O APROKSIMATIVNEM REŠEVANJU - SPLOŠNO

Funkcijsko obliko obeh diferencialnih enačb, ki smo ju spoznali pri obravnavi statične analize enoosnega elementa, lahko zapišemo v operatorski obliki:

$$Dv(x) = f(x) \quad ; \quad x \in [0,L]$$

pri čemer so diferencialni operator D, primarna spremenljivka $v(x)$ ter nehomogeni del $f(x)$ za obravnavana primera oblike:

Osna obremenitev:

$$D = \frac{d}{dx}\left[EA\left(\frac{d}{dx}\right)\right],\ v(x) = u(x),\ f(x) = -n(x) + \frac{d}{dx}(EA\alpha\Delta T)$$

Upogibna obremenitev:

$$D = \frac{d^2}{dx^2}\left[EI\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)\right],\ v(x) = w(x),\ f(x) = p_z(x) - \frac{d^2}{dx^2}(EI\alpha\Delta\vartheta_h)$$

Čeprav gre za navadno diferencialno enačbo, katere analitično rešitev običajno ni težko poiskati, pa se postavlja vprašanje aproksimativne rešitve takšne diferencialne enačbe. Aproksimativno reševanje je še posebej aktualno v primeru, ko je potrebno osnovni interval $[0,L]$ zaradi različnih funkcijskih predpisov obremenitvenih ali konstitutivnih parametrov razdeliti na podintervale $[a_k, b_k] \subset [0,L]$, pri čemer lahko zaradi tega izkazujejo tisti odvodi primarne spremenljivke, s katerimi se izražajo sekundarne spremenljivke, določeno stopnjo nezveznosti.

Aproksimativno rešitev diferencialne enačbe:

$$Dv(x) = f(x) \quad ; \quad x \in [0,L]$$

katere ekzaktna rešitev je zvezna funkcija $v(x)$, bomo zasnovali na končni množici diskretnih parametrov $\{c_k; k = 0,1,...,N\}$.

Aproksimativno rešitev $v_{apr}(x)$ tedaj zapišemo kot funkcijo teh parametrov, torej:

$$v_{apr}(x) = f(x, c_k; k = 0,1,...,N)$$

Eden od faktorjev, ki ključno vpliva na kvaliteto aproksimativne rešitve $v_{apr}(x)$, je število N. Zato je smotrno zapisati:

$$v_{apr}(x) = v_N(x)$$

pri čemer mora aproksimativna rešitev $v_N(x)$ izkazovati lastnost:

$$\lim_{N\to\infty} v_N(x) = v(x)\ ,$$
$$Dv(x) = f(x) \quad ; \quad x \in [0,L]$$

Aproksimativno reševanje lahko zastavimo v skladu s:

- FUNKCIJSKIM PRISTOPOM

ali

- INTERPOLACIJSKIM PRISTOPOM.

V primeru FUNKCIJSKEGA PRISTOPA je aproksimativna rešitev zasnovana na končni funkcijski množici $\{\psi_k(x)\}$ izbranih aproksimacijskih funkcij iste družine.

Aproksimativna rešitev $v_N(x)$, ki jo tedaj zapišemo kot:

$$v_N(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \psi_k(x) \quad ; \quad x \in [0,L]$$

je v funkcijskem smislu povsem opredeljena z izbiro aproksimacijskih funkcij $\psi_k(x)$, po vrednosti pa s koeficienti c_k .

Nepoznano velikost koeficientov c_k je potrebno določiti v okviru postopka izračuna aproksimativne rešitve.

V primeru INTERPOLACIJSKEGA PRISTOPA je aproksimativna rešitev zasnovana na končni množici $\{c_k\}$ diskretnih parametrov, ki aproksimirajo vrednosti primarnih spremenljivk v končno mnogo izbranih točkah območja $x = x_k$.

Aproksimativna rešitev $v_N(x)$, ki jo tedaj zapišemo kot:

$$v_N(x) = \Im(x \times \{c_k; k = 0,1,...,N\}) \quad ; \quad x \in [0,L]$$

je v funkcijskem smislu opredeljena šele z izbiro interpolacijske funkcije $\Im(x \times \{c_k\})$. Ta ekstrapolira s koeficienti c_k opredeljeno končno množico aproksimativnih diskretnih vrednosti primarnih spremenljivk na celotno funkcijsko območje $[0,L]$.

