# KONTINUALNI SISTEMI
-
## FUNKCIJSKE OBLIKE MATEMATIČNIH MODELOV NEKATERIH POMEMBNIH TEHNIČNIH PROBLEMOV

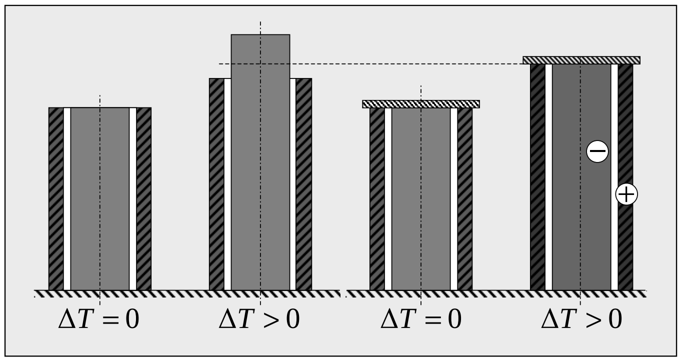
- ČASOVNO NEODVISNI PROBLEMI
  - statika enoosnih nosilnih elementov
  - stacionarni prevod toplote
  - potencialni tok tekočine v ravnini
  - torzija prizmatičnih elementov nekrožnega prereza
  - ravninska elastostatika
  - statika upogiba plošč
  - stabilnost enoosnih nosilnih elementov

- ČASOVNO ODVISNI PROBLEMI
  - dinamika enoosnih nosilnih elementov
  - nestacionarni prevod toplote
  - dinamika upogiba plošč



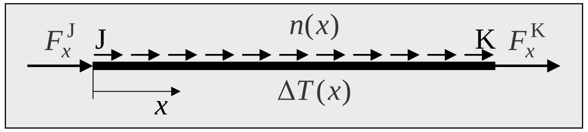
## STATIKA ENOOSNIH NOSILNIH ELEMENTOV - A

ELEMENTI, OBREMENJENI S TOČKOVNO IN ZVEZNO PORAZDELJENO OSNO OBTEŽBO TER ENAKOMERNO SPREMEMBO TEMPERATURE V PREREZU






Analizirajmo raven enoosni element dolžine $L$ spremenljivega prečnega prereza $A(x)$ iz linearno elastičnega gradiva, ki je v krajiščih J in K obremenjen s točkovnima silama $F_x^{\mathrm{J}}$ in $F_x^{\mathrm{K}}$ ter vzdolž osi elementa z zvezno porazdeljeno obremenitvijo $n(x)$, pri čemer je še element vzdolž osi izpostavljen po prerezu enakomerni temperaturni spremembi $\Delta T(x)$. V neobremenjenem stanju je element v termičnem ravnotežju pri temperaturi okolice $\vartheta_0$. Snovni lastnosti sta modul elastičnosti $E$ in temperaturni razteznostni koeficient $\alpha$.

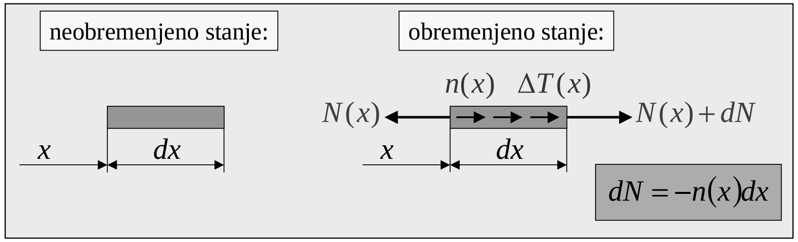



V analizi enoosnega elementa moramo upoštevati vodilne enačbe problema, ki izhajajo iz:
- statičnega ravnotežja vseh obremenitev
- deformacijske konsistentnosti
- konstitucijskega obnašanja.

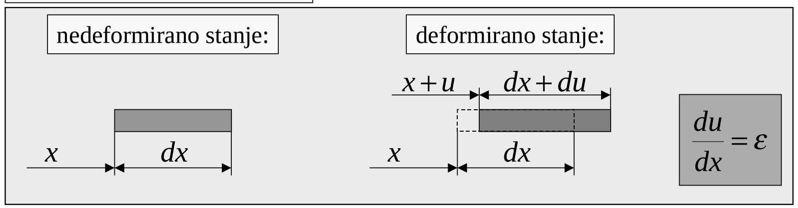


Diferencialno enačbo problema izpeljemo z obravnavo diferencialnega elementa:

statično ravnotežje:




deformacijska konsistentnost:



statično ravnotežje:

$$dN = -n(x)dx \quad \rightarrow \quad \frac{dN}{dx} = -n(x)$$

deformacijska konsistentnost:

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon\,, \quad \varepsilon = \varepsilon^{\sigma} + \varepsilon^{T} \quad \rightarrow \quad \varepsilon^{\sigma} = \frac{du}{dx} - \alpha\Delta T$$

konstitucijsko obnašanje (Hookeov zakon):

$$\varepsilon^{\sigma} = \frac{\sigma}{E}\,, \quad \varepsilon^{T} = \alpha\Delta T \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow N = EA\varepsilon^{\sigma}$$

Vodilna enačba problema:

$$\frac{d}{dx}\left[EA\left(\frac{du}{dx} - \alpha\Delta T\right)\right] = -n(x)\,, \quad x \in [0, L]$$

z vzdolžnim premikom $u(x)$ kot osnovno spremenljivko problema.



Vodilna enačba problema:

$$\frac{d}{dx}\left[EA\left(\frac{du}{dx} - \alpha\Delta T\right)\right] = -n(x)\,, \quad x \in [0, L]$$

ki je sicer navadna diferencialna enačba drugega reda, v celoti opredeljuje spreminjanje funkcije vzdolžnega premika $u(x)$ ter notranje sile $N(x)$ na enoosnem elementu.

