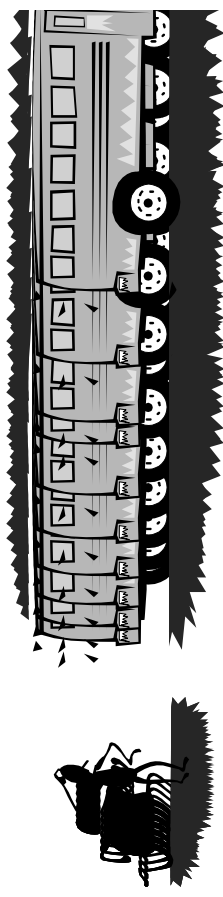


O ZNAČILNOSTIH MATEMATIČNIH MODELOV

PROSTOR IMA RAZSEŽNOST



MINM: 11/1

MINM: 11/3

PROSTOR IN ČAS – OKVIR, V KATEREGA JE POSTAVLJEN VSAK FIZIKALNI SISTEM

PROSTOR - fizikalna danost v geometrijskem in materialnem smislu

- prostor ima razsežnost
- prostor izpolnjujejo snovni delci
- delci iste snovi tvorijo v prostoru podobnoja s specifičnimi lastnostmi
- dogodki so umeščeni v prostor

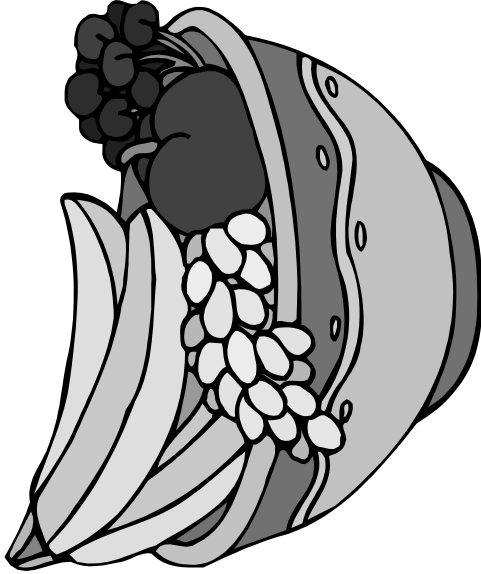
MINM: 11/2

PROSTOR IZPOLNJUJEJO SNOVNI DELCI



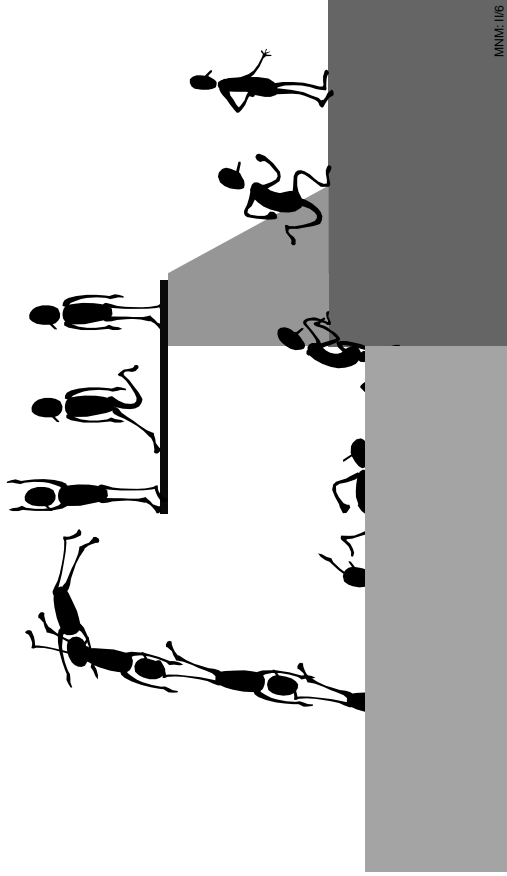
MINM: 11/4

DELCI ISTE SNOVI TVORJIO V PROSTORU
PODOBMOČJA S SPECIFIČNIMI LASTNOSTMI



MNM: 105

DOGODKI SO UMEŠČENI V PROSTOR



MNM: 106

PROSTOR IN ČAS – OKVIR,
V KATEREGA JE POSTAVLJEN VSAK FIZIKALNI SISTEM

PROSTOR - fizikalna danost v geometrijskem in materialnem smislu

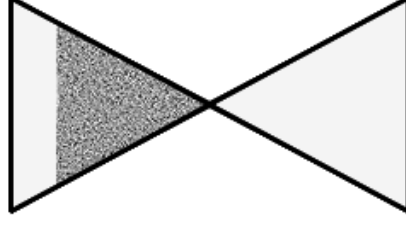
- prostor ima razsežnost
- prostor izpolnjujejo snovni delci
- delci iste snovi tvorijo v prostoru podobnočja s specifičnimi lastnostmi
- dogodki so umeščeni v prostor

ČAS - fizikalna danost

- čas ima razsežnost
- v absolutnem pogledu je čas progresivna spremenljivka
- čas je v določenih primerih mogoče relativizirati

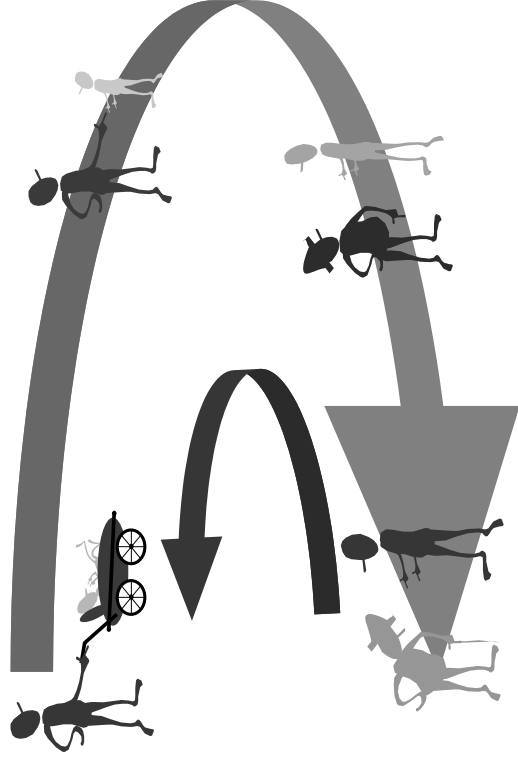
MNM: 107

ČAS IMA RAZSEŽNOST



MNM: 108

ČAS JE PROGRESIVNA SPREMENLJIVKA



MNR: II/9

Glede na gibalno stanje snovnih delcev v prostoru lahko dogodke v prostoru obravnavamo v okviru dveh različnih konceptov razumevanja prostora