V okviru postopka izračuna aproksimativne rešitve je torej najprej potrebno določiti nepoznano velikost koeficientov c_k.

FUNKCIJSKI PRISTOP:

Aproksimativno rešitev zapišemo v obliki končne vrste:

$$v_N(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \psi_k(x) \quad ; \quad x \in [0,L]$$

pri čemer so funkcije $\psi_k(x)$ poznane, na intervalu $[0,L]$ zvezne in zvezno odvedljive funkcije. Sam nabor teh funkcij pa mora izkazovati določene lastnosti, ki omogočajo doseganje ekzaktne rešitve, če je le slednja na intervalu $[0,L]$ zvezna in zvezno odvedljiva.

Nepoznano velikost koeficientov c_k je potrebno določiti v okviru postopka izračuna aproksimativne rešitve.

KAKO IZBRATI APROKSIMACIJSKE FUNKCIJE $\psi_k(x)$?

Poznano je, da je mogoče zvezno in poljubnokrat odvedljivo funkcijo $F(x)$ razviti v potenčno vrsto okoli točke $x = x_0$ v skladu s TAYLOR-jevo razvrstitvijo:

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{d^k F}{dx^k}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Glede na lastnosti te razvrstitve (zveznost in zvezna odvedljivost) se zdi morebitna izbira funkcijske oblike v obliki potence $(x - x_0)^k$ za nabor aproksimacijskih funkcij $\psi_k(x)$ povsem razumna:

$$\psi_k(x) = (x - x_0)^k \quad ; \quad k = 0,1,2,...$$

Da bo nabor aproksimacijskih funkcij $\psi_k(x)$ dejansko omogočal tudi popis ekzaktne rešitve, če je le ta ustrezno zvezna in zvezno odvedljiva, mora biti nabor funkcij KOMPLETEN. Torej mora nabor vsebovati po vrsti vse potence od najnižje (k=0) do najvišje, v aproksimacijskem polinomu upoštevane potence (k=N).

IZPUSTITEV KATEREKOLI IZMED NIŽJIH POTENC V OKVIRU IZBRANE STOPNJE APROKSIMACIJE N NI POPRAVLJIVA!

Prav tako je poznano, da je mogoče periodično in odsekoma zvezno in odsekoma zvezno odvedljivo funkcijo $F(x)$ razviti v trigonometrično vrsto v skladu s FOURIER-jevo razvrstitvijo:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi x}{L} + B_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right)$$

kjer je L dolžina polovice periode, A_k, B_k pa so Fourier-jevi koeficienti:

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} F(x) dx \quad , \quad A_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} F(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx \quad ,$$

$$B_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} F(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx \quad ; \quad k = 1,2,3,...$$

Čeprav je sama razvrstitev v celoti zvezna in zvezno odvedljiva je pri njej pomembno predvsem, da omogoča tudi dobro aproksimacijo popisa funkcijskih nezveznosti, kar je pri reševanju realnih problemov zelo dobrodošlo.

Ker je mogoče realni problem, ki je definiran na intervalu $[0, L]$, vselej razširiti v periodičnega, se zdi, glede na lastnosti Fourier-jeve razvrstitve, morebitna izbira funkcijske oblike v obliki harmonika ene ali druge trigonometrične funkcije (lahko pa tudi obeh hkrati) za nabor aproksimacijskih funkcij povsem razumna:

$$\psi_{\mathrm{k}}(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\mathrm{k}\pi x}{L} & ; \quad \mathrm{k}=1,2,3,\ldots\\ \cos\dfrac{\mathrm{k}\pi x}{L} & ; \quad \mathrm{k}=0,1,2,3,\ldots\end{cases}$$

Da bo nabor aproksimacijskih funkcij $\psi_{\mathrm{k}}(x)$ dejansko omogočal tudi popis ekzaktne rešitve, če je ta ustrezno zvezna in zvezno odvedljiva, mora biti nabor funkcij KOMPLETEN. Torej mora nabor vsebovati po vrsti vse harmonike od najnižjega (k=0 ali k=1) do najvišjega, v aproksimacijski trigonometrični vrsti upoštevanega harmonika (k=N).