Fizikalne spremenljivke problema:
- vzdolžni premik $u(x)$ $\rightarrow$ PRIMARNA SPREMENLJIVKA
- osna sila $N(x)$ $\rightarrow$ SEKUNDARNA SPREMENLJIVKA

Osna sila $N(x)$ se izraža v odvisnosti od primarne spremenljivke $u(x)$ na sledeči način:

$$N = EA\left(\frac{du}{dx} - \alpha\Delta T\right)$$



Rešitev problema podaja sicer vodilna enačba:

$$\frac{d}{dx}\left[EA\left(\frac{du}{dx} - \alpha\Delta T\right)\right] = -n(x)\,, \quad x \in [0, L]$$

ki pa vključuje le vpliv zvezno porazdeljene obremenitve v polju elementa ter temperaturne spremembe vzdolž elementa.

Da bo rešitev vodilne enačbe konsistentna tudi s premiki in obremenitvami v krajiščih J in K,

MORA REŠITEV ZADOSTITI ROBNIM POGOJEM NA OBEH KRAJIŠČIH.



ROBNI POGOJI so definirani z znanimi velikostmi primarne ali sekundarne spremenljivke v obeh krajiščih:

$$x = x_{\mathrm{J}} = 0:$$
$$u(0) = u_{\mathrm{J}} \quad \text{ali} \quad N(0) = \left[EA\left(\frac{du}{dx} - \alpha\Delta T\right)\right]_{x=0} = -F_x^{\mathrm{J}}$$
$$x = x_{\mathrm{K}} = L:$$
$$u(L) = u_{\mathrm{K}} \quad \text{ali} \quad N(L) = \left[EA\left(\frac{du}{dx} - \alpha\Delta T\right)\right]_{x=L} = +F_x^{\mathrm{K}}$$

## VAŽNO !

Primarna in sekundarna spremenljivka $u(x)$ in $N(x)$, ki sta s fizikalnega stališča:

- primarna spremenljivka
  $\equiv$ DEFORMACIJSKA VELIČINA
  (tudi KINEMATIČNA veličina)
- sekundarna spremenljivka
  $\equiv$ STATIČNA VELIČINA

sta glede na robne pogoje vselej

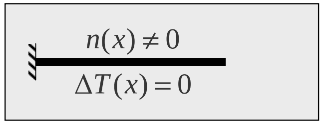
KONJUGIRANI VELIČINI:

$$u(x) \leftrightarrow N(x)$$

To pomeni, da je na robu ena izmed njiju po velikosti znana, druga pa neznana.

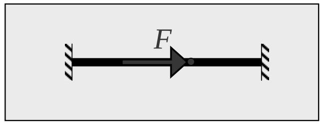


PRIMER IV.1a



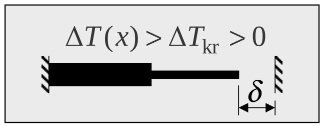

$$u(0)=0$$
$$\left[EA\left(\frac{du}{dx}\right)\right]_{x=L}=0$$

PRIMER IV.1b



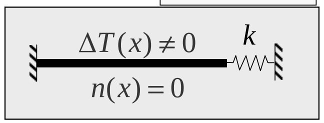

$$u(0)=0$$
$$u(L)=0$$

PRIMER IV.1c




$$u(0)=0$$
$$u(L)=\delta$$

PRIMER IV.1d




$$u(0)=0$$
$$\left[EA\left(\frac{du}{dx}-\alpha\Delta T\right)\right]_{x=L}=-ku(L)$$



## O FUNKCIJSKIH LASTNOSTIH REŠITVE $u(x)$

Do rešitve $u(x)$ pridemo z dvakratnim integriranjem enačbe problema:

$$\frac{d}{dx}\left[EA\left(\frac{du}{dx}\right)\right]=-n(x)+\frac{d}{dx}(EA\alpha\Delta T)\,, \quad x\in[0,L]$$

ter izpolnitvijo robnih pogojev v krajiščih intervala.

Funkcijske lastnosti rešitve $u(x)$ so naslednje:

- zveznost na celotnem intervalu $[0,L]$
- število različnih funkcijskih predpisov, s katerimi je opredeljeno spreminjanje primarne spremenljivke na intervalu $[0,L]$, je določeno s številom funkcijskih predpisov, ki opredeljujejo spreminjanje:
  - zvezno porazdeljene obremenitve $n(x)$
  - temperaturne spremembe $\Delta T(x)$
  - prečnega prereza $A(x)$
  - snovnih lastnosti $E(x), \alpha(x)$.



V primeru, ko so vsi ti parametri, t.j. obremenitev $n(x)$, temperaturna sprememba $\Delta T(x)$, prečni prerez $A(x)$ ter snovne lastnosti $E(x), \alpha(x)$, na celotnem intervalu $[0,L]$ vsak zase opredeljeni z enim funkcijskim predpisom:

$$n(x)=f_n(x)\,, \quad \Delta T(x)=f_T(x)\,,$$
$$A(x)=f_A(x)\,, \quad E(x)=f_E(x)\,, \quad \alpha(x)=f_\alpha(x)\,; \quad x\in[0,L]$$

je tudi rešitev diferencialne enačbe $u(x)$ podana z enim samim funkcijskim predpisom, ki na krajiščih intervala zadošča predpisanim robnim pogojem.

Ker so funkcijski predpisi $f_{\mathrm{i}}(x)$ zvezne in zvezno odvedljive funkcije na intervalu $[0,L]$, sta tako funkcija $u(x)$ kot odvod $\frac{du}{dx}(x)$, s tem pa tudi osna sila $N(x)$, na celotnem intervalu zvezne in zvezno odvedljive funkcije:

$$u(x)=g(x)\,, \quad \frac{du}{dx}(x)=h(x)\,, \quad N(x)=q(x)\,; \quad x\in[0,L]$$

