FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

1. kolokvij

28. november 2012

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** [| | | | | | |]

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Naj bosta a in b dani števili.

a. (10) Naj bo

$$f(x,y) = \sin(ax - by)\,.$$

Izračunajte

$$f_{xx} - \frac{a^2}{b^2} f_{yy}\,.$$

Rešitev: Parcialni odvodi so

$$f_x = a\cos(ax - by) \qquad \textit{in} \qquad f_{xx} = -a^2\sin(ax - by)$$

ter

$$f_y = -b\cos(ax - by) \qquad \textit{in} \qquad f_{yy} = -b^2\sin(ax - by)\,.$$

Vstavimo in sledi

$$f_{xx} - \frac{a^2}{b^2} f_{yy} = \sin(ax - by)\left(-a^2 + \frac{a^2}{b^2}\cdot b^2\right) = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- f_x: *2 točki.*
- f_{xx}: *2 točki.*
- f_y: *2 točki.*
- f_{yy}: *2 točki.*
- *Vstavljanje in rezultat: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $f(u)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija ene spremenljivke. Definirajte

$$F(x,y) = f(ax - by)\,.$$

Izračunjate

$$F_{xx} - \frac{a^2}{b^2} F_{yy}\,.$$

Rešitev: Parcialni odvodi so

$$F_x = af'(ax - by) \qquad \textit{in} \qquad F_{xx} = a^2 f''(ax - by)$$

ter

$$F_y = -bf'(ax - by) \qquad \textit{in} \qquad F_{yy} = b^2 f''(ax - by)\,.$$

Vstavimo in dobimo

$$\begin{aligned} F_{xx} - \frac{a^2}{b^2} F_{yy} &= \\ &= a^2 f''(ax - by) - \frac{a^2}{b^2}\cdot b^2 \cdot f''(ax - by) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- f_x: *3 točke.*
- f_{xx}: *3 točke.*
- f_y: *3 točke.*
- f_{yy}: *3 točke.*
- *Vstavljanje in rezultat: 3 točke.*

2. (25) Naj bosta $f(u,v)$ in $g(u,v)$ dvakrat zvezno odvedljivi funkciji, za kateri velja

$$f_u = g_v \qquad \text{in} \qquad f_v = -g_u \,.$$

Definirajte funkciji

$$F(x,y) = f(x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3) \qquad \text{in} \qquad G(x,y) = g(x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)\,.$$

a. (10) Pokažite, da velja

$$F_x = G_y \qquad \text{in} \qquad F_y = -G_x \,.$$

Rešitev: Odvajamo po pravilih za odvajanje sestavljenih funkcij. Dobimo

$$F_x = (3x^2 - 3y^2)f_u + 6xyf_v \qquad \textit{in} \qquad F_y = -6xyf_u + (3x^2 - 3y^2)f_v$$

ter

$$G_x = (3x^2 - 3y^2)g_u + 6xyg_v \qquad \textit{in} \qquad G_y = -6xyg_u + (3x^2 - 3y^2)g_v \,.$$

Upoštevamo zveze med f_u, f_v, g_u in g_v in enakosti sledijo.

Ocenjevanje:

- F_x*: 2 točki.*
- F_y*: 2 točki.*
- G_x*: 2 točki.*
- G_y*: 2 točki.*
- *Enakosti: 2 točki.*

b. (15) Izrazite $F_{xx} + F_{yy}$ z $f_{uu} + f_{vv}$.

Rešitev: Ena možnost je, da opazimo

$$F_{xx} = G_{xy} \qquad \textit{in} \qquad F_{yy} = -G_{xy} \,.$$

Sledi, da je $F_{xx} + F_{yy} = 0$. Lahko pa odvajamo in dobimo

$$\begin{aligned}
F_{xx} &= \\
&= \big((3x^2 - 3y^2)f_u + 6xyf_v\big)_x \\
&= 6xf_u + (3x^2 - 3y^2)((3x^2 - 3y^2)f_{uu} + 6xyf_{uv}) + \\
&\qquad + 6yf_v + 6xy((3x^2 - 3y^2)f_{uv} + 6xyf_{vv}) \\
&= 6xf_u + 6yf_v + (3x^2 - 3y^2)^2 f_{uu} + 12xy(3x^2 - 3y^2)f_{uv} + (6xy)^2 f_{vv}\,.
\end{aligned}$$

Podobno dobimo

$$\begin{aligned}
F_{yy} &= \\
&= \big(-6xyf_u + (3x^2 - 3y^2)f_v\big)_y \\
&= -6xf_u - 6xy(-6xyf_{uu} + (3x^2 - 3y^2)f_{uv}) - \\
&\qquad - 6yf_v + (3x^2 - 3y^2)(-6xyf_{uv} + (3x^2 - 3y^2)f_{vv}) \\
&= -6xf_u - 6yf_v + (6xy)^2 f_{uu} - 12xy(3x^2 - 3y^2)f_{uv} + (3x^2 - 3y^2)^2 f_{vv}
\end{aligned}$$

