FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

2. kolokvij

9. januar 2013

Ime in priimek: ______________________________ **Vpisna št.:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Naj bo funkcija $f(x,y)$ dana z

$$f(x,y) = e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1\,.$$

a. (10) Pokažite, da za vsako rešitev enačbe $f(x_0,y_0) = 0$ obstaja na neki odprti množici U z $x_0 \in U$ funkcija $g\colon U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da velja $g(x_0) = y_0$ in $f(x, g(x)) = 0$ za $x \in U$.

Rešitev: Računamo

$$f_y(x_0,y_0) = e^y + 3y^2 > 0\,.$$

Ker je parcialni odvod po y povsod pozitiven in je (x_0,y_0) po predpostavki rešitev enačbe $f(x_0,y_0) = 0$, taka funkcija $g(x)$ obstaja po izreku o implicitni funkciji.

Ocenjevanje:

- *f_y: 2 točki.*
- *Sklep da je $f_y(x,y) > 0$: 2 točki.*
- *Kaj z $f(x_0,y_0) = 0$: 2 točki.*
- *Ugotovitev o predpostavkah: 2 točki.*
- *Sklep o obstoju: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $g(-1) = 0$ in $f(x, g(x)) = 0$ na okolici točke $x = -1$. Izračunajte $g''(-1)$.

Rešitev: Enakost $f(x, g(x)) = 0$ odvajamo dvakrat po x. Vedno privzemimo, da je argument v f ali njenih parcialnih odvodih enak $(x, g(x))$, argument v g pa x. Dobimo

$$f_x + f_y \cdot g' = 0$$

in

$$f_{xx} + f_{xy} \cdot g' + (f_{xy} + f_{yy} \cdot g') \cdot g' + f_y \cdot g'' = 0\,.$$

Vstavimo točko $(-1,0)$ in računamo

$$f_{xx}(-1,0) = -4\,, \quad f_{xy}(-1,0) = 0 \quad \textit{in} \quad f_{yy}(-1,0) = 1\,.$$

Upoštevamo še, da je $g'(-1) = -1$ in računamo

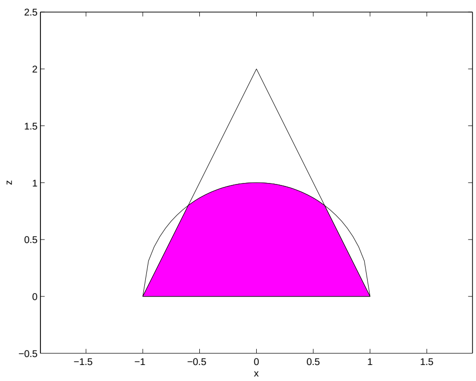
$$-4 + 1 + g''(-1) = 0\,,$$

torej $g''(-1) = 3$.

Ocenjevanje:

- *Prvo odvajanje: 3 točke.*
- *Drugo odvajanje: 3 točke.*
- *Drugi parcialni odvodi: 3 točke.*
- *Vstavljanje: 3 točke.*
- *Razultat: 3 točke.*

2. (25) Telo G naj nastane kot presek krogle s polmerom R in središčem v izhodišču in pokončnega stožca z višino $2R$, polmerom osnovne ploskve R in osjo, ki sovpada z osjo z. Osnovna ploskev stožca naj bo v xy ravnini. Telo od strani je na sliki 1.



Sl. 1 Telo G.

a. (15) Izračunajte prostornino telesa med grafoma funkcij

$$f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \qquad \text{in} \qquad g(x,y) = 2R - 2\sqrt{x^2+y^2}$$

na krogu s polmerom

$$R_1 = \frac{3R}{5}$$

in središčem v izhodišču koordinatnega sistema.

Rešitev: Z uvedbo polarnih koordinat računamo

$$\begin{aligned}
V &= \int_K (g(x,y) - f(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{R_1} \left(2R - 2r - \sqrt{R^2 - r^2}\right) r\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \left(RR_1^2 - \frac{2R_1^3}{3} + \frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{3/2}\Big|_0^{R_1} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{9R^3}{25} - \frac{54R^3}{375} + \frac{64R^3}{375} - \frac{R^3}{3} \right) \\
&= \frac{8\pi R^3}{75}.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Polarne koordinate: 3 točke.*
- *Meje: 3 točke.*
- *Jacobian: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*

– *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte prostornino telesa G.

Namig: Laže je izračunati prostornino tistega dela stožca, ki ni v krogli. Pomislite, kateri ploskvi omejujeta to telo.

