: Računamo

$$u_y(x,y) = \frac{4x^2y - 2y\left(x^2-y^2+1\right)}{\left(x^2-y^2+1\right)^2 + 4x^2y^2}$$

in

$$v_x(x,y) = -\frac{4x^2y - 2y\left(x^2-y^2+1\right)}{\left(x^2-y^2+1\right)^2 + 4x^2y^2} .$$

Iz prvega dela naloge sledi, da je $u_{xx} = v_{xy}$, iz drugega pa, da je $u_{yy} = -v_{xy}$. Iz tega sledi, da je

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) .$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo za odvod sestavljene funkcije: 3 točke.*
- *$u_y(x,y)$: 3 točke.*
- *$v_x(x,y)$: 3 točke.*
- *Ideja z odvajanjem leve in desne strani v a. in b.: 3 točke.*
- *Sklep: 3 točke.*

2. (25) Naj bo $f(z)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Naj bo $g(u,v)$ dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija.

a. (10) Naj bo

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x+cy) + f(x-cy)\right)$$

za neko konstanto $c > 0$. Izračunajte

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\left(f'(x+cy) + f'(x-cy)\right)$$

in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{2}\left(f''(x+cy) + f''(x-cy)\right)\,.$$

Po drugi strani je

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{c}{2}\left(f'(x+cy) - f'(x-cy)\right)$$

in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = \frac{c^2}{2}\left(f''(x+cy) + f''(x-cy)\right)\,.$$

Sledi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvi po x: 2 točki.*
- *Drugi po x: 2 točki.*
- *Prvi po y: 2 točki.*
- *Drugi po y: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Naj bo

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = w(u) \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial g}{\partial v}(x,y) = -w(v)$$

za neko zvezno odvedljivo funkcijo $w(z)$. Naj bo

$$F(x,y) = g(x+cy, x-cy)\,.$$

Izračunajte

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x+cy, x-cy) + \frac{\partial g}{\partial v}(x+cy, x-cy) = w(x+cy) - w(x-cy)$$

in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = w'(x+cy) - w'(x-cy)\,.$$

Po drugi strani je

$$\frac{\partial F}{\partial y} = c\left(\frac{\partial g}{\partial u}(x+cy, x-cy) - \frac{\partial g}{\partial v}(x+cy, x-cy)\right) = cw(x+cy) + cw(x-cy)$$

in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = c^2 w'(x+cy) - c^2 w'(x-cy)\,.$$

Sledi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvi po x: 3 točke.*
- *Drugi po x: 3 točke.*
- *Prvi po y: 3 točke.*
- *Drugi po y: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

3. (25) Naj bodo $a > 0$, $b > 0$ in $c > 0$ dana pozitivna števila, za katera velja

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1\,.$$

a. (10) Poiščite možne lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y,z) = \frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b} + \frac{z^c}{c}$$

za $x > 0$, $y > 0$ in $z > 0$, pri pogoju $xyz = 1$.

Rešitev: Po Lagrangu sestavimo funkcijo

$$F(x,y,z) = \frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b} + \frac{z^c}{c} - \lambda xyz$$

in njene parcialne odvode izenačimo z 0. *Dobino*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= x^{a-1} - \lambda yz &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= y^{b-1} - \lambda xz &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= z^{c-1} - \lambda xy &= 0\,. \end{aligned}$$

Prvo enačbo pomnožimo z x, *drugo z* y *in tretjo z* z *in upoštevamo pogoj* $xyz = 1$. *Dobimo*

$$\begin{aligned} x^a - \lambda &= 0 \\ y^b - \lambda &= 0 \\ z^c - \lambda &= 0\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$\lambda^{1/a}\lambda^{1/b}\lambda^{1/c} = \lambda = 1\,.$$

Sledi $x = y = z = 1$.

Ocenjevanje:

- *Lagrange: 2 točki.*
- *Parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Množenje: 2 točki.*
- *Enačba za* λ*: 2 točki.*
- *Točka: 2 točki.*

b. (10) Naj bo

$$g(x,y) = \frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b} + \frac{1}{cx^cy^c}\,.$$

Poiščite stacionarne točke funkcije $g(x,y)$ za $x, y > 0$ in potrdite, da ste našli lokalne minimume.