– geometrijskega in materialnega

in skladno s tem definiramo pojma:

GEOMETRIJSKI PROSTOR

MATERIALNI PROSTOR

MNR: II/11

ČAS JE MOGOČE TUDI RELATIVIZIRATI

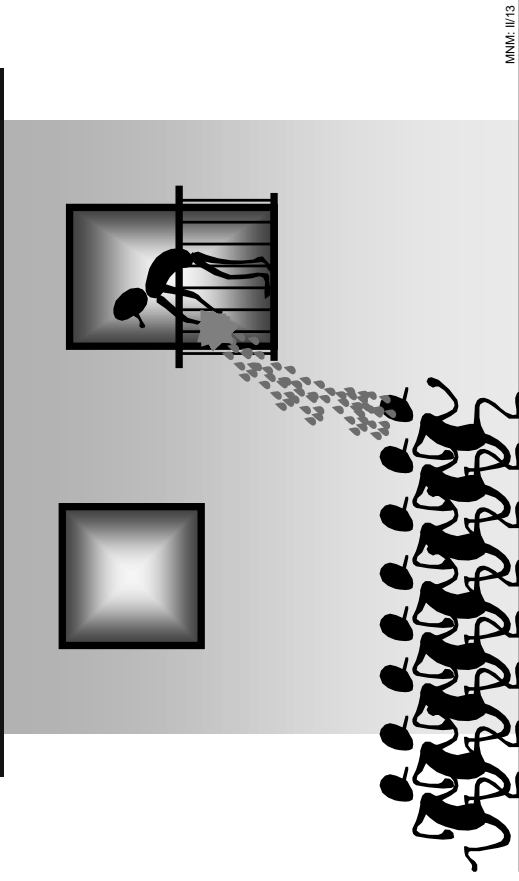
GEOMETRIJSKI PROSTOR – opazovanje je vezano na časovno fiksno območje geometrijskih točk v prostoru, ne glede ali so te v različnih časovnih trenutkih zasedene z različnimi snovnimi delci ali tudi ne.

$$E = mc^2$$

MNR: II/10

MNR: II/12

GEOMETRIJSKI PROSTOR



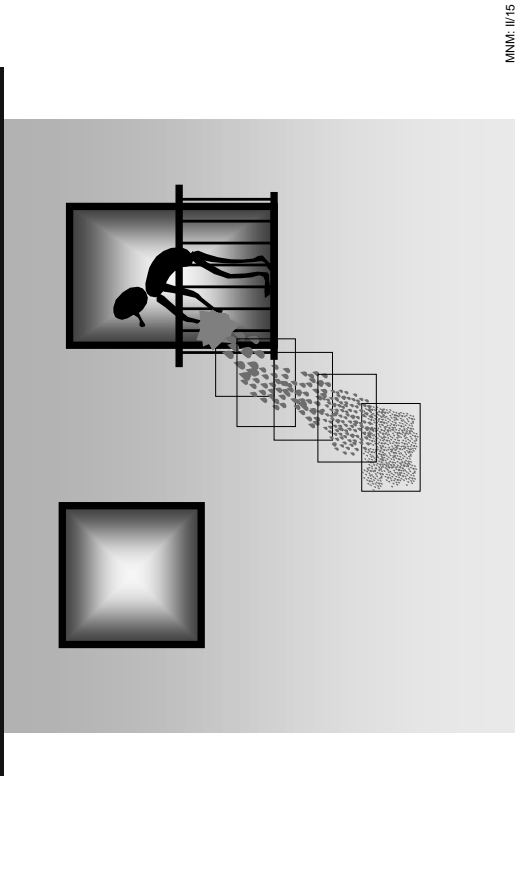
MNR: II/13

GEOMETRIJSKI PROSTOR – opazovanje je vezano na časovno fiksno območje geometrijskih točk v prostoru, ne glede ali so te v različnih časovnih trenutkih zasedene z različnimi snovnimi delci ali tudi ne.

MATERIALNI PROSTOR – opazovanje je vezano na fiksno območje snovnih točk v prostoru, ne glede na njihovo gibalno stanje.

MNR: II/14

MATERIALNI PROSTOR



MNR: II/15

GEOMETRIJSKI PROSTOR – opazovanje je vezano na časovno fiksno območje geometrijskih točk v prostoru, ne glede ali so te v različnih časovnih trenutkih zasedene z različnimi snovnimi delci ali tudi ne.

MATERIALNI PROSTOR – opazovanje je vezano na fiksno območje snovnih točk v prostoru, ne glede na njihovo gibalno stanje.

Če snovne točke svojega položaja v geometrijskem prostoru ne spreminjajo s časom, sta geometrijski in materialni prostor identična:

GEOMETRIJSKI PROSTOR \equiv MATERIALNI PROSTOR

kar pa ne pogojuje, da bi morali biti dogodki zaradi tega časovno neodvisni!

MNR: II/16

MATEMATIČNI OPIS PROSTORA IN ČASA

Materialni prostor je **trirazsežen** (trodimenzijska prostornost).

Čas je **enirazsežen** (enodimenzijska prostornost).

Materialni prostor in čas tvorita **štirirazsežen hiperprostor**.

KOORDINATNI SISTEMI omogočajo matematični opis materialnega prostora in dogodkov v njem.

Izbira koordinatnega sistema

- ne vpliva na fizikalno vsebino problema,
- ima pa lahko ključen vpliv na njegovo matematično formuliranje in numerično reševanje.

MNR: II/7

KOORDINATNI SISTEMI

Ortogonalni in neortogonalni koordinatni sistemi
Premočni in krivočrtni koordinatni sistemi

Ortogonalni koordinatni sistemi

Premočni koordinatni sistemi
- kartezični k.s.

