FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

1. kolokvij

30. november 2011

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Definirajte funkciji

$$u(x,y) = (e^y + e^{-y})\sin x \qquad \text{in} \qquad v(x,y) = (e^y - e^{-y})\cos x\,.$$

a. (10) Izračunajte

$$u_{xx} + u_{yy} \qquad \text{in} \qquad v_{xx} + v_{yy}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$u_{xx} = -(e^y + e^{-y})\sin x \qquad in \qquad u_{yy} = (e^y + e^{-y})\sin x$$

torej je $u_{xx} + u_{yy} = 0$. *Podobno je*

$$v_{xx} = -(e^y - e^{-y})\cos x \qquad in \qquad v_{yy} = (e^y - e^{-y})\cos x\,,$$

torej je $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Ocenjevanje:

- u_x *in* v_y: *2 točki.*
- u_y *in* v_x: *2 točki.*
- $u_{xx} + u_{yy}$: *2 točki.*
- $v_{xx} + v_{yy}$: *2 točki.*
- *Rezultati: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $f(u,v)$ funkcija, za katero je $f_{uu} + f_{vv} = 0$. Definirajte sestavljeno funkcijo

$$F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))\,.$$

Izračunajte

$$F_{xx} + F_{yy}\,.$$

Rešitev: Računamo po pravilu za odvajanje sestavljenih funkcij.

$$F_x = f_u u_x + f_v v_x$$

in

$$F_{xx} = f_{uu}{u_x}^2 + 2f_{uv}u_x v_x + f_{vv}{v_x}^2 + f_u u_{xx} + f_v v_{xx}\,.$$

Podobno dobimo

$$F_{yy} = f_{uu}{u_y}^2 + 2f_{uv}u_y v_y + f_{vv}{v_y}^2 + f_u u_{yy} + f_v v_{yy}\,.$$

Seštejemo

$$\begin{aligned} F_{xx} + F_{yy} &= f_{uu}({u_x}^2 + {u_y}^2) + 2f_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + f_{vv}({v_x}^2 + {v_y}^2) \\ &\quad + f_u(u_{xx} + u_{yy}) + f_v(v_{xx} + v_{yy}) \end{aligned}$$

Z upoštevanjem točke a. sledi

$$u_x{}^2 + u_y{}^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 qquadin \qquad u_x v_x + u_y v_y = 0\,.$$

ter

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0\,,$$

Sledi

$$F_{xx} + F_{yy} = (f_{uu} + f_{vv})(u_x{}^2 + u_y{}^2) = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- F_{xx}: *3 točke.*
- F_{yy}: *3 točke.*
- *Prvi vmesni izračun: 3 točke.*
- *Drugi vmesni izračun: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

2. (25) Naj bo $f(u,v)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, za katero velja

$$\left(1+f_v^2\right) f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + \left(1+f_u^2\right) f_{vv} = 0\,.$$

a. (10) Definirajte sestavljeno funkcijo

$$F(x,y) = f\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

Izrazite F_{xx} in F_{yy} s parcialnimi odvodi funkcije $f(u,v)$.

Rešitev: Računamo po pravilu za odvajanje sestavljenih funkcij.

$$F_x = f_u \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + f_v \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

in

$$F_{xx} = f_{uu} \cdot \frac{1}{2} + f_{uv} \cdot \frac{1}{2} + f_{uv} \cdot \frac{1}{2} + f_{vv} \cdot \frac{1}{2}\,.$$

podobno dobimo

$$F_y = -f_u \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + f_v \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

in

$$F_{yy} = f_{uu} \cdot \frac{1}{2} - f_{uv}\frac{1}{2} - f_{uv} \cdot \frac{1}{2} + f_{vv}\frac{1}{2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo: 2 točki.*
- *F_x: 2 točki.*
- *F_{xx}: 2 točki.*
- *F_y: 2 točki.*
- *F_{yy}: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte

$$\left(1+F_y^2\right) F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + \left(1+F_x^2\right) F_{yy}\,.$$

Rešitev: Manjka še mešani odvod. Dobimo

$$F_{xy} = -f_{uu} \cdot \frac{1}{2} + f_{uv} \cdot \frac{1}{2} - f_{uv} \cdot \frac{1}{2} + f_{vv} \cdot \frac{1}{2} = -f_{uu} \cdot \frac{1}{2} + f_{vv} \cdot \frac{1}{2}\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
&\left(1+F_y^2\right) F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + \left(1+F_x^2\right) F_{yy} = \\
&= \left(1+\frac{1}{2}(-f_u+f_v)^2\right)\left(f_{uu}\cdot\frac{1}{2} + f_{uv} + f_{vv}\cdot\frac{1}{2}\right) - \\
&\quad -(f_u+f_v)(-f_u+f_v)\left(-f_{uu}\cdot\frac{1}{2} + f_{vv}\cdot\frac{1}{2}\right) + \\
&\quad + \left(1+\frac{1}{2}(f_u+f_v)^2\right)\left(f_{uu}\cdot\frac{1}{2} - f_{uv} + f_{vv}\cdot\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Izpostavimo po vrsti f_{uu}, f_{uv} *in* f_{vv} *in zberemo pripadajoče člene. Dobimo po vrsti*