Rešitev: Izračunamo

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x^{a-1} - \frac{1}{x^{c+1}y^c} \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = y^{b-1} - \frac{1}{x^cy^{c+1}}\,.$$

Prvo enačbo pomnožimo z x, drugo z y in izenačimo z 0. Sledi $x^a = y^b$. Vstavimo v prvo enačbo in dobimo

$$x^a = \frac{1}{x^c x^{ac/b}} .$$

Sledi

$$\left(x^{1/a+1/b+1/c}\right)^{ac} = 1$$

ali $x = 1$ in posledično $y = 1$. Izračunamo še

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} (a-1)x^{a-2} + \frac{c+1}{x^{c+2}y^c} & \frac{c}{x^{c+1}y^{c+1}} \\ \frac{c}{x^{c+1}y^{c+1}} & (b-1)y^{b-2} + \frac{c+1}{x^c y^{c+2}} \end{pmatrix} .$$

Vstavimo $x = y = 1$ in dobimo

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} a+c & c \\ c & b+c \end{pmatrix} .$$

Diagonalna elementa sta pozitivna, determinanta pa je $ab + (a+b)c$. Našli smo lokalni minimum.

Ocenjevanje:

- *Parcialna odvoda: 3 točke.*
- *Stacionarna točka: 3 točke.*
- *Drugi parcialni odvodi: 3 točke.*
- *Hessejeva matrika: 3 točke.*
- *Sklep: 3 točke.*

4. (25) Naj bo

$$f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2 - 4((x-1)^2+y^2)\,.$$

Naj bo točka (x_0, y_0) dana z

$$x_0 = -\frac{1}{2} \qquad \text{in} \qquad y_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,.$$

a. (10) Prepričajte se, da točka (x_0, y_0) leži na krivulji, dani z $f(x,y)=0$. Pokažite, da v okolici točke x_0 obstaja funkcija $g(x)$, da velja $g(x_0)=y_0$ in $f(x,g(x))=0$. Izračunajte še $g'(x_0)$.

Rešitev: Z vstavljanjem dobimo

$$f(x_0,y_0) = 6^2 - 4\cdot 9 = 0\,.$$

Izračunamo

$$f_y(x,y) = 4y(x^2+y^2-1) - 8y\,,$$

torej $f_y(x_0,y_0) = 24\sqrt{3} \neq 0$. *Po izreku o implicitni funkciji funkcija* $g(x)$ *z navedenimi lastnostmi obstaja. Izračunamo še*

$$f_x(x,y) = 4x(x^2+y^2-1) - 8(x-1)\,,$$

torej $f_x(x_0,y_0)=0$. *Sledi* $g'(x_0)=0$.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje* $f(x_0,y_0)=0$*: 2 točki.*
- *Preverjanje* $f_y(x_0,y_0)\neq 0$*: 2 točki.*
- *Sklep[o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Formula za odvod: 2 točki.*
- *Odvod: 2 točki.*

b. (15) Pokažite, da ima funkcija $g(x)$ v točki x_0 lokalni maksimum.

Rešitev: Identiteto $f(x,g(x))=0$ *odvajamo dvakrat po* x. *Po prvem odvajanju dobimo*

$$f_x + f_y\cdot g' = 0$$

po drugem pa

$$f_{xx} + f_{yx}\cdot g' + (f_{xy} + f_{yy}\cdot g')\cdot g' + f_y\cdot g'' = 0\,.$$

V vse dvojne parcialne odvode je potrebno vstaviti točko (x_0,y_0) *in v odvod* g *točko* x_0. *Upoštevamo, da je* $g'(x_0)=0$, *tako da potrebujemo le še*

$$f_{xx}(x,y) = 4\left(3x^2+y^2-3\right)\,,$$

torej $f_{xx}(x_0,y_0)=18$. *Sledi*

$$g''(x_0) = -\frac{f_{xx}(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)} = -\frac{3}{4\sqrt{3}} < 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvod prve identitete: 3 točke.*
- *Odvod druge identitete: 3 točke.*
- *Potrebni drugi odvodi: 3 točke.*
- *Vstavljanje točke: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*