FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

2. kolokvij

4. januar 2012

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Naj bo $G = \{(x,y)\colon 0 \le x \le a, 0 \le y \le a - x\}$.

a. (10) Izračunajte

$$\int_G e^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\int_G e^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x \int_0^{a-x} e^{-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x\,\left(-e^{-y}\right)\Big|_0^{a-x} \\
&= \int_0^a e^{-x}\left(1 - e^{-(a-x)}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left(-e^{-x} - e^{-a}\right)\Big|_0^a \\
&= 1 - e^{-a} - ae^{-a}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prevedba na dvakratni integral: 2 točki.*
- *ϕ in ψ: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Zunanji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte

$$\int_G xye^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\int_G xye^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^a xe^{-x}\,\mathrm{d}x \int_0^{a-x} ye^{-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x\,\left(-ye^{-y} - e^{-y}\right)\Big|_0^{a-x} \\
&= \int_0^a e^{-x}\left(1 - (a-x)e^{-(a-x)} - e^{-(a-x)}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \left(e^{-x} - (a-x)e^{-a} - e^{-a}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - e^{-a} - ae^{-a} - \frac{a^2}{2}e^{-a}\,.
\end{aligned}$$

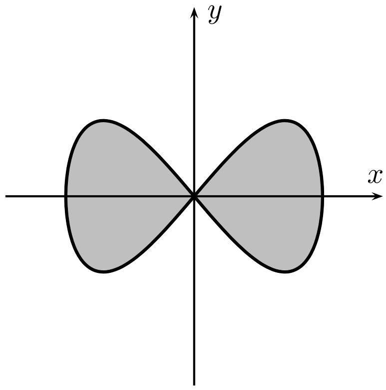
Ocenjevanje:

- *Prevedba na dvakratni integral: 3 točke.*
- ϕ *in* ψ*: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Zunanji integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

2. (25) Lemniskata je dana z enačbo

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$$

za $a > 0$. Krivulja je na spodnji sliki.



a. (15) Naj bo G osenčeno območje na zgornji sliki. Izračunajte

$$\int_G \sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Rešitev: Zaradi simetrije je dovolj izračunati integral po desnem "ušesu" lemniskate. V polarnih koordinatah je področje oblike

$$H = \{(r,\phi)\colon -\pi/4 \le \phi \le \pi/4, 0 \le r \le a\sqrt{2\cos 2\phi}\}\,.$$

To dobimo z vstavljanjem $x = r\cos\phi$ in $y = r\sin\phi$ v enačbo za lemniskato. Dvojni integral preide v

$$\begin{aligned}
\int_G \sqrt{2a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_H \sqrt{2a^2-r^2}\,r\,dr\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\phi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\phi}} r\sqrt{2a^2-r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\phi \frac{\sqrt{2}a^3}{3}(2-2(1-\cos 2\phi)^{3/2}) \\
&= \frac{\sqrt{2}a^3}{3}(\pi - 2^{5/2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\sin^3\phi|\,\mathrm{d}\phi) \\
&= \frac{\sqrt{2}a^3}{3}(\pi - 2^{7/2}\int_{\sqrt{2}/2}^{1}(1-u^2)\mathrm{d}u) \\
&= \frac{a^3}{9}\left(-32+20\sqrt{2}+3\sqrt{2}\pi\right)\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Transformacija področja: 3 točke.*
- *Jacobian: 3 točke.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 3 točke.*
- *Rezultat: 6 točk.*

b. (10) Izračunajte

$$\int_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}}\,.$$

Rešitev: Uvedemo polarne koordinate in dobimo podobno kot v a.

$$\begin{aligned}
\int_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}} &= \int_H \frac{r}{\sqrt{2a^2 - r^2}}\,dr\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\phi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\phi}} \frac{r}{\sqrt{2a^2 - r^2}}\,\mathrm{d}r \\
&= \sqrt{2}\,a \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\phi\,(1 - |\sin\phi|) \\
&= \sqrt{2}\,a\,(-4 + 2\sqrt{2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}})\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Polarne koordinate: 2 točki.*
- *Transformacija področja: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Potencialno energijo električnega polja $\mathbf{E}$ v delu prostora $G \subset \mathbb{R}^3$ izračunamo po formuli

$$E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \int_G E^2(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kjer je $E(x, y, z)$ jakost električnega polja v točki (x, y, z), ϵ_0 pa je dielektrična konstanta.