V nasprotnem primeru, to je v primeru, ko imamo vsaj za enega od parametrov, obremenitvenega $\left(n(x), \Delta T(x)\right)$ ali konstitutivnega $\left(A(x), E(x), \alpha(x)\right)$, vsaj dva funkcijska predpisa na obravnavanem intervalu $[0, L]$, je potrebno osnovni interval razdeliti na podintervale $[a_k, b_k] \subset [0, L]$:

$$x \in [a_k, b_k]\ ,\ k = 1,2,\ldots,n$$
$$0 = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \ldots < b_{n-1} = a_n < b_n = L$$

na območju katerih bo spreminjanje parametrov izraženo z enim samim funkcijskim predpisom:

$$n(x) = f_n^{(k)}(x)\ ,\ \ \Delta T(x) = f_T^{(k)}(x)\ ,$$
$$A(x) = f_A^{(k)}(x)\ ,\ \ E(x) = f_E^{(k)}(x)\ ,\ \ \alpha(x) = f_\alpha^{(k)}(x)\ ;$$
$$x \in [a_k, b_k]\ ,\ k = 1,2,\ldots,n$$



Ker so na intervalu $[a_k, b_k]$ funkcijski predpisi $f_i^{(k)}(x)$ zvezne in zvezno odvedljive funkcije, sta tako funkcija $u(x)$ kot odvod $\frac{du}{dx}(x)$, s tem pa tudi osna sila $N(x)$, na celotnem intervalu $[a_k, b_k]$ zvezne in zvezno odvedljive funkcije:

$$u_k(x) = g_k(x)\ ,\ \frac{du_k}{dx}(x) = h_k(x)\ ,\ N_k(x) = q_k(x)\ ;$$
$$x \in [a_k, b_k]\ ,\ k = 1,2,\ldots,n$$

Posebno pozornost velja posvetiti obnašanju rešitve $u(x)$ na prehodu med posameznimi podintervali. Medtem ko mora rešitev $u(x)$ na skrajnih mejah intervala $[0, L]$ zadostiti ROBNIM POGOJEM problema, morajo biti na meji med dvema podintervaloma izpolnjeni POGOJI KONSISTENTNOSTI PREHODA, ki opredeljujejo obnašanje primarne in sekundarne spremenljivke problema ob prehodu iz enega podintervala v drugega.

POGOJI KONSISTENTNOSTI PREHODA SO VSELEJ FIZIKALNO POGOJENI, ZATO VODI NESPOŠTOVANJE LE-TEH VSELEJ DO NEPRAVILNIH REŠITEV.



Fizikalna konsistentnost problema se v obravnavanem primeru statične analize izkazuje z:

- zveznostjo porazdelitve snovnih točk vzdolž celotnega intervala $[0, L]$ ter njihovo nerazdružljivostjo, kar pogojuje tudi zveznost primarne spremenljivke $u(x)$ na prehodu med posameznimi podintervali:

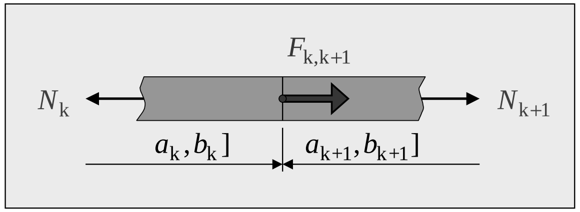
$$u_k(b_k) = u_{k+1}(a_{k+1}) \quad \Rightarrow\ g_k(b_k) = g_{k+1}(a_{k+1})\ ;\ \ k = 1,2,\ldots,n-1$$

- statičnim ravnotežjem med zunanjimi obremenitvami in notranjimi silami vzdolž celotnega intervala $[0, L]$. V točkah, ki ne sovpadajo s krajišči podintervalov $[a_k, b_k]$, je ravnotežje zagotovljeno z izpolnitvijo diferencialne enačbe problema. Izpolnitev ravnotežja v krajiščih podintervalov pa daje naslednjo pogojno enačbo:

$$N_k(b_k) = N_{k+1}(a_{k+1}) + F_{k,k+1} \ \Rightarrow\ q_k(b_k) = q_{k+1}(a_{k+1}) + F_{k,k+1}\ ;$$
$$k = 1,2,\ldots,n-1$$

kjer je $F_{k,k+1}$ morebitna koncentrirana obtežba v točki $b_k = a_{k+1}$






Iz zapisanega pogoja sledi, da je sekundarna spremenljivka $N(x)$ nezvezna na meji med dvema intervaloma le v primeru, ko je meja obremenjena s koncentrirano obtežbo. Skokovita sprememba sekundarne spremenljivke je po velikosti enaka velikosti sile $F_{k,k+1}$:

$$N_k(b_k) - N_{k+1}(a_{k+1}) = F_{k,k+1}\ ;\ \ k = 1,2,\ldots,n-1$$

Iz odvisnosti med sekundarno spremenljivko $N(x)$ in primarno spremenljivko $u(x)$, ki da:

$$\left(EA\frac{du}{dx}\right)_{k}\Big|_{x=b_k} - \left(EA\frac{du}{dx}\right)_{k+1}\Big|_{x=a_{k+1}} = \mathscr{F}^{\vartheta}_{k,k+1}$$

$$\mathscr{F}^{\vartheta}_{k,k+1} = F_{k,k+1} + (EA\alpha\Delta T)_{k}\big|_{x=b_k} - (EA\alpha\Delta T)_{k+1}\big|_{x=a_{k+1}}$$

pa sledi, da morebitna zveznost sekundarne spremenljivke $N(x)$ na meji med dvema podintervaloma še ne zagotavlja tudi zveznosti odvoda primarne spremenljivke $u(x)$.

Še več! Ob pogoju, da je desna stran v zgornji enačbi nična, mora biti tudi togost $a(x)=E(x)A(x)$, če naj bo odvod primarne spremenljivke zvezen, na meji med podintervaloma prav tako zvezna funkcija.

