FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

2. kolokvij

7. januar 2011

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Naj bo področje G v ravnini trikotnik, dan z

$$G = \{(x, y) \colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}\,.$$

a. (15) Izračunajte dvojni integral

$$\int_G \sqrt{\frac{y}{(1-x)(1-y)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Namig: Premislite, po kateri spremenljivki bi bilo bolje integrirati najprej.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\int_G \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(1-y)}}\,\mathrm{d}y\,\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_y^1 \\
&= 2\int_0^1 \frac{\sqrt{y(1-y)}}{\sqrt{(1-y)}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Izbira x ali y najprej: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Meje: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte dvojni integral

$$\int_G \frac{1}{\sqrt{y(1-x)(x-y)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Kot znano privzemite

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u)}} = \arcsin(2u-1)\,.$$

Rešitev: Računamo in po poti uvedemo novo spremenljivko $y = xu$.

$$
\begin{aligned}
\int_G \frac{1}{\sqrt{y(1-x)(x-y)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{1}{\sqrt{y(1-x)(x-y)}}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} \int_0^1 \frac{x\mathrm{d}u}{\sqrt{xu(x-xu)}} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u)}} \\
&= 2\cdot\pi \\
&= 2\pi\,.
\end{aligned}
$$

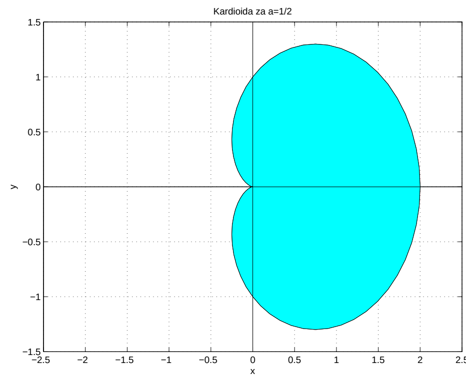
Ocenjevanje:

- *Izbira x ali y najprej: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Meje: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

2. (25) Krivulja *kardioida* je za pozitiven a dana z enačbo

$$\left(x^2+y^2-2ax\right)^2-4a^2\left(x^2+y^2\right)=0\,.$$

Primer karidoide za $a=1/2$ je na sliki 1. Označite področje, ki ga omejuje krivulja, z G.



Slika 1 Kardioida za $a=1/2$.

a. (15) Izračunajte ploščino področja G.

Rešitev: Uvedemo polarne koordinate in računamo.

$$\left(r^2-2ar\cos\phi\right)^2=4a^2r^2\,.$$

Pokrajšamo r^2 *in korenimo. Sledi*

$$r-2a\cos\phi=2a\qquad \textit{ali}\qquad r=2a(1+\cos\phi)\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}\int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{2a(1+\cos\phi)} r\,\mathrm{d}r\\ &= 2a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\phi)^2\,\mathrm{d}\phi\\ &= 2a^2\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\phi+\cos^2\phi\right)\,\mathrm{d}\phi\\ &= 2a^2(2\pi+\pi)\\ &= 6\pi a^2\,.\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Vstavljanje polarnih koordinat: 3 točke.*
- *Enačba kardioide v polarnih koordinateh: 3 točke.*
- *Meje: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*

– *Integriranje in rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte

$$\int_G x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \,.$$

Kot znano privzemite

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\phi = \pi \qquad \text{in} \qquad \int_0^{2\pi} \cos^4\phi = \frac{3\pi}{4} \,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\int_G x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{2a(1+\cos\phi)} r\cos\phi \, r \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi} \cos\phi \, \mathrm{d}\phi \cdot \frac{8a^3}{3}(1+\cos\phi)^3 \\
&= \frac{8a^3}{3} \int_0^{2\pi} \cos\phi(1+\cos\phi)^3 \\
&= \frac{8a^3}{3} \int_0^{2\pi} \cos\phi \left(1 + 3\cos\phi + 3\cos^2\phi + \cos^3\phi\right) \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{8a^3}{3} \cdot \left(3\pi + \frac{3\pi}{4}\right) \\
&= 10a^3 \,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Vstavljanje polarnih koordinat: 3 točke.*
- *Enačba kardioide v polarnih koordinateh: 3 točke.*
- *Meje: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Integriranje in rezultat: 3 točke.*

3. (25) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana v parametrični obliki z

$$\Phi(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, \sqrt{1-u^2}\right)$$

za $0 \le u \le 1$ in $0 \le v \le 2\pi$.

a. (10) Izračunajte enotski normalni vektor na ploskev $\mathcal{S}$ v točki $\Phi(\sqrt{3}/2, \pi/4) = (\sqrt{6}/4, \sqrt{6}/4, 1/2)$.

