FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

1. kolokvij

26. november 2010

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Funkciji $u(x,y)$ in $v(x,y)$ naj bosta dani z

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\log\left((1+x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2\right) \quad \text{in} \quad v(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2xy}{1+x^2-y^2}\right).$$

a. (10) Pokažite, da je $v_x(x,y) = -u_y(x,y)$.

Rešitev: Računamo

$$v_x(x,y) = -\frac{4x^2y - 2y\left(x^2-y^2+1\right)}{\left(x^2-y^2+1\right)^2 + 4x^2y^2}.$$

in

$$u_y(x,y) = \frac{4x^2y - 2y\left(x^2-y^2+1\right)}{\left(x^2-y^2+1\right)^2 + 4x^2y^2}$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo za odvod sestavljene funkcije: 2 točki.*
- *$v_x(x,y)$: 2 točki.*
- *$u_y(x,y)$: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Primerjava: 2 točki.*

b. (15) Pokažite še, da je $v_y(x,y) = u_x(x,y)$ in izračunajte

$$v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y).$$

Namig: Premislite ali je res potrebno računati v_{xx} in v_{yy}.

Rešitev: Računamo

$$v_y(x,y) = \frac{4xy^2 + 2x\left(x^2-y^2+1\right)}{\left(x^2-y^2+1\right)^2 + 4x^2y^2}.$$

in

$$u_x(x,y) = \frac{4xy^2 + 2x\left(x^2-y^2+1\right)}{\left(x^2-y^2+1\right)^2 + 4x^2y^2}$$

Iz prvega dela naloge sledi, da je $v_{xx} = -u_{xy}$, iz drugega pa, da je $v_{yy} = u_{xy}$. Iz tega sledi, da je

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y).$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo za odvod sestavljene funkcije: 3 točke.*
- *$v_y(x,y)$: 3 točke.*
- *$u_x(x,y)$: 3 točke.*
- *Ideja z odvajanjem leve in desne strani v a. in b.: 3 točke.*
- *Sklep: 3 točke.*

2. (25) Naj bo funkcija $f(r)$ za $r > 0$ dvakrat zvezno odvedljiva. Za $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ definiramo funkcijo

$$u(x, y, z) = f(r) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

a. (10) Izračunajte $u_{xx}(x, y, z)$.

Rešitev: Označimo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Parcialno odvajamo po pravilu za odvajanje sestavljenih funkcij. Dobimo*

$$u_x(x, y, z) = f'(r) \cdot \frac{x}{r}.$$

Parcialno odvajamo še enkrat.

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y, z) &= f''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} \\ &= f''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{y^2 + z^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- u_x*: 2 točki.*
- *Pravilo za produkt: 2 točki.*
- *Parcialni odvod prvega člena: 2 točki.*
- *Parcialni odvod drugega člena: 2 točki.*
- *Poenostavitev in reyultat: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $f(r) = 1/r$. Izračunajte

$$u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z).$$

Rešitev: Uporabimo prvi del naloge in simetrijo. Sledi

$$u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) = f''(r) + f'(r) \cdot \frac{2}{r}.$$

Upoštevamo še

$$f'(r) = -\frac{1}{r^2} \qquad in \qquad f''(r) = \frac{2}{r^3}.$$

Vstavimo in sledi

$$u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) = 0.$$

Ocenjevanje:

- *Simetrija: 3 točke.*
- *Seštevanje: 3 točke.*
- *Poenostavitev: 3 točke.*
- *Odvodi* $f(r)$ *3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

3. (20) Naj bo

$$f(x,y) = -x^4 - y^4 + 4xy\,.$$

a. (15) Poiščite stacionarne točke in za stacionarne točke različne od $(0,0)$ ugotovite ali so lokalni maksimumi ali lokalni minimumi.