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{F}^{\vartheta}_{k,k+1} &= 0 \\ (EA)_{k}\big|_{x=b_k} &= (EA)_{k+1}\big|_{x=a_{k+1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{du}{dx}\right)_{k}\Big|_{x=b_k} = \left(\frac{du}{dx}\right)_{k+1}\Big|_{x=a_{k+1}}$$



POVZETEK:

VODILNA OBMOČNA ENAČBA:

$$\frac{d}{dx}\left[EA\left(\frac{du}{dx}-\alpha\Delta T\right)\right] = -n(x)\ , \quad x\in[0,L]$$

ROBNI POGOJI:

$$u(0)=u_{J} \quad \text{ali} \quad N(0)=\left[EA\left(\frac{du}{dx}-\alpha\Delta T\right)\right]_{x=0} = -F_x^{J}$$

$$u(L)=u_{K} \quad \text{ali} \quad N(L)=\left[EA\left(\frac{du}{dx}-\alpha\Delta T\right)\right]_{x=L} = +F_x^{K}$$

POGOJI KONSISTENTNOSTI PREHODA:

$$u_k(b_k)=u_{k+1}(a_{k+1}) \qquad ; \quad k=1,2,\ldots,n-1$$

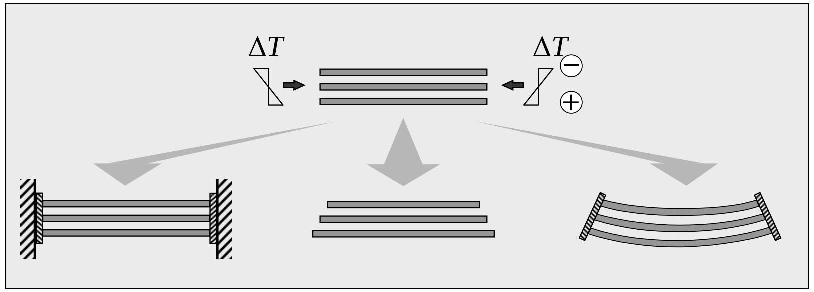
$$\left(EA\frac{du}{dx}\right)_{k}\Big|_{x=b_k} - \left(EA\frac{du}{dx}\right)_{k+1}\Big|_{x=a_{k+1}} =$$

$$= F_{k,k+1} + (EA\alpha\Delta T)_{k}\big|_{x=b_k} - (EA\alpha\Delta T)_{k+1}\big|_{x=a_{k+1}}$$



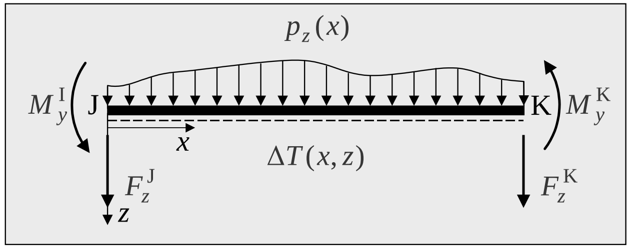
# STATIKA ENOOSNIH NOSILNIH ELEMENTOV - B

## ELEMENTI, OBREMENJENI UPOGIBNO S TOČKOVNIMI SILAMI IN MOMENTI TER ZVEZNO PORAZDELJENO PREČNO OBTEŽBO IN LINEARNO SPREMEMBO TEMPERATURE PO VIŠINI PREREZA

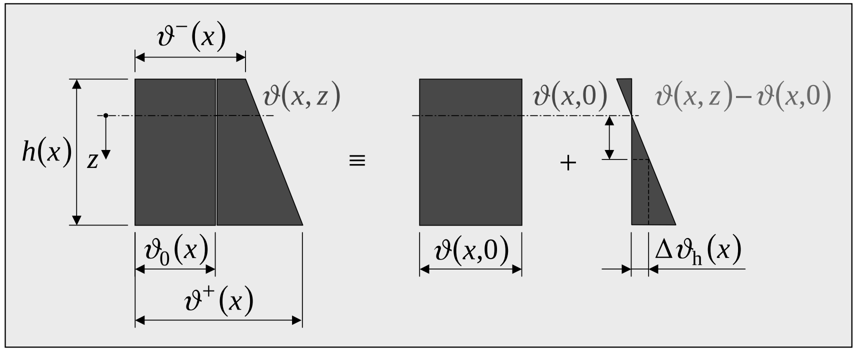





Analizirajmo raven enoosni element dolžine $L$ spremenljivega prečnega prereza $A(x)$ in vztrajnostnega momenta $I_y(x)=I(x)$ iz linearno elastičnega gradiva, ki je v krajiščih J in K obremenjen s točkovnima silama $F_z^{J}$ in $F_z^{K}$ in točkovnima momentoma $M_y^{J}$ in $M_y^{K}$ ter vzdolž osi elementa z zvezno porazdeljeno prečno obremenitvijo $p_z(x)$, pri čemer je še element vzdolž osi izpostavljen temperaturni spremembi $\Delta T(x,z)$, ki se po višini prereza spreminja linearno. V neobremenjenem stanju je element v termičnem ravnotežju pri temperaturi okolice $\vartheta_0$. Snovni lastnosti sta modul elastičnosti $E$ in temperaturni razteznostni koeficient $\alpha$. Upogibna obremenitev deluje v ravnini, ki jo določata težiščna os elementa in glavna vztrajnostna os prereza.



analiza vpliva temperaturne spremembe:




Naj bosta $\vartheta^+(x), \vartheta^-(x)$ temperaturi obeh skrajnih površin oz. skrajnih vlaken prereza $A(x)$, ki sta v smeri $z$ oddaljeni za razdaljo $h(x)$. Linearno spreminjanje temperature $\vartheta(x,z)$ po višini prereza tedaj zapišemo kot vsoto:

$$\vartheta(x,z) = \vartheta(x,0) + \frac{\left(\vartheta^+(x) - \vartheta^-(x)\right)}{h(x)} z$$