Rešitev: Računamo

$$\Phi_u = \left(\cos v, \sin v, -u/\sqrt{1-u^2}\right) \qquad \textit{in} \qquad \Phi_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)\ .$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = \left(\frac{u^2\cos u}{\sqrt{1-u^2}}, \frac{u^2\sin v}{\sqrt{1-u^2}}, u\right) = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,(u\cos v, u\sin v, \sqrt{1-u^2})\,.$$

Vstavimo točko in dobimo

$$\Phi_u \times \Phi_v = \sqrt{3}\left(\sqrt{6}/4, \sqrt{6}/4, 1/2\right)\ .$$

Dolžina tega vektorja je $\sqrt{3}$, *torej je enotski normalni vektor enak*

$$\mathbf{n} = \left(\sqrt{6}/4, \sqrt{6}/4, 1/2\right)\ .$$

Ocenjevanje:

- Φ_u*: 2 točki.*
- Φ_v*: 2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- $\mathbf{n}$*: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $\mathbf{F} = (y, -x, y^2 z)$. Izračunajte pretok tega vektorskega polja skozi ploskev $\mathcal{S}$. Kot znano privzemite, da je

$$\int u^3\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{15}\left(1-u^2\right)^{3/2}\left(3u^2+2\right)\ .$$

Rešitev: Označimo $Q = [0,1] \times [0, 2\pi]$. *V točki* $\Phi(u,v)$ *je*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}\cdot(\Phi_u \times \Phi_v) = \\
&\quad = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\left(u\sin v \cdot u\cos v - u\cos v \cdot u\sin v + u^2\sin^2 v\sqrt{1-u^2}\cdot\sqrt{1-u^2}\right) \\
&\quad = u^3\sqrt{1-u^2}\,\sin^2 v\,.
\end{aligned}$$

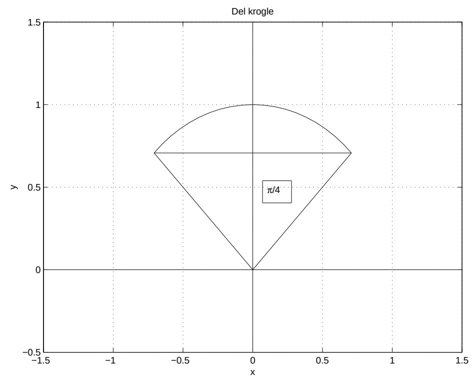
Računamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_Q \mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \int_Q u^3 \sqrt{1-u^2}\, \sin^2 v\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2 v\, \mathrm{d}v \int_0^1 u^3 \sqrt{1-u^2}\, \mathrm{d}u \\
&= \pi \cdot \frac{2}{15} \\
&= \frac{2\pi}{15}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 3 točke.*
- *Skalarni prodikt: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Naj bo G del krogle s polmerom R in središčem v izhodišču, za katerega je v krogelnih koordinatah $0 \leq \theta \leq \pi/4$. Telo od strani je na sliki 2. Naj bo vektorsko polje dano z $\mathbf{F} = (zy, -zx, z^2)$.



Slika 2 Del krogle G.

a. (15) Izračunajte pretok polja skozi površino G. Normalo na površino izberemo tako, da vedno kaže iz telesa.

Rešitev: Računamo po Gaussu z uvedbo krogelnih koordinat. Najprej izračunamo

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 2z\,.$$

Sledi

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_G \operatorname{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= 2\int_G z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^R r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/4} \cos\theta \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \cdot \frac{R^4}{4} \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{R^4}{4} \\
&= \frac{\pi R^4}{8}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 3 točke.*
- *Gauss: 3 točke.*
- *Krogelne koordinate: 3 točke.*
- *Meje in Fubini: 3 točke.*
- *Integriranje in rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte pretok $\mathbf{F}$ samo skozi plašč telesa G, torej skozi del, ki ne sovpada s površino krogle.

Rešitev: Plašč stožca lahko "zapremo" s krogom. Na krogu je vektorsko polje v smeri osi z konstantno enako z z-komponento enako $1/2$. Pretok skozi dodano ploskev je tako enak polovici ploščine, ki je $\pi/2$, torej $\pi/4$. Pretok skozi površino na glavo postavljenega stožca V izračunamo spet po Gaussu s pomočjo cilindričnih koordinat kot

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial V} \mathbf{F}\, d\mathbf{S} &= 2\int_V z\, dx\, dy\, dz \\
&= 2\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{2}/2} z\, dz \int_0^z r\, dr \\
&= 4\pi \cdot \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{z^3}{2}\, dz \\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

Iskani pretok je $-\pi/8$.

Ocenjevanje:

- *Zapiranje: 2 točki.*
- *Pretok skozi zaprti del: 2 točki.*
- *Gauss in cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje in Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje in rezultat: 2 točki.*