Kartezične koordinate:
 $x, y, z = x_i$

Krivočrtni koordinatni sistemi
- cilindrični k.s.
- sferični k.s.
- eliptični k.s.
- ...

Krivočrtne koordinate:
 $\xi, \eta, \varsigma = \xi_\alpha$

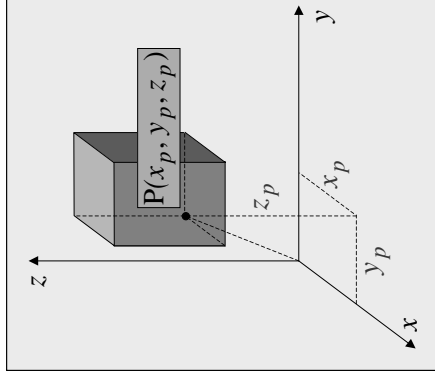
Transformacijske zveze med kartezičnimi in krivočrtnimi koordinatami:

$$x_i = g(\xi_\alpha) \Rightarrow \xi_\alpha = g^{-1}(x_i)$$

$$\xi_\alpha = h(x_i) \Rightarrow x_i = h^{-1}(\xi_\alpha)$$

MNR: II/8

Kartezični koordinatni sistem

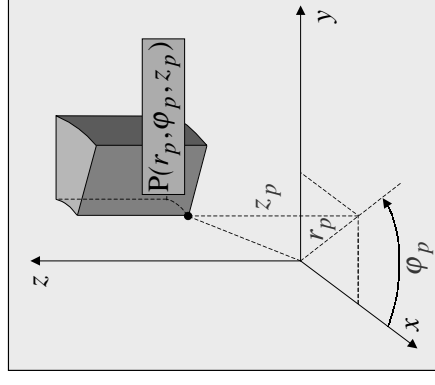


kartezične koordinate:

$$x_i = x, y, z$$

MNR: II/9

Cilindrični koordinatni sistem



cilindrične koordinate:

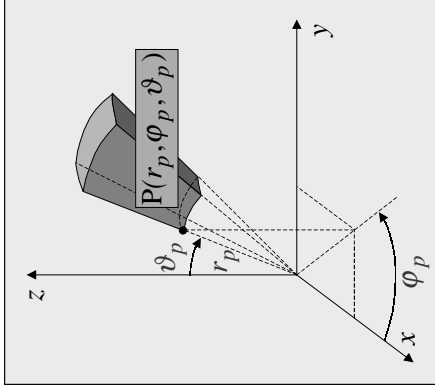
$$\xi_\alpha = r, \varphi, z$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned}$$

MNR: II/20

Sferični koordinatni sistem



sferične koordinate:

$$\xi_\alpha = r, \varphi, \vartheta$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y &= r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \vartheta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{aligned}$$

MNR: II/21

OMEJENOST MATERIALNEGA PROSTORA

Ne glede na privzeto neomejenost materialnega prostora:

$$\mathfrak{R}^3 \equiv \Omega^\infty$$

je MODELIRANO OBMOČJE, to je območje našega zanimanja Ω^M , običajno omejeno:

$$\Omega^M \subset \Omega^\infty$$

Prostor Ω^∞ se tako razdeli na dve podobmočji Ω^M in $\Omega^{\infty-M}$, pri čemer je podobmočje, ki predstavlja okolico modeliranega območja, definirano z:

$$\Omega^{\infty-M} = \Omega^\infty - \Omega^M$$

MNR: II/22

Zaprto podobmočje Ω^M ter odprto podobmočje $\Omega^{\infty-M}$ izkazujeta naslednji lastnosti:

$$\Omega^M \cup \Omega^{\infty-M} = \Omega^\infty, \quad \Omega^M \cap \Omega^{\infty-M} = 0$$

Mejo med obema podobmočjema tvorijo robne točke podobmočja Ω^M , ki predstavljajo ograjo Γ^M modeliranega območja Ω^M . Množica točk, ki opredeljuje ograjo Γ^M , je dana z Dedekindovim presekom odprtih podobmočij:

$$(\Omega^M - \Gamma^M) \setminus \Omega^{\infty-M} = \Gamma^M$$

Modelirano območje je le izjemoma neomejeno, v takem primeru pa velja:

$$\Omega^M = \Omega^\infty, \quad \Gamma^M = \Gamma^{\infty}$$

MNR: II/23

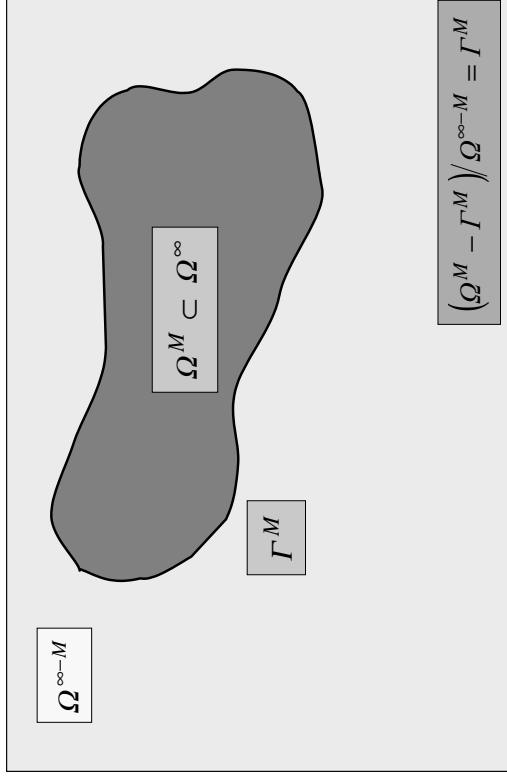
ELEMENTI MODELIRANEGA OBMOČJA

$$\Omega^\infty$$

$$\Omega^M = \Omega^\infty, \quad \Gamma^M = \Gamma^{\infty}$$

MNR: II/24

ELEMENTI MODELIRANEGA OBMOČJA



MNR: II/25

Modelirano območje je lahko sestavljeno iz več zaprtih podobmočij

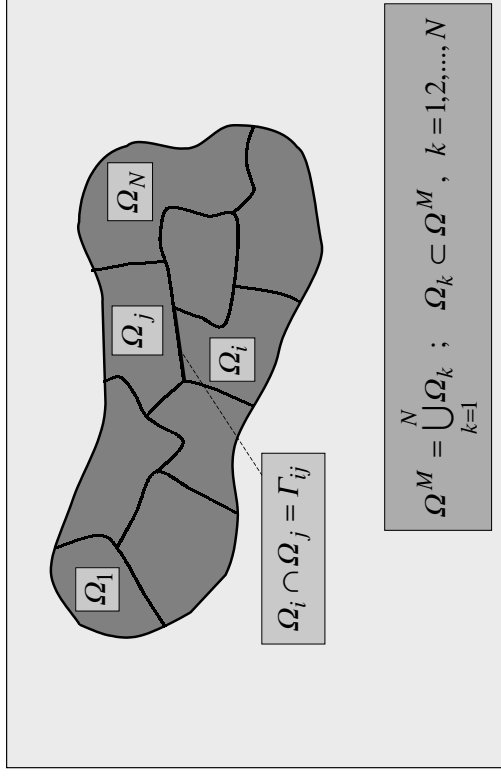
$$\Omega^M = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k^M ; \quad \Omega_k \subset \Omega^M, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

tako, da definiramo mejo med sosednjima podobmočjema presečna množica

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \Gamma_{ij}$$

MNR: II/25

ELEMENTI MODELIRANEGA OBMOČJA, sestavljenega iz podobmočij



MNR: II/27

REDUKCIJA PROSTORSKE RAZSEŽNOSTI V MATEMATIČNEM MODELU

Glede na fizikalne in geometrijske posebnosti fizikalnega problema je velikokrat mogoče matematični model zasnovati v prostoru, katerega razsežnost je manjša od razsežnosti materialnega prostora.

Redukcija prostorske razsežnosti:

$$\mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^p ; \quad p \in \{1, 2\}$$

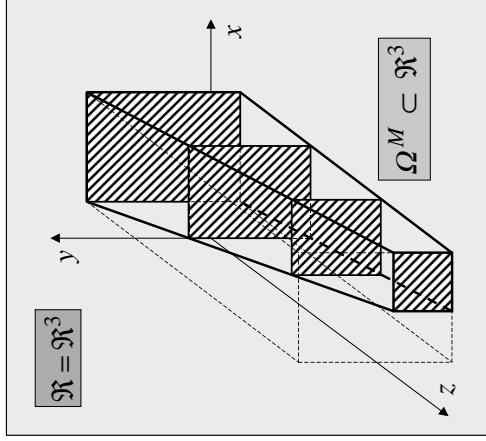
$$\Omega^M \equiv \Omega^p \subset \mathcal{R}^p \wedge \Omega^M \notin \mathcal{R}^{p-1}$$

Matematični modeli glede na prostorsko razsežnost:

- trodimenzionalen model (3D -model)
- dvodimenzionalen model (2D -model)
- enodimenzionalen model (1D -model)

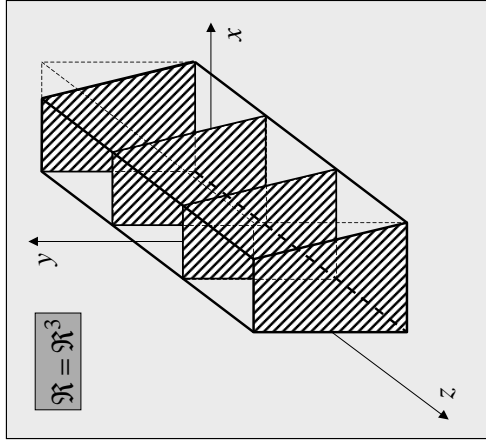
MNR: II/28

REDUKCIJA PROSTORSKE RAZSEŽNOSTI NI MOGOČA



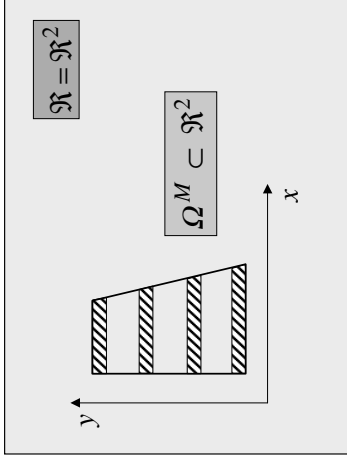
MNR: II/29

TOPOLOŠKO JE REDUKCIJA PROSTORSKE RAZSEŽNOSTI MOŽNA



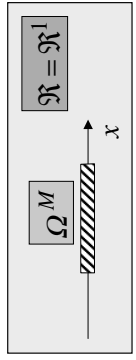
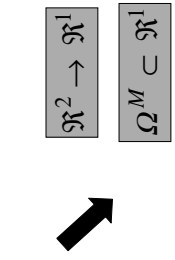
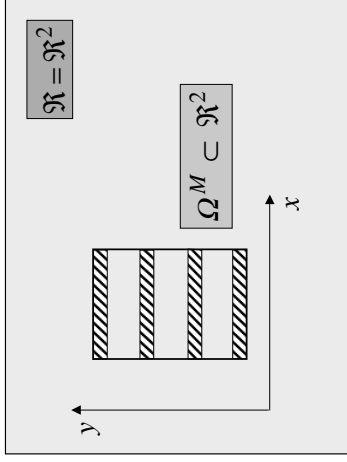
MNR: II/30