Rešitev: Prostornina celotnega stožca je $2\pi R^3/3$. Del, ki štrli iz krogle, pa je telo med grafoma funkcij $f(x, y)$ in $g(x, y)$ na krogu s polmerom R_1, kot lahko preverimo. Prostornino tega telesa odštejemo od prostornine stožca in sledi

$$V = \frac{2\pi R^3}{3} - \frac{8\pi R^3}{75} = \frac{14\pi R^3}{25}\,.$$

Ocenjevanje:

– *Prostornina stožca: 2 točki.*
– *Plašştožca kot funkcija: 2 točki.*
– *Površina krogle kot graf funkcije: 2 točki.*
– *R_1: 2 točki.*
– *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Predpostavite, da je zemlja okrogla in ima masno gostoto $\rho(x,y,z)$, ki je odvisna le od oddaljenosti od središča, torej

$$\rho(x,y,z) = \rho(r) = \rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,.$$

a. (10) Naj bo polmer zemlje enak R. Označite $c = \int_0^R r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r$. Pokažite, da je masa m_z zemlje enaka $4\pi c$.

Rešitev: Uvedemo krogelne koordinate. Dobimo

$$\begin{aligned} m_z &= \int_{K_R} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^R \rho(r)\,r^2\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\cdot 2\cdot c \\ &= 4\pi c\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Integral v kartezijskih koordinatah: 2 točki.*
- *Ideja s krogelnimi koordinatami: 2 točki.*
- *Uvedba novih spremenljivk: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Sila, ki deluje na masno točko z maso m na višini h nad površjem zemlje, je enaka

$$F = mk \int_{K_R} \frac{(R+h-z)\,\rho(x,y,z)}{(x^2+y^2+(R+h-z)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Pokažite, da še vedno velja Newtonov sklep: sila na masno točko je takšna, kot da bi celotno maso zemlje strnili v središču. Kot znano privzemite, kar smo izračunali na predavanjih, torej

$$\int_0^{\pi} \frac{(R+h-r\cos\theta)\sin\theta}{(r^2+(R+h)^2-2r(R+h)\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{(R+h)^2}\,.$$

Rešitev: V zgornji integral uvedemo krogelne koordinate. Računamo

$$\begin{aligned} F &= mk \int_{K_R} \frac{(R+h-z)\,\rho(x,y,z)}{(x^2+y^2+(R+h-z)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= mk \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \frac{(R+h-r\cos\theta)\sin\theta}{(r^2+(R+h)^2-2r(R+h)\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta\,. \end{aligned}$$

Izračunajmo notranji integral. Uvedimo najprej novo spremenljivko $\cos\theta = u$, *potem pa še* $t = r^2 + (R+h)^2 - 2r(R+h)u$. *Dobimo*

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \frac{(R+h-r\cos\theta)\sin\theta}{(r^2+(R+h)^2-2r(R+h)\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{R+h-ru}{(r^2+(R+h)^2-2r(R+h)u)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2r(R+h)^2}\int_{(R+h-r)^2}^{(R+h+r)^2} \frac{(R+h)^2-r^2+t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2r(R+h)^2}\Big(-2((R+h)^2-r^2)t^{-1/2}\Big|_{(R+h-r)^2}^{(R+h+r)^2} + 2t^{1/2}\Big|_{(R+h-r)^2}^{(R+h+r)^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2r(R+h)^2}\big(4r+4r\big) \\
&= \frac{2}{(R+h)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Sledi

$$F = km\cdot 2\pi\cdot\int_0^R r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r\cdot\frac{2}{(R+h)^2}$$

ali

$$F = \frac{kmm_z}{(R+h)^2}\,.$$

Newtonov sklep velja.

Ocenjevanje:

- *Krogelne koordinate: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Per partes: 3 točke.*
- *Notranji integral:32 točke.*
- *Sklep: 3 točke.*

4. (25) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana z enačbo

$$\Phi(u,v)=\left(u\sqrt{1-v^2},uv,\sqrt{1-u^2}\right)$$

za $0\le u\le 1$ in $0\le v\le 1$.

a. (15) Izračunajte enotsko normalo na ploskev v točki $T(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$.

Rešitev: Računamo

$$\Phi_u=\left(\sqrt{1-v^2},v,-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

in

$$\Phi_v=\left(-\frac{uv}{\sqrt{1-v^2}},u,0\right).$$

Sledi

$$\Phi_u\times\Phi_v=\frac{u}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}\left(u\sqrt{1-v^2},uv,\sqrt{1-u^2}\right).$$

Iz zadnje komponente razberemo, da je

$$\sqrt{1-u^2}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

torej $u=\sqrt{2/3}$. *Iz tega sledi* $v=1/\sqrt{2}$. *Vstavimo in dobimo*

$$\mathbf{n}=\left(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}\right).$$

Ocenjevanje:

- Φ_u: *3 točke.*
- Φ_v: *3 točke.*
- *Vektorski produkt: 3 točke,*
- *Točka: 3 točke.*
- *Normalni vektor: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte površino ploskve $\mathcal{S}$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
P &= \int_{[0,1]^2} |\Phi_u\times\ \Phi_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= \int_{[0,1]^2} \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= \int_0^1 \frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}}\\
&= -\sqrt{1-u^2}\big|_0^1\cdot\arcsin v\big|_0^1\\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Množenje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*