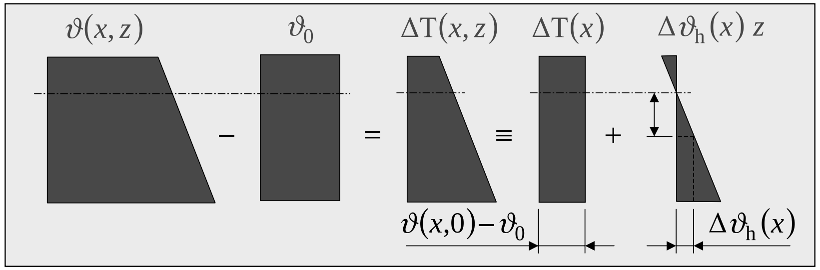


Glede na termično uravnoteženo stanje pri $\vartheta_0$ je temperaturna sprememba $\Delta T(x,z)$ določena z:

$$\Delta T(x,z) = \vartheta(x,z) - \vartheta_0 = \Delta T_x(x) + \Delta T_z(x,z)$$
$$\Delta T_x(x) = \vartheta(x,0) - \vartheta_0 \quad ; \quad \Delta T_z(x,z) = \Delta\vartheta_h(x) z$$

kjer smo vpeljali označbo:

$$\Delta\vartheta_h(x) = \frac{\left(\vartheta^+(x) - \vartheta^-(x)\right)}{h(x)}$$






Od koordinate $z$ neodvisna sprememba $\Delta T_x(x)$ vpliva na enakomerno dilatacijo vseh točk v prerezu, ne pa na upogibno deformiranje elementa, zato v nadaljevanju upoštevamo le upogibni del temperaturne spremembe $\Delta T_z(x,z)$ :

$$\Delta T_z(x,z) = \Delta\vartheta_h(x) z$$

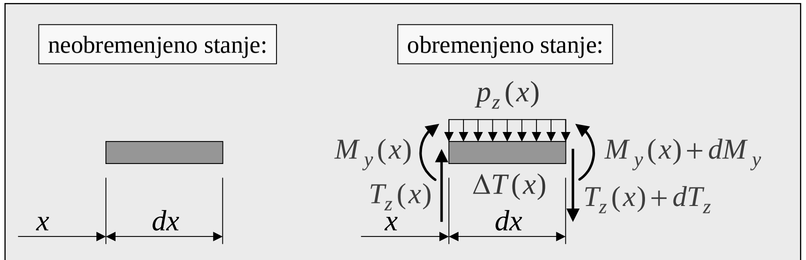
V analizi upogiba enoosnega elementa moramo upoštevati vodilne enačbe problema, ki izhajajo iz:

- statičnega ravnotežja vseh obremenitev
- deformacijske konsistentnosti
- konstitucijskega obnašanja.

Diferencialno enačbo problema izpeljemo z obravnavo diferencialnega elementa v koordinatnem sistemu, ki ga določajo težiščna os elementa ter glavne vztrajnostne osi prereza. Glede na spremenljivost geometrijskih karakteristik prereza $A(x), I(x)$ vzdolž osi elementa je potrebno še predpostaviti, da ležijo vsa težišča prerezov na premici ter da se usmerjenost glavnih vztrajnostnih osi vzdolž osi ne spreminja.

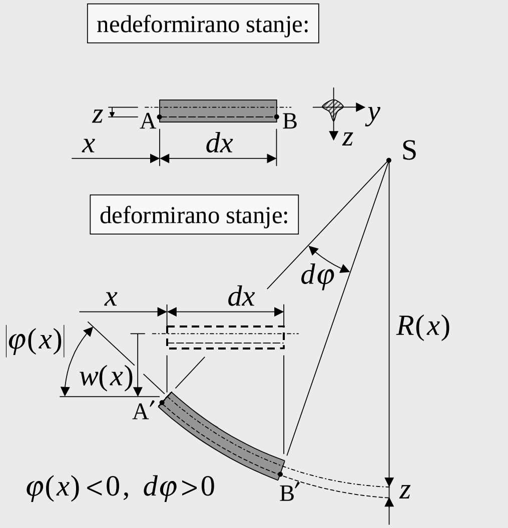


statično ravnotežje:




$$dT_z = -p_z(x)dx \qquad dM_y = T_z(x)dx$$

deformacijska konsistentnost:




$$\varepsilon^{\mathrm{AB}} = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}} - \overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{z}{R}$$

$$\frac{1}{R} = -\frac{\dfrac{d^2 w}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2\right]^3}}$$

$$\left|\frac{dw}{dx}\right| << 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{R} \approx -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$-z\frac{d^2 w}{dx^2} = \varepsilon$$



statično ravnotežje:

$$dT_z = -p_z(x)dx \;\wedge\; dM_y = T_z(x)dx$$

$$\rightarrow\; \frac{dT_z}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dM_y}{dx}\right) = -p_z(x)$$

deformacijska konsistentnost:

$$-z\frac{d^2 w}{dx^2} = \varepsilon\;,\quad \varepsilon = \varepsilon^{\sigma} + \varepsilon^{T}$$

$$\rightarrow\; \varepsilon^{\sigma} = -z\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha\Delta\vartheta_h\right)$$

konstitucijsko obnašanje (Hookeov zakon):

$$\varepsilon^{\sigma} = \frac{\sigma}{E}\;,\quad \varepsilon^{T} = \alpha\Delta T$$

$$\rightarrow\; \sigma = \frac{M_y}{I}z \;\Rightarrow\; M_y = \frac{EI\varepsilon^{\sigma}}{z}$$

Vodilna enačba problema:

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\left[EI\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha\Delta\vartheta_h\right)\right] = p_z(x)\;,\quad x \in [0, L]}$$

z upogibkom $w(x)$ kot osnovno spremenljivko problema.



Vodilna enačba problema:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha\Delta\vartheta_h\right)\right] = p_z(x)\;,\quad x \in [0, L]$$

ki je sicer navadna diferencialna enačba četrtega reda, v celoti določa spreminjanje funkcije prečnega premika, t.j. upogibka $w(x)$ ter naklon $\varphi(x)$ upogibnice, pa tudi spreminjanje notranjih sil – prečne sile $T(x)$ in upogibnega momenta $M(x)$ vzdolž enoosnega elementa.