REDUKCIJA PROSTORSKE RAZSEŽNOSTI NI MOGOČA

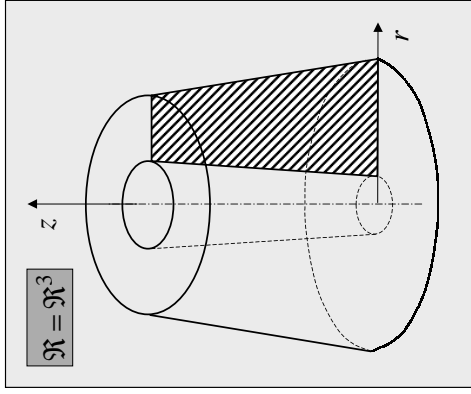


MNR: II/31

TOPOLOŠKO JE REDUKCIJA PROSTORSKE RAZSEŽNOSTI MOŽNA



MNR: II/32

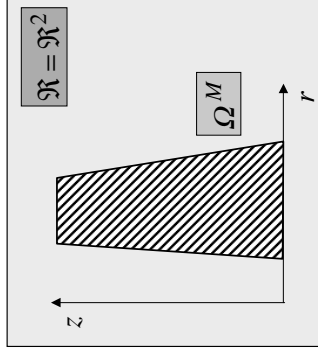


TOPOLOŠKO JE REDUKCIJA
PROSTORSKE RAZSEŽNOSTI
MOŽNA



$$\mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^2$$

$$\Omega^M \subset \mathcal{R}^2$$



MNR: II/33

KONTINUALNI (zvezno porazdeljeni) SISTEMI – SISTEMI Z NESKONČNIM ŠTEVILOM PROSTOSTNIH STOPENJ

Ko je v modeliranem območju:

- snov porazdeljena zvezno po posameznih podobmočjih, z morebitno nezveznostjo le na prehodu med sosednjimi podobmočji,
- porazdelitev snovi po podobmočju odločilna za odziv v preostalih podobmočjih.

Primeri:

- plastovite kompozitne plošče.
- območje zrak-morje-kopno.
- dvofazno območje led-voda (taljenje, strjevanje).
- dvofazno območje trdnina-kapljevina (vodne turbine)
- tehnološko postrčenje za litje.

MNR: II/35

PROSTORSKA PORAZDELITEV SNOVI – DISKRETNI in KONTINUALNI SISTEMI

DISKRETNI SISTEMI – SISTEMI S KONČNIM ŠTEVILOM PROSTOSTNIH STOPENJ

Ko so v modeliranem območju podobmočja,

- ki ne mejijo druga z drugo,
- katerih medsebojna razdalja je praviloma veliko večja od najdaljše dolžine kategorikoli izmed teh podobmočij
- katerih porazdelitev snovi po podobmočju nima odločujočega vpliva na odziv preostalih podobmočij, marveč je ta vpliv odvisen le od količine snovi v podobmočju
- katerih lastnosti snovi se bistveno razlikujejo od snovi v sosednjih podobmočjih.

Primeri:

- ozvezdja z zvezdami in planeti kot diskretnim sistemom masnih točk.
- polja točkovno porazdeljenih električnih nabojev.
- kristalne kali v talini.

MNR: II/34

ČASOVNA ODVISNOST

Čeprav je čas v absolutnem pogledu progresivna spremenljivka,

$$dt > 0$$

je mogoče nekatere fizikalne probleme obravnavati kot časovno nespremenljive.

Časovno odvisni – NESTACIONARNI modeli

$$\frac{d}{dt} (\text{učinek, konstitutivni parametri, odziv}) \neq 0$$

Časovno neodvisni – STACIONARNI modeli

$$\frac{d}{dt} (\text{učinek, konstitutivni parametri, odziv}) = 0$$

MNR: II/36

RELATIVNOST ČASOVNE DIMENZIJE

Probleme, ki jih karakterizira transport snovi, je mogoče obravnavati v okviru dveh prostorskih konceptov, to je koncepta:

- **GEOMETRIJSKEGA PROSTORA**, kjer opazovanje vežemo na časovno fiksno območje geometrijskih točk v prostoru, ne glede ali so te v različnih časovnih trenutkih zasedene z različnimi snovnimi delci ali tudi ne.

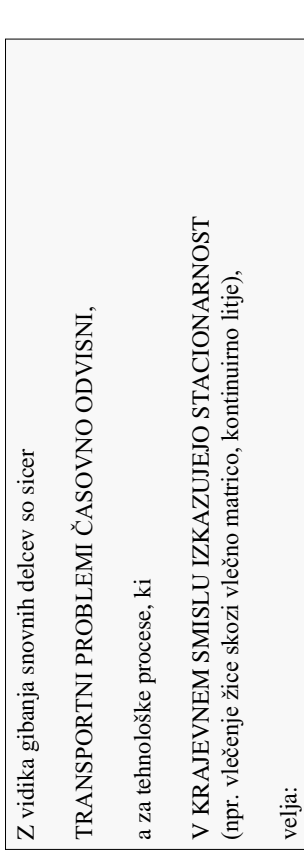
in koncepta:

- **MATERIALNEGA PROSTORA**, kjer opazovanje vežemo na fiksno območje snovnih točk v prostoru, ne glede na njihovo gibalno stanje.

MNR: II/37

PRIMER MASIVNEGA PREEBLIKOVANJA

nestacionarnost v geometrijskem in materialnem prostoru



Z vidika gibanja snovnih delcev so sicer

TRANSPORTNI PROBLEMI ČASOVNO ODVISNI,

a za tehnološke procese, ki

V KRAJEVNEM SMISLU IZKAZUJEJO STACIONARNOST
(npr. vlečenje žice skozi vlečno matrico, kontinuirno litje),

velja:

**OBRAVNAVA PROBLEMA V GEOMETRIJSKEM
PROSTORU OMOGOČA IZLOČITEV ČASOVNE
DIMENZIJE.**

MNR: II/38

MNR: II/40

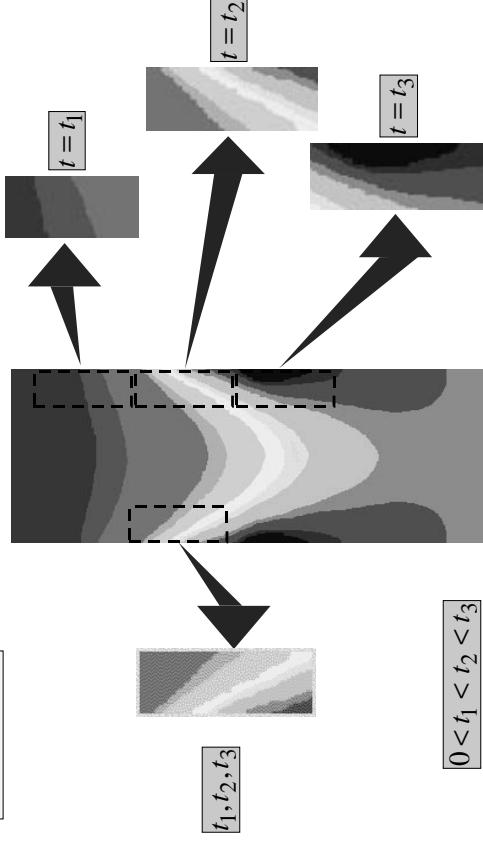
PRIMER KONTINUIRNEGA LITJA

GEOMETRIJSKI OKVIR

stacionarnost

MATERIALNI OKVIR

nestacionarnost



$$0 < t_1 < t_2 < t_3$$

MNR: II/41

MNR: II/43

OSNOVNO PRAVILO MODELIRANJA

MATEMATIČNI MODEL
NAJ BO KOLIKOR JE MOGOČE
ENOSTAVEN !

KAKŠEN NAJ BO MATEMATIČNI MODEL ?

Isti fizikalni sistem je mogoče opazovati na več ravneh:

- mikro raven (na ravni atomov in molekul)
- mezo raven
- makro raven (na ravni masnih točk ter zvezno porazdeljenih mas)

MNR: II/42

STOPNJA ZAHTEVNOSTI MODELA,
s katerim opišemo fizikalni sistem,

NAJ BO RAVNO TOLIKŠNA, DA JE Z NJIM
MOGOČE ZAOBJETI VSE, ZA VERODOSTOJNOST
SISTEMSKEGA ODZIVA, KLJUČNE DEJAVNIKE !

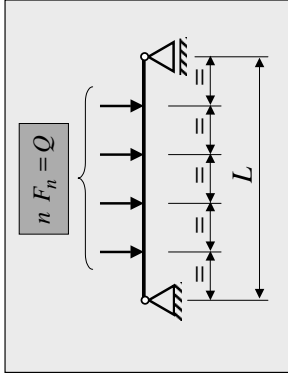
Povečana odvečna zahtevnost modela ne doprinaša nujno k bistveno kvalitetnejši predstavi o modeliranem fizikalnem sistemu ter bistveno kvalitetnejšemu (natančnejšemu) izračunu sistemskega odziva.

Bistveno pa se s tem povečuje zahtevnost računskih postopkov ter podaljšuje čas reševanja.

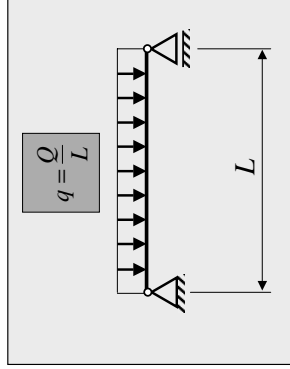
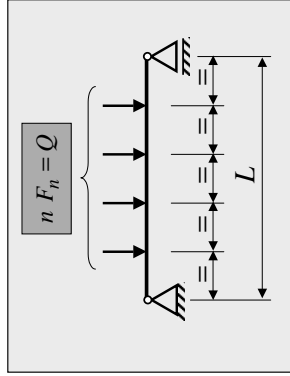
MNR: II/44

PRIMER II.1

V statični analizi upogiba nosilca, ki je obremenjen s končnim številom ekvidistantno porazdeljenih koncentriranih sil z rezultanto velikosti Q , razišči razmere, pri katerih je uporaba poenostavljenega modela z ekvivalentno zvezno porazdeljeno obtežbo smotna!

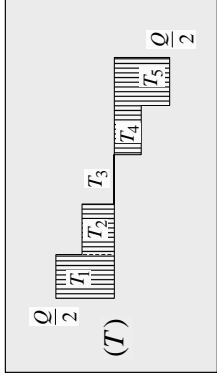


MNR: II/45

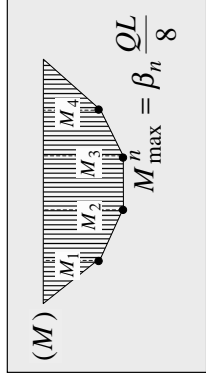


?

MNR: II/46

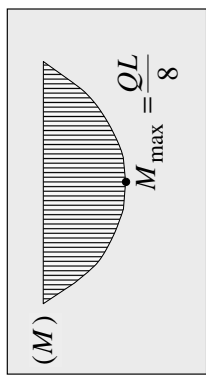
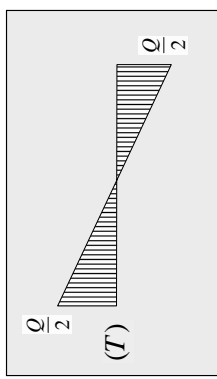


$$T_k = \frac{Q}{2} \left(1 - 2 \frac{k-1}{n}\right); k = 1, \dots, (n+1)$$



$$M_k = \frac{QL}{2} \left[k \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \right]; k = 0, 1, \dots, (n+1)$$

MNR: II/47



Stopnja ustreznosti nadomestitve eksaktnega modela z enostavnejšim statično ekvivalentnim modelom

n	m	β_n	n_{rel} [%]	m	n
1	1	2,0000	50,00	-	-
3	2	1,3333	25,00	1	2
5	3	1,2000	16,66	2	4
7	4	1,1429	12,50	3	6
9	5	1,1111	9,99	4	8
11	6	1,0909	8,33	5	10
13	7	1,0769	7,14	6	12
15	8	1,0667	6,25	7	14

$$n_{rel} = \frac{M_{max} - M_{max}^n}{M_{max}^n} \quad 100\%$$

$$\beta_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \dots \text{ za } n = 2m-1 \\ 1 + \frac{1}{n+1} & \dots \text{ za } n = 2m \end{cases} \Rightarrow \beta_{2m} = \beta_{2m+1}$$

MNR: II/48

Absolutna identičnost obeh modelov je dosežena le v limitnem primeru, ko gre

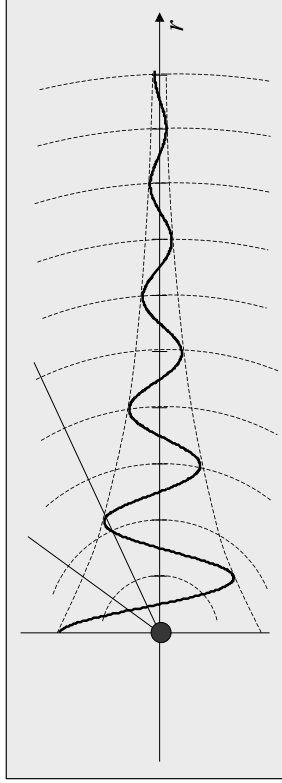
$$n \rightarrow \infty$$

a je uporaba enostavnejšega modela dopustna že mnogo prej (npr. za $n > 7$ z relativno napako, ki je manjša od 10%).

