FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

2. kolokvij

9. januar 2013

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

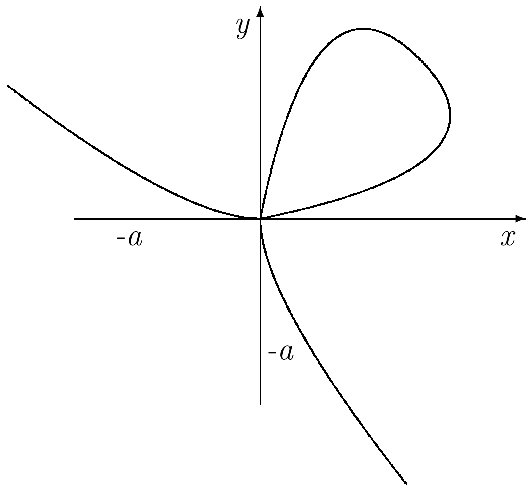
Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Descartesov list je za dano število $a > 0$ podan z implicitno enačbo

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0\,.$$

Potek te krivulje je na spodnji sliki.



Sl. 1 Descartesov list.

a. (15) Izračunajte naklon tangente na Descartesov list v točki $(-2\sqrt[3]{2}\,a, \sqrt[3]{4}\,a)$.

Rešitev: Označimo $x_0 = -2\sqrt[3]{2}\,a$ *in* $y_0 = \sqrt[3]{4}\,a$*. Označimo še*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy\,.$$

Najprej preverimo, da je $f(x_0, y_0) = 0$*. Izračunamo*

$$f_x(x, y) = 3(x^2 - ay) \qquad in \qquad f_y(x, y) = 3(y^2 - ax)\,.$$

Ker je $f_y(x_0, y_0) = 12a^2\sqrt[3]{2} \neq 0$*, obstaja v okolici točke* x_0 *implicitna funkcija* $g(x)$*, taka da je* $f(x, g(x)) = 0$*. Naklon tangente je potem* $g'(x_0)$*. Potrebujemo še* $f_x(x_0, y_0) = 9a^2\sqrt[3]{4}$ *in dobimo*

$$g'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Preverjanje* $f(x_0, y_0) = 0$*: 3 točke.*
- *Preverjanje* $f_y(x_0, y_0) \neq 0$*: 3 točke.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 3 točke.*
- *Formula za* $g'(x_0)$*: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) V kateri točki v prvem kvadrantu (izhodišča ne štejemo) je tangenta na Descartesov list vzporedna y-osi? Vašo trditev utemeljite z izrekom o implicitni funkciji.

Rešitev: Označimo točko, ki jo iščemo z (x, y). *Po izreku o implicitni funkciji bo pri pogoju* $f_x(x, y) \neq 0$ *obstajala v okolici* y *funkcija* $h(y)$, *da bo* $f(h(y), y) = 0$. *Naklon tangente bo*

$$h'(y) = -\frac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)} = 0\,,$$

torej mora biti $f_y(x, y) = 3(y^2 - ax) = 0$. *Sledi* $y^2 = ax$. *Točka mora ležati tudi na listu, kar pomeni da mora zadoščati enačbi* $f(x, y) = 0$. *To nam da*

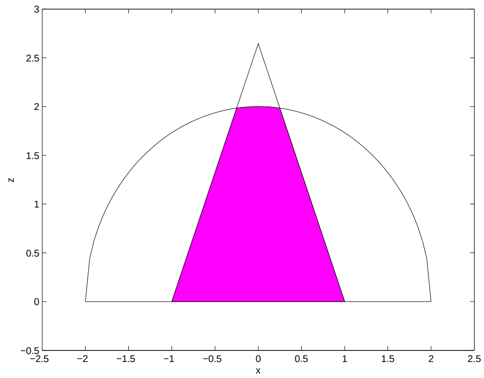
$$\frac{y^6}{a^3} + y^3 - 3a\frac{y^3}{a} = 0\,.$$

Pokrajšamo y^3 *in dobimo* $y = a\sqrt[3]{2}$ *in* $x = a\sqrt[3]{4}$. *Zlahka se še prepričamo, da je* $f_x(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}) \neq 0$.