Fizikalne spremenljivke problema:

- upogibek $w(x)$ $\rightarrow$ OSNOVNA PRIMARNA SPREMENLJIVKA
- naklon $\varphi(x)$ $\rightarrow$ DRUGA PRIMARNA SPREMENLJIVKA
- moment $M(x)$ $\rightarrow$ PRVA SEKUNDARNA SPREMENLJIVKA
- prečna sila $T(x)$ $\rightarrow$ DRUGA SEKUNDARNA SPREMENLJIVKA



V odvisnosti od osnovne primarne spremenljivke $w(x)$ izrazimo preostale veličine problema na sledeči način:

naklon upogibnice $\varphi(x)$:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad ; \quad za \left|\frac{dw}{dx}\right| \approx 0 \;\Rightarrow \varphi \approx \tan\varphi = -\frac{dw}{dx}$$

upogibni moment $M(x)$:

$$M = -EI\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha\Delta\vartheta_h\right)$$

prečna sila $T(x)$:

$$T = -\frac{d}{dx}\left[EI\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]$$

Rešitev problema podaja sicer vodilna enačba:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]=p_z(x)\ ,\quad x\in[0,L]$$

ki pa vključuje le vpliv zvezno porazdeljene prečne obremenitve v polju elementa ter temperaturne spremembe vzdolž elementa.

Da bo rešitev vodilne enačbe konsistentna tudi s premiki in obremenitvami v krajiščih J in K,

MORA REŠITEV ZADOSTITI ROBNIM POGOJEM NA OBEH KRAJIŠČIH.



ROBNI POGOJI so definirani z znanimi velikostmi primarnih ali sekundarnih spremenljivk v obeh krajiščih:

$x = x_{\mathrm{J}} = 0$:

$$w(0)=w_{\mathrm{J}} \quad \text{ali} \quad T(0)=-\frac{d}{dx}\left[EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=0}=-F_z^{\mathrm{J}}$$

$$\varphi(0)=\varphi_{\mathrm{J}} \quad \text{ali} \quad M(0)=\left[-EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=0}=-M_y^{\mathrm{J}}$$

$x = x_{\mathrm{K}} = L$:

$$w(L)=w_{\mathrm{K}} \quad \text{ali} \quad T(L)=-\frac{d}{dx}\left[EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=L}=+F_z^{\mathrm{K}}$$

$$\varphi(L)=\varphi_{\mathrm{K}} \quad \text{ali} \quad M(L)=\left[-EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=L}=+M_y^{\mathrm{K}}$$



VAŽNO !

Primarni in sekundarni spremenljivki $w(x),\varphi(x)$ ter $M(x),T(x)$, ki so s fizikalnega stališča:

- primarni spremenljivki
  $\equiv$ DEFORMACIJSKI VELIČINI
- sekundarni spremenljivki
  $\equiv$ STATIČNI VELIČINI

so glede na robne pogoje vselej

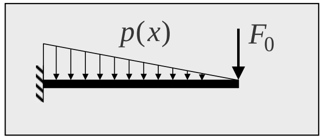
KONJUGIRANE VELIČINE:

$$w(x) \leftrightarrow T(x) \quad \text{in} \quad \varphi(x) \leftrightarrow M(x)$$

To pomeni, da je na robu v konjugirani dvojici ena izmed veličin po velikosti znana, druga pa neznana.



PRIMER IV.2a



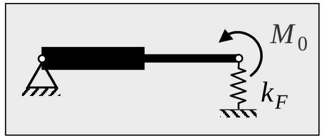

$w(0)=0$

$\frac{dw}{dx}(0)=0$

$$\left[-EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=L}=0$$

$$-\frac{d}{dx}\left[EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=L}=F_0$$

PRIMER IV.2b



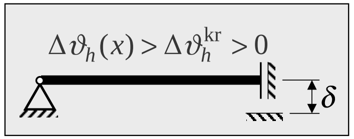

$w(0)=0$

$$\left[-EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=0}=0$$

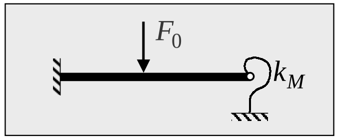
$$\left[-EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=L}=M_0$$

$$-\frac{d}{dx}\left[EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=L}=-k_F\,w(L)$$

PRIMER IV.2c



PRIMER IV.2d



$$w(0)=0$$
$$\left[-EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=0}=0$$
$$w(L)=\delta$$
$$\frac{dw}{dx}(L)=0$$

$$w(0)=0$$
$$\frac{dw}{dx}(0)=0$$
$$\left[-EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=L}=k_M\,\frac{dw}{dx}(L)$$
$$-\frac{d}{dx}\left[EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=L}=0$$



## O FUNKCIJSKIH LASTNOSTIH REŠITVE $w(x)$

Do rešitve $w(x)$ pridemo s štirikratno integracijo enačbe problema:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]=p_z(x)-\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\alpha\Delta\vartheta_h\right),\quad x\in[0,L]$$

ter izpolnitvijo robnih pogojev v krajiščih intervala.

Funkcijske lastnosti rešitve $w(x)$ so naslednje:

- zveznost upogibka $w(x)$ ter naklona $\varphi(x)$ na celotnem intervalu $[0,L]$
- število različnih funkcijskih predpisov, s katerimi je opredeljeno spreminjanje primarne spremenljivke na intervalu $[0,L]$, je določeno s številom funkcijskih predpisov, ki opredeljujejo spreminjanje:
  - zvezno porazdeljene obremenitve $p_z(x)$
  - temperaturne spremembe $\Delta\vartheta_h(x)$
  - lastnosti prečnega prereza $A(x), I(x)$
  - snovnih lastnosti $E(x), \alpha(x)$.



V primeru, ko so vsi ti parametri, t.j. obremenitev $p_z(x)$, temperaturna sprememba $\Delta\vartheta_h(x)$, lastnosti prečnega prereza $A(x), I(x)$ ter snovne lastnosti $E(x),\alpha(x)$, na celotnem intervalu $[0,L]$ vsak zase opredeljeni z enim funkcijskim predpisom:

$$p_z(x)=f_p(x)\ ,\quad \Delta\vartheta_h(x)=f_T(x)\ ,\quad A(x)=f_A(x)\ ,$$
$$I(x)=f_I(x)\ ,\quad E(x)=f_E(x)\ ,\quad \alpha(x)=f_\alpha(x)\ ;\quad x\in[0,L]$$

je tudi rešitev diferencialne enačbe $w(x)$ podana z enim samim funkcijskim predpisom, ki na krajiščih intervala zadošča predpisanim robnim pogojem.