MNR: II/48

PRIMER II.2

V analizi valovanja vodne gladine, ki ga povzroči istočasni padeč treh enakih in med seboj ekvidistantno oddaljenih mas, razišči razmere, pri katerih je uporaba poenostavljenega modela z eno samo ekvivalentno maso smotrna!



MNR: II/50

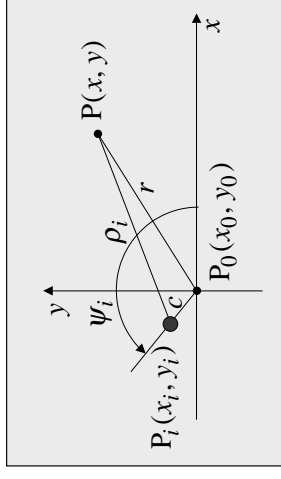
Valovanje iz izvorne točke P_i

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\rho_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

$$x_i = c \cos \psi_i$$

$$y_i = c \sin \psi_i$$



Jakost valovanja kot funkcija oddaljenosti od izvora

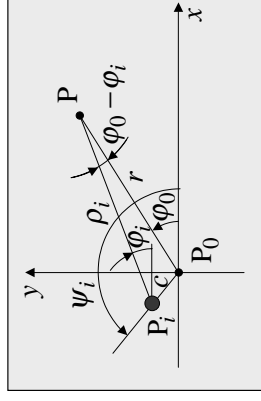
$$A_i(\rho_i) = A_0 e^{-\beta \rho_i} \cos \frac{\pi \rho_i}{a}, \quad i = 1, 2, 3$$

A_i – amplituda valovanja na oddaljenosti ρ
 A_0 – amplituda valovanja v izvorni točki
 β – faktor dušenja

MNR: II/51

SUPERPOZICIJA VPLIVOV VSEH TREH IZVOROV

$$A^{3m}(x, y) = A_1(x, y) + A_2(x, y) + A_3(x, y)$$



$$P_1: \psi_1 = 0$$

$$P_2: \psi_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$P_3: \psi_3 = \frac{4\pi}{3}$$

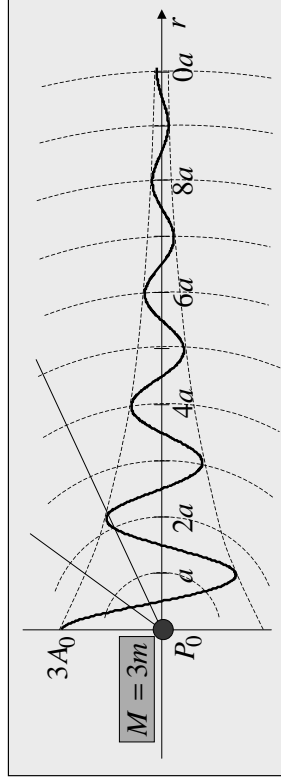
$$c^2 = r^2 + \rho_i^2 - 2r\rho_i \cos(\varphi_0 - \varphi_i)$$

$$\rho_i = r \sqrt{1 - 2 \left(\frac{c}{r}\right) \cos \psi_i + \left(\frac{c}{r}\right)^2} = r f_i \left(\frac{c}{r}\right)$$

MNR: II/52

Valovanje iz ene same po jakosti ekvivalentne izvorne točke

$$A^M(r) = 3A_0 e^{-\beta r} \cos \frac{\pi r}{a}$$



Odziv je neodvisen od kota φ

MNR: II/53

Primerjava odziva eksaktnega tri-izvornega modela z odzivom ekvivalentnega eno-izvornega modela vzdolž x-osi

$$\varphi_0 = 0 \Rightarrow r = x$$

Tri-izvorni model:

$$\varphi_0 = 0 \Rightarrow \rho_2 = \rho_3; \quad \cos \psi_2 = \cos \psi_3; \quad f_2(r) = f_3(r)$$

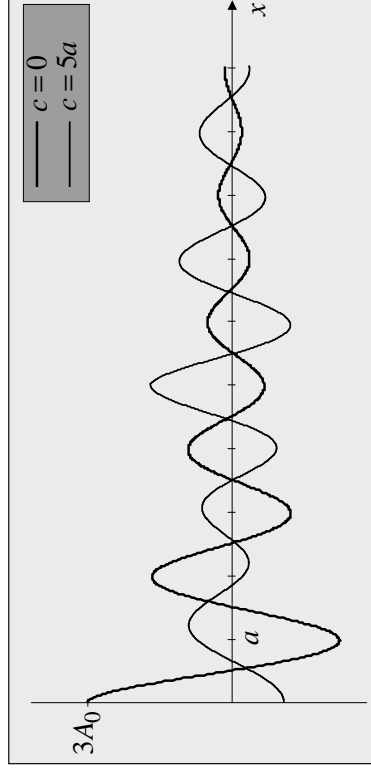
$$A^{3m} = A_0 \left\{ e^{-\beta r} f_1(r) \cos \left(\frac{\pi r}{a} f_1(r) \right) + 2e^{-\beta r} f_2(r) \cos \left(\frac{\pi r}{a} f_2(r) \right) \right\}$$