a. (15) Naboj q v izhodišču generira električno polje z jakostjo

$$E(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)}\,.$$

Izračunajte E_p za kroglo z izhodiščem v točki $(0, 0, 2)$ in polmerom $R = 1$. Kot znano privzemite, da je

$$\int_0^1 \frac{r^2\,\mathrm{d}r}{(4 - r^2)^2} = \frac{4 - 3\log(3)}{24}\,.$$

Namig: Izhodišče koordinatnega sistema premaknite v točko $(0, 0, 2)$.

Rešitev: Premaknimo izhodišče koordinatnega sistema v $(0, 0, 2)$ *in uvedimo krogelne koordinate. Izračunati moramo integral*

$$\frac{\epsilon_0}{2} \cdot \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \int_K \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + (z + 2)^2\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

S krogelnimi koordinatami integral preide v

$$\begin{aligned}
&\frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{r^2\,\mathrm{d}r}{(r^2 + 4 + 4r\cos\theta)^2} \\
&= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{(r^2 + 4 + 4r\cos\theta)^2} \\
&= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_0^1 \mathrm{d}r \left[\frac{1}{4r(r^2 + 4 + 4r\cos\theta)}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{r^2\,\mathrm{d}r}{(4 - r^2)^2} \\
&= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{4 - 3\log(3)}{24}\right).
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Translacija koordinatnega sistema: 3 točke.*
- *Krogelne koordinate: 3 točke.*
- *Prvi integral: 3 točke.*
- *Drugi integrael: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte še potencialno energijo polja zunaj neskončnega valja z osjo vzporedno osi z in polmerom $R = 1$.

Rešitev: Tokrat uvedemo cilindrične koordinate. Računamo

$$
\begin{aligned}
E_p &= \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_1^{\infty} \frac{r \,\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^2} \\
&= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \left[-\frac{1}{2(r^2+z^2)} \Big|_1^{\infty} \right] \\
&= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)} \\
&= \frac{q^2}{16\epsilon_0}\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Zunanji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (25) Naj bo V valj, katerega osnovna ploskev leži v xy ravnini in ima središče v izhodišču koordinatnega sistema. Polmer osnovne ploskve naj bo R, višina valja pa h. V matematičnih oznakah je

$$V = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\} .$$

a. (15) Izračunajte

$$\int_V \frac{z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} .$$

Rešitev: Uvedemo cilindrične koordinate in računamo

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^h z \, \mathrm{d}z \int_0^R \frac{r \, \mathrm{d}r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \\
&= 2\pi \cdot \int_0^h z \, \mathrm{d}z \left(-\frac{2}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \Bigg|_0^R \\
&= 2\pi \cdot \int_0^h z \left(\frac{2}{z} - \frac{2}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \\
&= 4\pi \int_0^h \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \mathrm{d}z \\
&= 4\pi \left(z - \sqrt{R^2 + z^2} \right) \Bigg|_0^h \\
&= 4\pi \left(R + h - \sqrt{R^2 + h^2} \right) .
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 3 točke.*
- *Meje: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte

$$\int_V \frac{z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$

Kot znano upoštevajte

$$\int z^2 \sqrt{R^2 + z^2} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{8} \left(z\sqrt{R^2 + z^2} \left(R^2 + 2z^2 \right) - R^4 \log \left(z + \sqrt{R^2 + z^2} \right) \right) .$$

Rešitev: Uvedemo cilindrične koordinate in računamo

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^h z^2\,\mathrm{d}z \int_0^R \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+z^2}} \\
&= 2\pi \cdot \int_0^h z^2 \left(\sqrt{R^2+z^2} - R\right) \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \cdot \frac{R^3}{16} \left(2R\log(R) - 2R\log\left(R+\sqrt{2}R\right) + 6\sqrt{2}R\right) .
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*