Ker so funkcijski predpisi $f_{\mathrm{i}}(x)$ zvezne in zvezno odvedljive funkcije na intervalu $[0,L]$, sta tako funkcija $w(x)$ kot vsi njeni odvodi na celotnem intervalu zvezne in zvezno odvedljive funkcije:

$$w(x)=g(x)\ ,\quad \frac{d^{\mathrm{r}}w}{dx^{\mathrm{r}}}(x)=h^{(\mathrm{r})}(x)\quad ,\ \mathrm{r}=1,\ldots,4\ ;\qquad x\in[0,L]$$



s tem pa so tudi naklon $\varphi(x)$, upogibni moment $M(x)$ in prečna sila $T(x)$ na celotnem intervalu $[0,L]$ zvezne in zvezno odvedljive funkcije:

$$\varphi(x)=h^{(1)}(x)\ ,\quad M(x)=q(x)\ ,\quad T(x)=r(x)\ ;\qquad x\in[0,L]$$

V nasprotnem primeru, to je v primeru, ko imamo vsaj za enega od parametrov, obremenitvenega $(\,p_z(x),\Delta\vartheta_h(x))$ ali konstitutivnega $(A(x), I(x), E(x),\alpha(x))$, vsaj dva funkcijska predpisa na obravnavanem intervalu $[0,L]$, je potrebno osnovni interval razdeliti na podintervale $[a_{\mathrm{k}}, b_{\mathrm{k}}]\subset[0,L]$:

$$x\in[a_{\mathrm{k}}, b_{\mathrm{k}}]\ ,\quad \mathrm{k}=1,2,\ldots,\mathrm{n}$$
$$0=a_1<b_1=a_2<b_2=\ldots<b_{\mathrm{n-1}}=a_{\mathrm{n}}<b_{\mathrm{n}}=L$$

na območju katerih bo spreminjanje parametrov izraženo z enim samim funkcijskim predpisom:

$$p_z(x)=f_p^{(\mathrm{k})}(x)\ ,\quad \Delta\vartheta_h(x)=f_T^{(\mathrm{k})}(x)\ ,\quad A(x)=f_A^{(\mathrm{k})}(x)\ ,$$
$$I(x)=f_I^{(\mathrm{k})}(x)\ ,\quad E(x)=f_E^{(\mathrm{k})}(x)\ ,\quad \alpha(x)=f_\alpha^{(\mathrm{k})}(x)\ ;$$
$$x\in[a_{\mathrm{k}}, b_{\mathrm{k}}]\ ,\quad \mathrm{k}=1,2,\ldots,\mathrm{n}$$

Ker so na intervalu $[a_k, b_k]$ funkcijski predpisi $f_i^{(k)}(x)$ zvezne in zvezno odvedljive funkcije, so tako funkcija $w(x)$ kot njeni odvodi na celotnem intervalu $[a_k, b_k]$ zvezne in zvezno odvedljive funkcije:

$$w_k(x) = g_k(x) \; , \quad \frac{d^r w_k}{dx^r}(x) = h_k^{(r)}(x) \quad , \quad r = 1,...,4 \; ; \qquad x \in [a_k, b_k] \; , \quad k = 1,2,...,n$$

kar velja končno tudi za naklon $\varphi(x)$, upogibni moment $M(x)$ in prečno silo $T(x)$ na celotnem intervalu $[a_k, b_k]$:

$$\varphi_k(x) = h_k^{(1)}(x) \; , \quad M_k(x) = q_k(x) \; , \quad T_k(x) = r_k(x) \; ; \qquad x \in [a_k, b_k] \; , \quad k = 1,2,...,n$$



Posebno pozornost velja posvetiti obnašanju rešitve $w(x)$ na prehodu med posameznimi podintervali. Medtem ko mora rešitev $w(x)$ na skrajnih mejah intervala $[0, L]$ zadostiti ROBNIM POGOJEM problema, morajo biti na meji med dvema podintervaloma izpolnjeni POGOJI KONSISTENTNOSTI PREHODA, ki opredeljujejo obnašanje primarnih in sekundarnih spremenljivk problema ob prehodu iz enega podintervala v drugega.

POGOJI KONSISTENTNOSTI PREHODA SO VSELEJ FIZIKALNO POGOJENI, ZATO VODI NESPOŠTOVANJE LE-TEH VSELEJ DO NEPRAVILNIH REŠITEV.



Fizikalna konsistentnost problema se v obravnavanem primeru statične analize izkazuje z:

- zveznostjo porazdelitve snovnih točk vzdolž celotnega intervala $[0, L]$ ter njihovo nerazdružljivostjo, kar pogojuje tudi zveznost obeh primarnih spremenljivk $w(x)$ in $\varphi(x)$ na prehodu med posameznimi podintervali:.

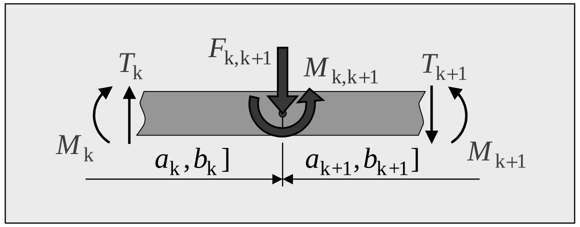
$$w_k(b_k) = w_{k+1}(a_{k+1}) \quad \Rightarrow \; g_k(b_k) = g_{k+1}(a_{k+1}) \; ; \quad k = 1,2,...,n-1$$
$$\varphi_k(b_k) = \varphi_{k+1}(a_{k+1}) \quad \Rightarrow \; h_k^{(1)}(b_k) = h_{k+1}^{(1)}(a_{k+1})$$

