FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

1. kolokvij

30. november 2011

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Definirajte funkciji

$$u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) \qquad \text{in} \qquad v(x,y) = e^{x^2-y^2}\sin(2xy)\,.$$

a. (10) Pokažite, da je

$$u_x = v_y \qquad \text{in} \qquad u_y = -v_x$$

in sklepajte, da je $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Rešitev: Računamo

$$u_x = 2e^{x^2-y^2}(x\cos(2xy) - y\sin(2xy))$$

in

$$v_y = 2e^{x^2-y^2}(x\cos(2xy) - y\sin(2xy))$$

torej enakost velja. Podobno je

$$u_y = -2e^{x^2-y^2}(y\cos(2xy) + x\sin(2xy))$$

in

$$v_x = 2e^{x^2-y^2}(y\cos(2xy) + x\sin(2xy))\,.$$

Sledi, da je $u_{xx} = v_{xy}$ *in* $u_{yy} = -v_{xy}$ *in posledično* $u_{xx} + u_{yy} = 0$. *Podobno je* $v_{xx} = -u_{xy}$ *in* $v_{yy} = u_{xy}$ *in posledično* $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Ocenjevanje:

- u_x *in* v_y*: 2 točki.*
- u_y *in* v_x*: 2 točki.*
- $u_{xx} + u_{yy}$*: 2 točki.*
- $v_{xx} + v_{yy}$*: 2 točki.*
- *Rezultati: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $f(u,v)$ funkcija, za katero je $f_{uu} + f_{vv} = 0$. Definirajte sestavljeno funkcijo

$$F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))\,.$$

Izračunajte

$$F_{xx} + F_{yy}\,.$$

Rešitev: Računamo po pravilu za odvajanje sestavljenih funkcij.

$$F_x = f_u u_x + f_v v_x$$

in

$$F_{xx} = f_{uu}{u_x}^2 + 2f_{uv}u_x v_x + f_{vv}{v_x}^2 + f_u u_{xx} + f_v v_{xx}\,.$$

Podobno dobimo

$$F_{yy} = f_{uu}{u_y}^2 + 2f_{uv}u_y v_y + f_{vv}{v_y}^2 + f_u u_{yy} + f_v v_{yy}\,.$$

Seštejemo

$$\begin{aligned} F_{xx} + F_{yy} &= f_{uu}({u_x}^2 + {u_y}^2) + 2f_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + f_{vv}({v_x}^2 + {v_y}^2) + \\ &\quad + f_u(u_{xx} + u_{yy}) + f_v(v_{xx} + v_{yy}) \end{aligned}$$

Z upoštevanjem točke a. sledi

$${u_x}^2 + {u_y}^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 \qquad in \qquad u_x v_x + u_y v_y = 0\,.$$

ter

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0\,,$$

Sledi

$$F_{xx} + F_{yy} = (f_{uu} + f_{vv})({u_x}^2 + {u_y}^2) = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *F_{xx}: 3 točke.*
- *F_{yy}: 3 točke.*
- *Prvi vmesni izračun: 3 točke.*
- *Drugi vmesni izračun: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

2. (25) Naj bo funkcija $f(r)$ za $r > 0$ dvakrat zvezno odvedljiva. Za $x^2 + y^2 > 0$ definiramo funkcijo

$$u(x,y) = f(r) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

a. (15) Izračunajte $u_{xx}(x,y)$.

Rešitev: Označimo $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Parcialno odvajamo po pravilu za odvajanje sestavljenih funkcij. Dobimo

$$u_x(x,y) = f'(r) \cdot \frac{x}{r}.$$

Parcialno odvajamo še enkrat.

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,y) &= f''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} \\ &= f''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{y^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *u_x: 3 točke.*
- *Pravilo za produkt: 3 točke.*
- *Parcialni odvod prvega člena: 3 točke.*
- *Parcialni odvod drugega člena: 3 točke.*
- *Poenostavitev in reyultat: 3 točke.*

b. (10) Naj bo $f(r) = \log(r)$. Izračunajte

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y).$$

Rešitev: Uporabimo prvi del naloge in simetrijo. Sledi

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f''(r) + f'(r) \cdot \frac{1}{r}.$$

Upoštevamo še

$$f'(r) = \frac{1}{r} \qquad \textit{in} \qquad f''(r) = -\frac{1}{r^2}.$$

Vstavimo in sledi

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0.$$

Ocenjevanje:

- *Simetrija: 2 točki.*
- *Seštevanje: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Odvodi $f(r)$ 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Naj bo funkcija $g(x, y)$ dana z

$$g(x, y) = x^2 y\,.$$

a. (15) Naj bo funkcija $f(x, y)$ dana z

$$f(x, y) = x^2 + xy\,.$$

Poiščite možne ekstreme funkcije $f(x, y)$ pri pogoju $g(x, y) = 1$.

