

2. kolokvij iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

8. januar 2014

A

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Naloge so 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

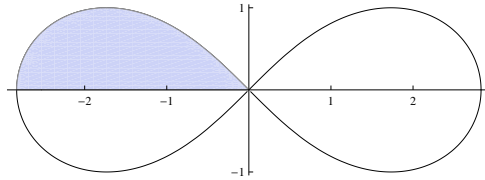
1. (25) Naj bo $a > 0$. Izračunajte integral

$$\int_D x e^{-x-y} dx dy,$$

kjer je trikotnik D enak $D = \{(x, y) : -a \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq x + a\}$.

2. (25) Naj bo $a > 0$. Z enačbo $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ je podana krivulja lemniskata. Naj bo D del območja omejenega z lemniskato in abscisno osjo, ki leži v drugem kvadrantu (Slika 1), $x \leq 0, y \geq 0$. Izračunajte integral

$$\int_D xy \, dx dy.$$



Slika 1: Lemniskata pri $a = 2$.

Pomoč:

$$\sin(2\varphi) = 2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)),$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

3. (25) Naj bo G del valja, s polmerom $R > 0$ in višino $h > 0$, ki leži v tretjem oktantu. Bolj natančno
 $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h, x \leq 0, y \leq 0\}$. Izračunajte integral

$$\int_G \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz.$$

Namig: V izračunu uporabite substitucijo $t = r^2 + z^2$.

4. (25) Naj bo K kroglja s središčem $S(R, 0, 0)$ in polmerom $R > 0$, torej $K = \{(x, y, z) : (x - R)^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Izračunajte integral

$$\int_K (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} dx dy dz.$$

Pomoč:

$$\int \sin^5 \theta d\theta = \int (1 - 2 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) \sin \theta d\theta,$$

$$\int \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} + 2 \cos(2\varphi) + \frac{1}{2} \cos(4\varphi) \right) d\varphi.$$