- statičnim ravnotežjem med zunanjimi obremenitvami in notranjimi silami vzdolž celotnega intervala $[0, L]$. V točkah, ki ne sovpadajo s krajišči podintervalov $[a_k, b_k]$, je ravnotežje zagotovljeno z izpolnitvijo diferencialne enačbe problema. Izpolnitev ravnotežja v krajiščih podintervalov pa daje naslednji pogojni enačbi:

$$M_k(b_k) = M_{k+1}(a_{k+1}) + M_{k,k+1} \quad \Rightarrow \; q_k(b_k) = q_{k+1}(a_{k+1}) + M_{k,k+1} \; ,$$
$$T_k(b_k) = T_{k+1}(a_{k+1}) + F_{k,k+1} \quad \Rightarrow \; r_k(b_k) = r_{k+1}(a_{k+1}) + F_{k,k+1} \; ; \qquad k = 1,2,...,n-1$$

kjer sta $F_{k,k+1}$ in $M_{k,k+1}$ sila in moment morebitne koncentrirane obtežbe v točki $b_k = a_{k+1}$.






Iz zapisanih pogojev sledi, da sta sekundarni spremenljivki $M(x)$ in $T(x)$ nezvezni na meji med dvema intervaloma le v primeru, ko je meja obremenjena z ustrezno koncentrirano obtežbo. Skokovita sprememba sekundarne spremenljivke $M(x)$ je po velikosti enaka velikosti momenta $M_{k,k+1}$, sprememba sekundarne spremenljivke $T(x)$ pa velikosti sile $F_{k,k+1}$:

$$M_k(b_k) - M_{k+1}(a_{k+1}) = M_{k,k+1} \; ,$$
$$T_k(b_k) - T_{k+1}(a_{k+1}) = F_{k,k+1} \; ; \quad k = 1,2,...,n-1$$

Iz odvisnosti med sekundarno spremenljivko $M(x)$ in primarno spremenljivko $w(x)$, ki da:

$$\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{\mathrm{k+1}}\Bigg|_{x=a_{\mathrm{k+1}}}-\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{\mathrm{k}}\Bigg|_{x=b_{\mathrm{k}}}=$$

$$=M_{\mathrm{k,k+1}}+\left(EI\alpha\Delta\vartheta_h\right)_{\mathrm{k}}\Big|_{x=b_{\mathrm{k}}}-\left(EI\alpha\Delta\vartheta_h\right)_{\mathrm{k+1}}\Big|_{x=a_{\mathrm{k+1}}}$$

ter iz odvisnosti med sekundarno spremenljivko $T(x)$ in primarno spremenljivko $w(x)$, ki da:

$$\left[\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{\mathrm{k+1}}\Bigg|_{x=a_{\mathrm{k+1}}}-\left[\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{\mathrm{k}}\Bigg|_{x=b_{\mathrm{k}}}=$$

$$=F_{\mathrm{k,k+1}}+\left[\frac{d\left(EI\alpha\Delta\vartheta_h\right)}{dx}\right]_{\mathrm{k}}\Bigg|_{x=b_{\mathrm{k}}}-\left[\frac{d\left(EI\alpha\Delta\vartheta_h\right)}{dx}\right]_{\mathrm{k+1}}\Bigg|_{x=a_{\mathrm{k+1}}}$$

pa sledi, da morebitna zveznost sekundarnih spremenljivk $M(x)$ in $T(x)$ na meji med dvema podintervaloma še ne zagotavlja tudi zveznosti višjih odvodov (od drugega dalje) primarne spremenljivke $w(x)$.



POVZETEK:

VODILNA OBMOČNA ENAČBA:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]=p_z(x)\ ,\quad x\in[0,L]$$

ROBNI POGOJI:

$$w(0)=w_{\mathrm{J}}\qquad \text{ali}\qquad T(0)=-\frac{d}{dx}\left[EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=0}=-F_z^{\mathrm{J}}$$

$$\varphi(0)=\varphi_{\mathrm{J}}\qquad \text{ali}\qquad M(0)=\left[-EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=0}=-M_y^{\mathrm{J}}$$

$$w(L)=w_{\mathrm{K}}\qquad \text{ali}\qquad T(L)=-\frac{d}{dx}\left[EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=L}=+F_z^{\mathrm{K}}$$

$$\varphi(L)=\varphi_{\mathrm{K}}\qquad \text{ali}\qquad M(L)=\left[-EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha\Delta\vartheta_h\right)\right]_{x=L}=+M_y^{\mathrm{K}}$$



POGOJI KONSISTENTNOSTI PREHODA:

$$w_{\mathrm{k}}(b_{\mathrm{k}})=w_{\mathrm{k+1}}(a_{\mathrm{k+1}})\quad ;\ \mathrm{k}=1,2,\dots,\mathrm{n}-1$$

$$\varphi_{\mathrm{k}}(b_{\mathrm{k}})=\varphi_{\mathrm{k+1}}(a_{\mathrm{k+1}})$$

$$\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{\mathrm{k+1}}\Bigg|_{x=a_{\mathrm{k+1}}}-\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{\mathrm{k}}\Bigg|_{x=b_{\mathrm{k}}}=$$

$$=M_{\mathrm{k,k+1}}+\left(EI\alpha\Delta\vartheta_h\right)_{\mathrm{k}}\Big|_{x=b_{\mathrm{k}}}-\left(EI\alpha\Delta\vartheta_h\right)_{\mathrm{k+1}}\Big|_{x=a_{\mathrm{k+1}}}$$

$$\left[\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{\mathrm{k+1}}\Bigg|_{x=a_{\mathrm{k+1}}}-\left[\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{\mathrm{k}}\Bigg|_{x=b_{\mathrm{k}}}=$$

$$=F_{\mathrm{k,k+1}}+\left[\frac{d\left(EI\alpha\Delta\vartheta_h\right)}{dx}\right]_{\mathrm{k}}\Bigg|_{x=b_{\mathrm{k}}}-\left[\frac{d\left(EI\alpha\Delta\vartheta_h\right)}{dx}\right]_{\mathrm{k+1}}\Bigg|_{x=a_{\mathrm{k+1}}}$$