Rešitev: Po Lagrangu sestavimo funkcijo

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

in njena parcialna odvoda izenačimo z 0. *Dobimo enačbi*

$$\begin{array}{rcrcl} \frac{\partial F}{\partial x} & = & 2x + y - 2\lambda xy & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & x - \lambda x^2 & = & 0\,. \end{array}$$

Zaradi pogoja $x = 0$ *ne pride v poštev, zato v drugi enačbi pokrajšamo* x *in sledi* $\lambda x = 1$. *Vstavimo v prvo enačbo in dobimo*

$$2x + y - 2y = 0\,,$$

torej $y = 2x$. *Iz pogoja sledi* $2x^3 = 1$ *ali* $x = \sqrt[3]{1/2}$.

Ocenjevanje:

- *Lagrange: 3 točke.*
- *Parcialni odvodi: 3 točke.*
- *Krajšanje in urejanje: 3 točke.*
- *Uporaba robnega pogoja: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Naj bo funkcija $f(x, y)$ dana z

$$f(x, y) = ax^2 + bxy\,,$$

kjer sta a in b različni pozitivni števili. Poiščite možne ekstreme funkcije $f(x, y)$ pri pogoju $g(x, y) = 1$.

Rešitev: Po Lagrangu sestavimo funkcijo

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

in njena parcialna odvoda izenačimo z 0. *Dobimo enačbi*

$$\begin{array}{rcrcl} \frac{\partial F}{\partial x} & = & 2ax + by - 2\lambda xy & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & bx - \lambda x^2 & = & 0\,. \end{array}$$

Zaradi pogoja $x = 0$ *ne pride v poštev, zato v drugi enačbi pokrajšamo* x *in sledi* $\lambda x = b$. *Vstavimo v prv0 enačbo in dobimo*

$$2ax + by - 2by = 0\,,$$

torej $2ax = by$. *Iz pogoja sledi* $2ax^3/b = 1$ *ali* $x = \sqrt[3]{b/2a}$.

Ocenjevanje:

- *Lagrange: 2 točki.*
- *Parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Krajšanje in urejanje: 2 točki.*
- *Uporaba robnega pogoja: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (25) Funkcija $f\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ naj bo dana z

$$f(x,y) = x\log y - y\,.$$

a. (10) Pokažite, da v okolici U točke $x_0 = 2/\log 2$ obstaja funkcija $g\colon U\to\mathbb{R}$, taka da je $g(x_0)=2$ in $f(x,g(x))=0$ za $x\in U$.

Rešitev: V izreku o implicitni funkciji bo $x_0 = 2/\log 2$ in $y_0 = 2$. Preveriti moramo, da je $f(x_0,y_0)=0$ in

$$f_y(x_0,y_0) = \frac{x_0}{y_0} - 1 = \frac{1}{\log 2} - 1 \neq 0\,.$$

Po izreku o implicitni funkciji torej obstaja na neki okolici U točke x_0 funkcija $g(x)$ z želenimi lastnostmi.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje $f(x_0,y_0)=0$: 2 točki.*
- *Izračun prvega parcialnega odvoda: 2 točki.*
- *Preverjanje $f_y(x_0,y_0)\neq 0$: 2 točki.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 2 točke.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte $g''(x_0)$.

Rešitev: Identiteto $f(x,g(x))=0$ odvajamo dvakrat po x. Po prvem odvajanju dobimo

$$f_x + f_y\cdot g' = 0$$

po drugem pa

$$f_{xx} + f_{yx}\cdot g' + (f_{xy} + f_{yy}\cdot g')\cdot g' + f_y\cdot g'' = 0\,.$$

V vse dvojne parcialne odvode je potrebno vstaviti točko (x_0,y_0) in v odvod g točko x_0. Izračunamo

$$\begin{aligned} & g''(0) = \\ = \quad & -\frac{f_{xx}(x_0,y_0) + f_{xy}(x_0,y_0)g'(x_0) + (f_{xy}(x_0,y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)\cdot g'(x_0))\cdot g'(x_0)}{f_y(x_0,y_0)} \\ = \quad & \frac{2y_0\log y_0}{(x_0-y_0)^2} - \frac{y_0\log^2 y_0}{(x_0-y_0)^3}\,. \end{aligned}$$

Vstavimo x_0 in y_0 in dobimo

$$g''(x_0) = \frac{\log^3 2}{(\log 2 - 1)^2} - \frac{2\log^5 2}{4(\log 2 - 1)^3}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvi odvod identitete $f(x,g(x))=0$: 3 točke.*
- *Drugi odvod identitete: 3 točke.*
- *Vstavljanje v prve odvode: 3 točke.*
- *Vstavljanje v druge odvode: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*