Ocenjevanje:

- *Ideja, da mora biti* $f_y(x, y) = 0$*: 4 točke.*
- *Preverjanje, da je* $f(x, y) = 0$ *za najdeno točko: 2 točki.*
- *Preverjanje, da je* $f_x(x, y) \neq 0$*: 2 točki.*
- *Utemeljitev s izrekom o implicitni funkciji, da je tangenta navpična: 2 točki.*

2. (25) Telo G naj nastane kot presek krogle s polmerom $R = 2$ in središčem v izhodišču in pokončnega stožca z višino $h = \sqrt{7}$, polmerom osnovne ploskve $R = 1$ in osjo, ki sovpada z osjo z. Osnovna ploskev stožca naj bo v xy ravnini. Telo od strani je na sliki 1.



Sl. 1 Telo G.

a. (15) Izračunajte prostornino telesa med grafoma funkcij

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \qquad \text{in} \qquad g(x,y) = \sqrt{7} - \sqrt{7(x^2+y^2)}$$

na krogu s polmerom

$$R_1 = \frac{1}{4}$$

in središčem v izhodišču koordinatnega sistema.

Rešitev: Z uvedbo polarnih koordinat računamo

$$\begin{aligned} V &= \int_K (g(x,y) - f(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{R_1} \left(\sqrt{7}(1-r) - \sqrt{4-r^2}\right) r\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\left(\frac{5\sqrt{7}}{192} - \frac{8}{3} + \frac{63\sqrt{7}}{64}\right) \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{97\sqrt{7}}{96} - \frac{8}{3}\right). \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Polarne koordinate: 3 točke.*
- *Meje: 3 točke.*
- *Jacobian: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte prostornino telesa G.

Namig: Laže je izračunati prostornino tistega dela stožca, ki ni v krogli. Pomislite, kateri ploskvi omejujeta to telo.

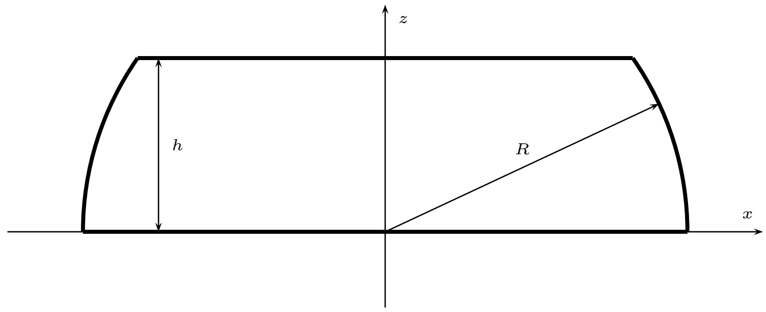
Rešitev: Prostornina celotnega stožca je $\pi\sqrt{7}/3$. Del, ki štrli iz krogle, pa je telo med grafoma funkcij $f(x,y)$ in $g(x,y)$ na krogu s polmerom R_1, kot lahko preverimo. Prostornino tega telesa odštejemo od prostornine stožca in sledi

$$V = \frac{\pi\sqrt{7}}{3} + \frac{16\pi}{3} - \frac{97\pi\sqrt{7}}{48}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prostornina stožca: 2 točki.*
- *Plašştožca kot funkcija: 2 točki.*
- *Površina krogle kot graf funkcije: 2 točki.*
- *R_1: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Na sliki 2 je del krogle s polmerom R in debeline h, kjer je $h < R$.