Rešitev: Parcialno odvajamo in dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4x^3 + 4y \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4y^3 + 4x\,.$$

Parcialna odvoda izenačimo z 0. *Vstavimo* $x = y^3$ *iz druge enačbe v prvo in dobimo*

$$y^9 - y = y(y^8 - 1) = y(y^4+1)(y^4-1) = y(y^4+1)(y^2+1)(y-1)(y+1) = 0\,.$$

Rešitve so $y = 0$, $y = 1$ *in* $y = -1$. *Točke so torej* $(0,0)$, $(1,1)$ *in* $(-1,-1)$. *Izračunamo*

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}.$$

Sledi, da sta točki $(1,1)$ *in* $(-1,-1)$ *lokalna maksimuma.*

Ocenjevanje:

- *Parcialna odvoda: 3 točke.*
- *Stacionarne točke: 3 točke.*
- *Drugi parcialni odvodi: 3 točke.*
- *Hessejeva matrika: 3 točke.*
- *Sklepi: 3 točke.*

b. (10) Kje je lahko ekstrem funkcije $f(x,y)$ pri pogoju $x^2 + y^2 = 1$?

Rešitev: Po Lagrangu sestavimo novo funkcijo

$$F(x,y) = -x^4 - y^4 + 4xy - \lambda(x^2 + y^2)\,.$$

Parcialna odvoda izenačimo z 0 *in dobimo enačbi*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -4x^3 + 4y - 2\lambda x = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -4y^3 + 4x - 2\lambda y = 0\,.$$

Prvo enačbo pomnožimo z y, *drugo z* x *in odštejemo. Dobimo*

$$4xy(y^2 - x^2) + 4(y^2 - x^2) = 4(-x+y)(x+y)(xy+1) = 0\,.$$

Na krožnici $x^2 + y^2 = 1$ *ni nikoli* $xy = -1$. *Veljati mora ali* $x = y$ *ali* $x = -y$. *V poštev pridejo točke* $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ *in* $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Ocenjevanje:

- *Lagrangova funkcija: 2 točki.*
- *Parcialna odvoda: 2 točki.*
- *Odštevanje enačb: 2 točki.*
- *Razcep: 2 točki.*
- *Možni ekstremi: 2 točki.*

4. (25) Naj bo funkcija $f(x, y)$ dana z

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)\,.$$

Točka (x_0, y_0) naj bo dana z

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{in} \qquad y_0 = \frac{1}{2}\,.$$

a. (10) Prepričajte se, da točka (x_0, y_0) leži na krivulji, dani z $f(x, y) = 0$. Pokažite, da v okolici točke x_0 obstaja funkcija $g(x)$, da velja $g(x_0) = y_0$ in $f(x, g(x)) = 0$. Izračunajte še $g'(x_0)$.

Rešitev: Z vstavljanjem dobimo

$$f(x_0, y_0) = 1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0\,.$$

Izračunamo

$$f_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2) + 4y$$

torej $f_y(x_0, y_0) = 4 \neq 0$. Po izreku o implicitni funkciji funkcija $g(x)$ z navedenimi lastnostmi obstaja. Izračunamo še

$$f_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2) - 4x\,,$$

torej $f_x(x_0, y_0) = 0$. Sledi $g'(x_0) = 0$.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje $f(x_0, y_0) = 0$: 2 točki.*
- *Preverjanje $f_y(x_0, y_0) \neq 0$: 2 točki.*
- *Sklep[o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Formula za odvod: 2 točki.*
- *Odvod: 2 točki.*

b. (15) Pokažite, da ima funkcija $g(x)$ v točki x_0 lokalni maksimum.

Rešitev: Identiteto $f(x, g(x)) = 0$ odvajamo dvakrat po x. Po prvem odvajanju dobimo

$$f_x + f_y \cdot g' = 0$$

po drugem pa

$$f_{xx} + f_{yx} \cdot g' + (f_{xy} + f_{yy} \cdot g') \cdot g' + f_y \cdot g'' = 0\,.$$

V vse dvojne parcialne odvode je potrebno vstaviti točko (x_0, y_0) in v odvod g točko x_0. Upoštevamo, da je $g'(x_0) = 0$, tako da potrebujemo le še

$$f_{xx}(x, y) = 4(x^2 + y^2) + 8x^2 - 4\,,$$

torej $f_{xx}(x_0, y_0) = 6$. Sledi

$$g''(x_0) = -\frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{3}{2} < 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvod prve identitete: 3 točke.*
- *Odvod druge identitete: 3 točke.*
- *Potrebni drugi odvodi: 3 točke.*
- *Vstavljanje točke: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*