Seštejemo in sledi

$$F_{xx} + F_{yy} = ((3x^2 - 3y^2)^2 + (6xy)^2)(f_{uu} + f_{vv})\,.$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo: 3 točke.*
- *Prva uporaba: 3 točke.*
- *Druga uporaba: 3 točke.*
- *Poenostavitev: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

3. (25) Naj bodo a, b in c dana števila, za katera velja $a > 0$ in $ab - c^2 > 0$. Funkcija $f\colon \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ naj bo dana z

$$f(x, y) = -a \log y - \frac{b - 2cx + ax^2}{2y^2}\,.$$

a. (10) Poiščite stacionarne točke funkcije f na njenem definicijskem območju.

Rešitev: Izračunamo parcialne odvode in jih izenačimo z 0. Dobimo enačbi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\tfrac{-2c+2ax}{2y^2} &&= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\tfrac{a}{y} + \tfrac{b-2cx+ax^2}{y^3} &&= 0 \end{aligned}$$

Iz prve enačbe sledi, da je $x = c/a$. Drugo enačbo pomnožimo z y^3, kar lahko, ker je vedno $y > 0$. Vstavimo $x = c/a$ in dobimo

$$-ay^2 + b - 2c^2/a + c^2/a = 0\,.$$

Sledi

$$y = \frac{\sqrt{ab - c^2}}{a}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvi parcialni odvod: 2 točki.*
- *Drugi parcialni odvod: 2 točki.*
- *Rešitev prve enačbe: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Rešitev druge enačbe: 2 točki.*

b. (15) Za stacionarne točke ugotovite, ali so lokalni minimumi ali lokalni maksimumi.

Rešitev: Izračunamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\tfrac{a}{y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} &= -\tfrac{2c-2ax}{y^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \tfrac{a}{y^2} - \tfrac{3(b-2cx+ax^2)}{y^4}\,. \end{aligned}$$

Vstavimo stacionarno točko iz a. in dobimo

$$Hf(c/a, \sqrt{ab - c^2}/a) = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{ab-c^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2a^3}{ab-c^2} \end{pmatrix}$$

Matrika je diagonalna, obe vrednosti na diagonali pa sta negativni. Stacionarna točka je lokalni maksimum.

Ocenjevanje:

- *Prvi dvojni odvod: 3 točke.*
- *Drugi dvojni odvod: 3 točke.*
- *Tretji dvojni odvod: 3 točke.*
- *Hessova matrika v stacionarni točki:32 točke.*
- *Sklep: 3 točki.*

4. (25) Naj bosta a in b dani pozitivni števili. Funkciji $f(x,y)$ in $g(x,y)$ naj bosta dani z

$$f(x,y) = x^2 y \qquad \text{in} \qquad g(x,y) = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2}\,.$$

Z Lagrangeovo metodo želimo poiskati možni minimum funkcije $f(x,y)$ za $x > 0$ in $y > 0$ pri pogoju $g(x,y) = 1$.

a. (15) Pokažite, da za točko (x,y), ki bi lahko bila minimum funkcije $f(x,y)$ pri pogoju $g(x,y) = 1$, velja

$$3x^2 y = -2\lambda\,.$$

Rešitev: Po Lagrangeu sestavimo funkcijo

$$F(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

in njena parcialna odvoda izenačimo z 0. *Dobimo*

$$\begin{array}{rcccl} F_{xx} & = & 2xy + \frac{2\lambda a^2}{x^3} & = & 0 \\ F_{yy} & = & x^2 + \frac{2\lambda b^2}{y^3} & = & 0\,. \end{array}$$

Prvo enačbo pomnožimo z x, *drugo z* y *in seštejemo. Dobimo*

$$3x^2 y + 2\lambda\left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2}\right) = 0\,.$$

Upoštevamo še $g(x,y) = 1$ *in sledi*

$$3x^2 y = -2\lambda\,.$$

Ocenjevanje:

- *Lagrange: 3 točke.*
- *Parcialni odvodi: 3 točke.*
- *Krajšanje in urejanje: 3 točke.*
- *Uporaba robnega pogoja: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Poiščite točko (x,y), v kateri bi lahko imela funkcija $f(x,y)$ minimum pri pogoju $g(x,y) = 1$.

Rešitev: Vstavimo $3x^2 y = -2\lambda$ *v prvo od enačb. Dobimo*

$$2xy - \frac{3a^2 x^2 y}{x^3} = 0\,.$$

Ker je $x > 0$ *in* $y > 0$, *lahko pokrajšamo in sledi*

$$2 - \frac{3a^2}{x^2} = 0\,,$$

torej $x = \sqrt{3/2}a$. *Sledi še* $y = \sqrt{3}b$.

Ocenjevanje:

- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Krajšanje: 2 točki.*
- *Preoblikovanje: 2 točki.*
- *a: 2 točki.*
- *y: 2 točki.*