Eno-izvorni model:

$$A^M(r) = 3A_0 e^{-\beta r} \cos \frac{\pi r}{a}$$

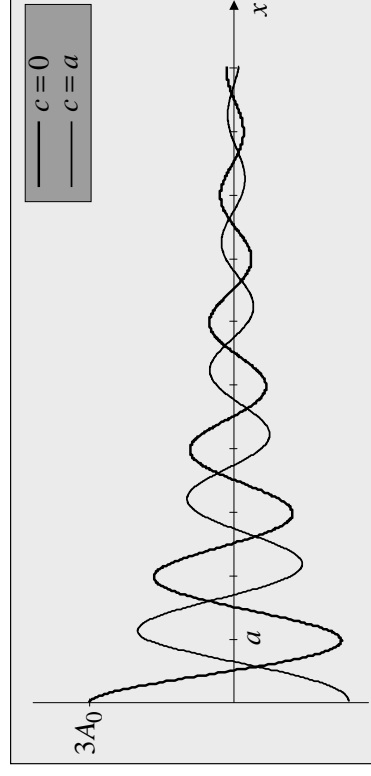
MNR: II/54

Primerjava odziva eksaktnega tri-izvornega modela z odzivom ekvivalentnega eno-izvornega modela vzdolž x-osi



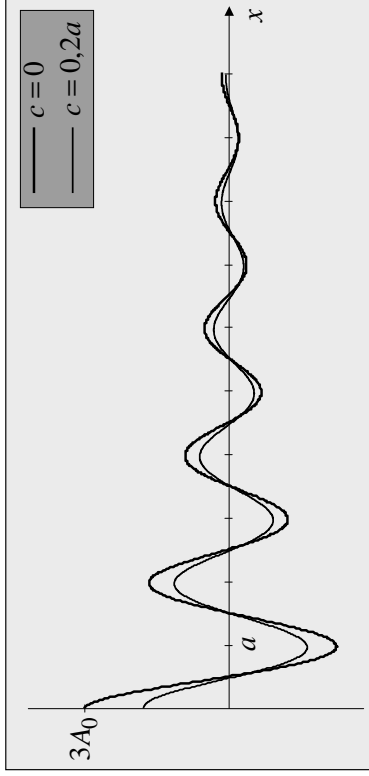
MNR: II/55

Primerjava odziva eksaktnega tri-izvornega modela z odzivom ekvivalentnega eno-izvornega modela vzdolž x-osi



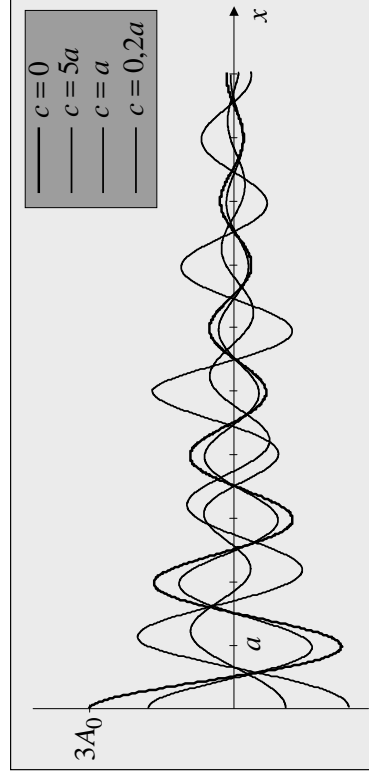
MNR: II/56

Primerjava odziva eksaktnega tri-izvornega modela z odzivom ekvivalentnega eno-izvornega modela vzdolž x -osi



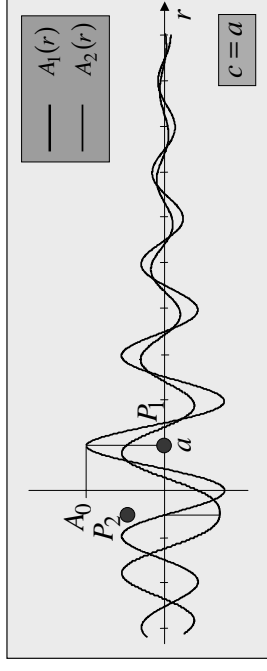
MNR: II/57

Primerjava odziva eksaktnega tri-izvornega modela z odzivom ekvivalentnega eno-izvornega modela vzdolž x -osi



MNR: II/58

Valovanje zaradi izvorov P_1 in P_2 vzdolž x -osi



MNR: II/59

Absolutna identičnost obeh modelov je dosežena le v limitnem primeru, ko gre

$$r \rightarrow \infty$$

a je uporaba enostavnejšega modela dopustna že mnogo prej. Velikost območja, v katerem je uporaba eksaktnega modela nujna, je odvisna predvsem od velikosti oddaljenosti posameznih mas od skupnega masnega središča.

MNR: II/60

TABELA IZVORI

Popolnejši modeli so smiselni, ko je potrebna podrobna in prostorsko lokalizirana analiza.

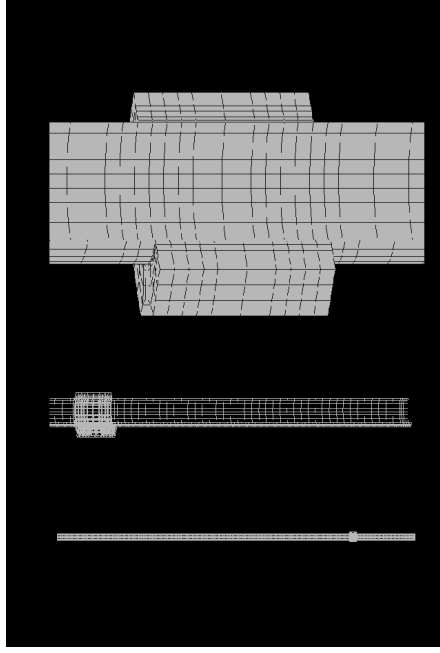
Zaradi povečanega obsega numeričnega modela, kar je praviloma posledica izpopolnjevanja matematičnega modela, se z večanjem stopnje popolnosti modela območje opazovanja običajno manjša.

MNR: II/61

MNR: II/63

PRIMER II.3

V mehanski analizi cevi izmenjevalnika toplote v uparjalniku, ki so lahko v kontaktu s podporno ploščo, ugotovi vlogo, ki jo ima izbira treh nivojsko različnih (makro-, mezo-, mikro-) uporabljenih modelov!



MNR: II/62