IZPUSTITEV KATEREGAKOLI IZMED NIŽJIH HARMONIKOV V OKVIRU IZBRANE STOPNJE APROKSIMACIJE N NI POPRAVLJIVA!

PRIMER V.1:
APROKSIMACIJA S KONČNO TAYLORJEVO VRSTO

Analizirajmo aproksimacijo funkcije:

$$y=\sin x \quad ; \quad x\in[0,2\pi]$$

katere Taylorjeva razvrstitev okoli točke $x_0=0$ da:

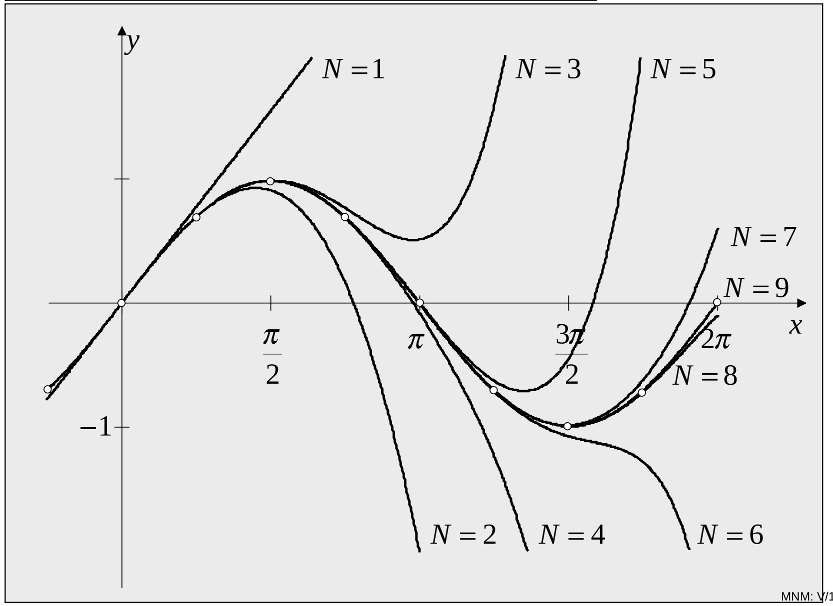
$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots$$

Aproksimacijo funkcije $y=\sin x$ dobimo z upoštevanjem končno mnogo členov v Taylorjevi razvrstitvi :

$$y_{\mathrm{N}}=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}}(-1)^{\mathrm{k}-1}\frac{x^{2\mathrm{k}-1}}{(2\mathrm{k}-1)!}$$

Glede na periodičnost trigonometrične funkcije, ki ima povrhu še neskončno mnogo ničel, je aproksimacija s polinomom končne stopnje, ki pa ima končno mnogo ničel, vprašljiva, vsaj v pogledu aproksimacije na celotnem intervalu $x\in(-\infty,+\infty)$.

Vpliv števila členov na natančnost aproksimirane funkcije



Vpliv števila členov na natančnost aproksimirane funkcije

N	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
1	1.570796	3.141593	4.712389	6.283185
2	0.924832	-2.026120	-12.728642	-35.058517
3	1.004525	0.524044	6.636667	46.546732
4	0.999843	-0.075221	-3.602330	-30.159127
5	1.000004	0.006925	-0.444366	11.899567
6	1.000000	-0.000445	-1.081890	-3.195076
7	1.000000	0.000021	-0.991139	0.624877
8	1.000000	-0.000000	-1.000735	-0.093246
9	1.000000	0.000000	-0.999952	0.010983
10	1.000000	0.000000	-1.000003	-0.001048
∞	1.000000	0.000000	-1.000000	0.000000

PRIMER V.2: APROKSIMACIJA S KONČNO FOURIERJEVO VRSTO

Analizirajmo aproksimacijo s periodo $2L$ periodične odsekoma zvezne funkcije, ki je podana s funkcijskim predpisom:

$$y(x)=\begin{cases}-1 & \dots \quad -L<x<-\frac{L}{2}\\ +1 & \dots \quad -\frac{L}{2}<x<+\frac{L}{2}\\ -1 & \dots \quad +\frac{L}{2}<x<+L\end{cases} \quad ; \quad y(x+2\mathrm{k}L)=y(x) \quad \mathrm{k}\in\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$$