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}(-f_u+f_v)^2-f_u^2+f_v^2+1+\frac{1}{2}(f_u+f_v)^2\right)=1+f_v^2\,,$$

$$1+\frac{1}{2}(-f_u+f_v)^2-1-\frac{1}{2}(f_u+f_v)^2=-2f_uf_v$$

in

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}(-f_u+f_v)^2+f_u^2-f_v^2+1+\frac{1}{2}(f_u+f_v)^2\right)=1+f_u^2\,.$$

Sledi

$$\left(1+F_y^2\right)F_{xx}-2F_xF_yF_{xy}+\left(1+F_x^2\right)F_{yy}=0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Mešani odvod: 3 točke.*
- *Izpostavljanje* f_{uu}*: 3 točke.*
- *Izpostavljanje* f_{uv}*: 3 točke.*
- *Izpostavljanje* f_{vv}*: 3 točke.*
- *Urejanje in rezultat: 3 točke.*

3. (25) Naj bo

$$g(x,y) = x^2y + \frac{x^3}{3}\,.$$

a. (10) Definirajte

$$f(x,y) = xy + \frac{\sqrt{2}x^2}{2}\,.$$

Poiščite x in y, za katera ima lahko funkcija $f(x,y)$ minimum pri dodatnem pogoju $g(x,y) = 1$.

Rešitev: Po Lagrangu sestavimo funkcijo

$$F(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

in njena parcialna odvoda izenačimo z 0*. Dobimo enačbi*

$$y + \sqrt{2}x - \lambda(2xy + x^2) = 0 \qquad \textit{in} \qquad x - \lambda x^2 = 0\,.$$

Ker mora biti $x \neq 0$ *zaradi pogoja, iz druge enačbe sledi* $\lambda x = 1$*. Vstavimo v prvo in dobimo*

$$y + \sqrt{2}x - 2y - x = 0\,.$$

Sledi $y = x(\sqrt{2} - 1)$*. Iz pogoja* $g(x,y) = 1$ *sledi*

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{3\sqrt{2} - 1}}.$$

Ocenjevanje:

- *Lagrange: 2 točki.*
- *Parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Krajšanje in urejanje: 2 točki.*
- *Uporaba robnega pogoja: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Naj bo

$$f(x,y) = xy + \frac{(\sqrt{2}+1)x^2}{2}\,.$$

Poiščite x in y, za katera ima lahko funkcija $f(x,y)$ minimum pri dodatnem pogoju $g(x,y) = 1$.

Rešitev: Po Lagrangu sestavimo funkcijo

$$F(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

in njena parcialna odvoda izenačimo z 0*. Dobimo enačbi*

$$y + (\sqrt{2}+1)x - \lambda(2xy + x^2) = 0 \qquad \textit{in} \qquad x - \lambda x^2 = 0\,.$$

Ker mora biti $x \neq 0$ zaradi pogoja, iz druge enačbe sledi $\lambda x = 1$. Vstavimo v prvo in dobimo

$$y + (\sqrt{2} + 1)x - 2y - x = 0\,.$$

Sledi $y = \sqrt{2}x$. Iz pogoja $g(x, y) = 1$ sledi

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{1 + 3\sqrt{2}}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Lagrange: 3 točke.*
- *Parcialni odvodi: 3 točke.*
- *Krajšanje in urejanje: 3 točke.*
- *Uporaba robnega pogoja: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Naj bo funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana z

$$f(x,y) = e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1\,.$$

a. (10) Pokažite, da za vsako rešitev enačbe $f(x_0, y_0) = 0$ obstaja na neki odprti množici U z $x_0 \in U$ funkcija $g\colon U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da velja $g(x_0) = y_0$ in $f(x, g(x)) = 0$ za $x \in U$.

Rešitev: Računamo

$$f_y(x_0, y_0) = e^y + 3y^2 > 0\,.$$

Ker je parcialni odvod po y povsod pozitiven in je (x_0, y_0) po predpostavki rešitev enačbe $f(x_0, y_0) = 0$, taka funkcija $g(x)$ obstaja po izreku o implicitni funkciji.

Ocenjevanje:

- *f_y: 2 točki.*
- *Sklep da je $f_y(x,y) > 0$: 2 točki.*
- *Kaj z $f(x_0, y_0) = 0$: 2 točki.*
- *Ugotovitev o predpostavkah: 2 točki.*
- *Sklep o obstoju: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $g(-1) = 0$ in $f(x, g(x)) = 0$ na okolici točke $x = -1$. Izračunajte $g''(-1)$.

Rešitev: Enakost $f(x, g(x)) = 0$ odvajamo dvakrat po x. Vedno privzemimo, da je argument v f ali njenih parcialnih odvodih enak $(x, g(x))$, argument v g pa x. Dobimo

$$f_x + f_y \cdot g' = 0$$

in

$$f_{xx} + f_{xy} \cdot g' + (f_{xy} + f_{yy} \cdot g') \cdot g' + f_y \cdot g'' = 0\,.$$

Vstavimo točko $(-1, 0)$ in računamo

$$f_{xx}(-1,0) = -4\,, \quad f_{xy}(-1,0) = 0 \quad \textit{in} \quad f_{yy}(-1,0) = 1\,.$$

Upoštevamo še, da je $g'(-1) = -1$ in računamo

$$-4 + 1 + g''(-1) = 0\,,$$

torej $g''(-1) = 3$.

Ocenjevanje:

- *Prvo odvajanje: 3 točke.*
- *Drugo odvajanje: 3 točke.*
- *Drugi parcialni odvodi: 3 točke.*
- *Vstavljanje: 3 točke.*
- *Razultat: 3 točke.*