Sl. 2 Del krogle med višinama $v = 0$ in $v = h$.

a. (10) Izračunajte površino ukrivljenega dela površine telesa. Ploskev je graf funkcije $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ na področju $G = \{(x,y)\colon R^2 - h^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$, površino pa izračunamo po formuli

$$P = \int_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Rešitev: Najprej moramo dano ploskev parametrizirati. Morda najlažja pot je ta, da smatramo ploskev kot graf funkcije $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ *na območju* $G = \{(x,y)\colon R^2 - h^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$. *Po formuli za površino grafa funkcije je*

$$\begin{aligned} P &= \int_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \int_G \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \int_G \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\sqrt{R^2-h^2}}^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi R(-\sqrt{R^2 - r^2})\Big|_{\sqrt{R^2-h^2}}^R \\ &= 2\pi R h \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Parametrizacija: 2 točki.*
- *Formula za površino: 2 točki.*
- *Polarne koordinate: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte masni vztrajnostni moment dela krogle okrog osi z, torej integral

$$I_{zz} = \int_K (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Namig: Po uvedbi pravih koordinat najprej integrirajte po r.

Rešitev: Najbolj ugodno je vpeljati cilindrične koordinate. Računamo

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \int_K (x^2 + y^2)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^2 \cdot r\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^h \frac{(R^2 - z^2)^2}{4}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{2}(R^4 z - \frac{2R^2 z^3}{3} + \frac{z^5}{5})\Big|_0^h \\
&= \frac{\pi}{2}(R^4 h - \frac{2R^2 h^3}{3} + \frac{h^5}{5})
\end{aligned}$$

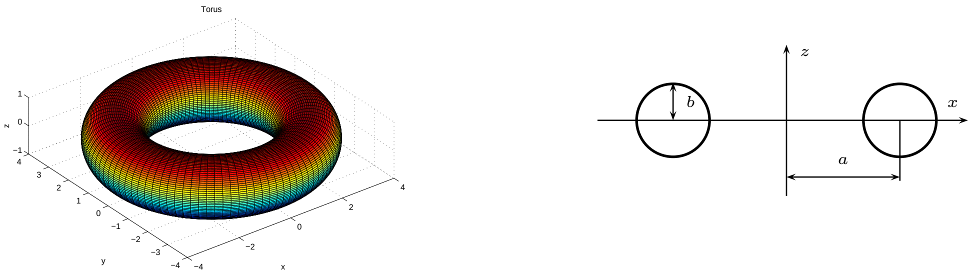
Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 3 točke.*
- *Prave meje: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Na sliki 3 je na levi torus, na desni pa presek torusa z xz-ravnino. Polmera a in b ($a < b$) sta na prikazana na sliki. Površina torusa je dana parametrično z

$$\Phi(u, v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)$$

za $0 \leq u \leq 2\pi$ in $0 \leq v \leq 2\pi$.



Sl. 3 Torus in presek torusa z xz-ravnino.

a. (15) Izračunajte enotsko normalo na torus v točki $T(a, 0, b)$.

Rešitev: Računamo

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} -(a + b\cos v)\sin u \\ (a + b\cos v)\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathit{in} \qquad \Phi_v = \begin{pmatrix} -b\sin v\cos u \\ -b\sin v\sin u \\ b\cos v \end{pmatrix}.$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} -b(a + b\cos v)\cos u\cos v \\ b(a + b\cos v)\sin u\cos v \\ -b(a + b\cos v)\sin v \end{pmatrix}.$$

Iz zadnje komponente izhaja, da je $v = \pi/2$. *Sledi, da je* $u = 0$. *Vstavimo in sledi, da je* $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$.

Ocenjevanje:

- Φ_u: *3 točke.*
- Φ_v: *3 točke.*
- *Vektorski produkt: 3 točke,*
- *Točka: 3 točke.*
- *Normalni vektor: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte površino torusa.

Rešitev: Površino ploskve dane parametrično izračunamo po formuli

$$P = \int_{[0,2\pi]^2} |\Phi_u \times \Phi_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v,$$

Ker je, $|\Phi_u \times \Phi_v| = b(a + b\cos v)$, *računamo*

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} b(a + b\cos v)\,\mathrm{d}v \\ &= 2\pi b \int_0^{2\pi} (a + b\cos v)\;\mathrm{d}v \\ &= 4\pi^2 ab \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Izračun* $|\Phi_u \times \Phi_v|$*: 2 točki.*
- *Pravilno nastavljen integral: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*