FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

2. kolokvij

4. januar 2012

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Naj bo $G = \{(x,y)\colon 0 \le x \le a, 0 \le y \le a - x\}$.

a. (10) Izračunajte

$$\int_G e^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\int_G e^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x \int_0^{a-x} e^{-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x\,\left(-e^{-y}\right)\Big|_0^{a-x} \\
&= \int_0^a e^{-x}\left(1 - e^{a-x}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left(-e^{-x} - e^{-a}\right)\Big|_0^a \\
&= 1 - e^{-a} - ae^{-a}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prevedba na dvakratni integral: 2 točki.*
- *ϕ in ψ: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Zunanji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte

$$\int_G xye^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\int_G xye^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^a xe^{-x}\,\mathrm{d}x \int_0^{a-x} ye^{-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x\,\left(-ye^{-y} - e^{-y}\right)\Big|_0^{a-x} \\
&= \int_0^a e^{-x}\left(1 - (a-x)e^{-(a-x)} - e^{-(a-x)}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \left(e^{-x} - (a-x)e^{-a} - e^{-a}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - e^{-a} - ae^{-a} - \frac{a^2}{2}e^{-a}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prevedba na dvakratni integral: 3 točke.*
- ϕ *in* ψ*: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Zunanji integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

2. (25) Območje G naj bo krog dan s predpisom

$$G = \{(x,y)\colon (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\}\,.$$

za $a \geq 0$.

a. (15) Z uvedbo polarnih koordinat izračunajte

$$\int_G x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Kot znano upoštevajte, da je

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6\phi \,\mathrm{d}\phi = \frac{5\pi}{16}\,.$$

Rešitev: Območje G v polarnih koordinatah opišemo kot

$$H = \{(r,\phi)\colon -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2a\cos\phi\}\,.$$

Dobimo

$$\begin{aligned}
\int_G x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_H r^2\cos^2\phi\, r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\phi \,\mathrm{d}\phi \int_0^{2a\cos\phi} r^3 \,\mathrm{d}r \\
&= 4a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\phi\, \cos^4\phi \,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{5\pi}{4}a^4\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s polarnimi koordinatami: 3 točke.*
- *Transformacija področja: 3 točke.*
- *Jacobian: 3 točke.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_G \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Rešitev: Integriramo nenegativno funkcijo, zato je vseeno, kako napihujemo področja, ki bodo zajela vse področje. Uvedemo polarne koordinate in dobimo podobno kot v a.

$$
\begin{aligned}
\int_G \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_H \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\cos\phi}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos\phi}}\,\mathrm{d}\phi \int_0^{2a\cos\phi} \sqrt{r}\,\mathrm{d}r \\
&= 4\frac{(2a)^{3/2}}{3}\int_0^{\pi/2} \cos\phi\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{8\sqrt{2}a^{3/2}}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev, zakaj izlimitirani integral dobro definiran: 2 točki.*
- *Transformacija področja: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Predpostavite, da je zemlja okrogla in ima masno gostoto $\rho(x,y,z)$, ki je odvisna le od oddaljenosti od središča, torej

$$\rho(x,y,z) = \rho(r) = \rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,.$$

a. (10) Naj bo polmer zemlje enak R. Označite $c = \int_0^R r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r$. Pokažite, da je masa m_z zemlje enaka $4\pi c$.

Rešitev: Uvedemo krogelne koordinate. Dobimo

$$\begin{aligned} m_z &= \int_{K_R} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^R \rho(r)\,r^2\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\cdot 2\cdot c \\ &= 4\pi c\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Integral v kartezijskih koordinatah: 2 točki.*
- *Ideja s krogelnimi koordinatami: 2 točki.*
- *Uvedba novih spremenljivk: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Sila, ki deluje na masno točko z maso m na višini h nad površjem zemlje, je enaka

$$F = mk\int_{K_R} \frac{(R+h-z)\,\rho(x,y,z)}{(x^2+y^2+(R+h-z)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Pokažite, da še vedno velja Newtonov sklep: sila na masno točko je takšna, kot da bi celotno maso zemlje strnili v središču. Kot znano privzemite, kar smo izračunali na predavanjih, torej

$$\int_0^{\pi} \frac{(R+h-r\cos\theta)\sin\theta}{(r^2+(R+h)^2-2r(R+h)\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{(R+h)^2}\,.$$

Rešitev: V zgornji integral uvedemo krogelne koordinate. Računamo

$$\begin{aligned} F &= \int_{K_R} \frac{(R+h-z)\,\rho(x,y,z)}{(x^2+y^2+(R+h-z)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^R r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\frac{(R+h-r\cos\theta)\sin\theta}{(r^2+(R+h)^2-2r(R+h)\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta\,. \end{aligned}$$

Izračunajmo notranji integral. Uvedimo najprej novo spremenljivko $\cos\theta = u$, *potem pa še* $t = r^2 + (R+h)^2 - 2r(R+h)u$. *Dobimo*

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{(R+h-r\cos\theta)\sin\theta}{(r^2+(R+h)^2-2r(R+h)\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-1}^1 \frac{R+h-ru}{(r^2+(R+h)^2-2r(R+h)u)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2r(R+h)^2}\int_{(R+h-r)^2}^{(R+h+r)^2} \frac{(R+h)^2-r^2+t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2r(R+h)^2}\left(-2((R+h)^2-r^2)t^{-1/2}\Big|_{(R+h-r)^2}^{(R+h+r)^2} + 2t^{1/2}\Big|_{(R+h-r)^2}^{(R+h+r)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2r(R+h)^2}\big(4r+4r\big) \\
&= \frac{2}{(R+h)^2}\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$F = km\cdot 2\pi\cdot \int_0^R r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r\cdot\frac{2}{(R+h)^2}$$

ali

$$F = \frac{kmm_z}{(R+h)^2}\,.$$

Newtonov sklep velja.

Ocenjevanje:

- *Krogelne koordinate: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Per partes: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Sklep: 3 točke.*

4. (25) Telo G naj bo oblike valjastega silosa s polmerom R, višino h valjastega dela in streho v obliki pokončnega stožca z naklonom $\pi/4$. V matematičnih oznakah je

$$G = \left\{(x,y,z)\colon x^2+y^2 \le R^2, 0 \le z \le h + R - \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

a. (10) Izračunajte

$$\int_G z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,dz\,.$$

Rešitev: Uvedemo cilindrične koordinate in računamo

$$\begin{aligned}
\int_G z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^R r\,\mathrm{d}r\int_0^{h+R-r} z\,\mathrm{d}z \\
&= \pi\int_0^R r\,(h+R-r)^2\,\mathrm{d}r \\
&= \pi\left(\frac{(h+R)^2R^2}{2} - \frac{2(h+R)R^3}{3} + \frac{R^4}{4}\right).
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte

$$\int_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,dz\,.$$

Rešitev: Uvedemo cilindrične koordinate in računamo

$$\begin{aligned}
\int_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{h+R-r}\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\int_0^R r^3\,(h+R-r)\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left(\frac{(h+R)R^4}{4} - \frac{R^5}{5}\right).
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 3 točke.*
- *Meje: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*