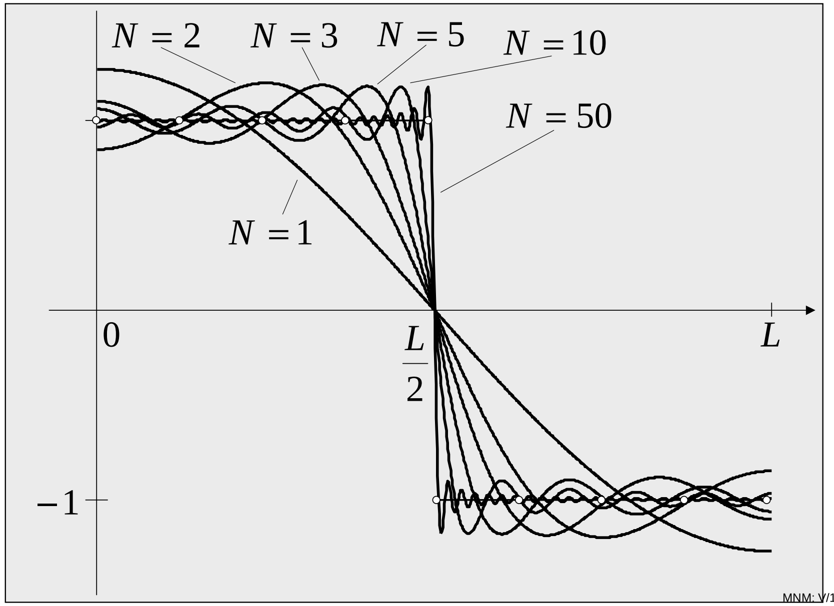
katere Fourierjeva razvrstitev da:

$$y(x)=\frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{L}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{L}+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{L}-\frac{1}{7}\cos\frac{7\pi x}{L}+\dots\right)$$

Aproksimacijo funkcije $y(x)$ dobimo z upoštevanjem končno mnogo členov v Fourierjevi razvrstitvi :

$$y_{\mathrm{N}}=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}}(-1)^{\mathrm{k}-1}\frac{1}{2\mathrm{k}-1}\cos\frac{(2\mathrm{k}-1)\pi x}{L}$$

Vpliv števila členov na natančnost aproksimirane funkcije



Vpliv števila členov na natančnost aproksimirane funkcije

N	0.00	0.20	0.40	0.49
1	1.273240	1.030072	0.393453	0.039993
2	0.848826	1.161223	0.736810	0.079934
3	1.103474	0.906575	0.991458	0.119770
4	0.921583	0.962783	1.138611	0.159448
5	1.063054	1.077235	1.182328	0.198917
10	0.968248	0.960851	0.901140	0.391351
50	0.993634	0.992133	0.979439	1.179013
100	0.996817	0.996066	0.989704	0.902807
1000	0.999682	0.999607	0.998970	0.989871
∞	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

KAKO DOLOČITI KOEFICIENTE c_{k}?

Aproksimativno rešitev $v_{\mathrm{N}}(x)$:

$$v_{\mathrm{N}}(x)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}}c_{\mathrm{k}}\psi_{\mathrm{k}}(x) \quad ; \quad x\in[0,L]$$

določa ob izbranih funkcijah $\psi_{\mathrm{k}}(x)$ še (N+1) neznanih koeficientov c_{k}, katerih rešitev zahteva obstoj ustreznega sistema (N+1) linearno neodvisnih enačb.

Da bi bila aproksimativna rešitev $v_{\mathrm{N}}(x)$ ne glede na stopnjo njene aproksimacije tudi fizikalno konsistentna in verodostojna, mora le-ta, ne glede na privzeto obliko aproksimacijskih funkcij $\psi_{\mathrm{k}}(x)$, v čim večji meri zadostiti ključnim enačbam obravnavanega problema – t.j. vodilni diferencialni enačbi ter enačbam, s katerimi so definirani robni pogoji.

Zato uporabimo kot osnovo za konstrukcijo sistema (N+1) enačb s koeficienti c_{k} kot neznankami najprej enačbe robnih pogojev, zatem pa še na vodilni diferencialni enačbi zasnovane manjkajoče enačbe.

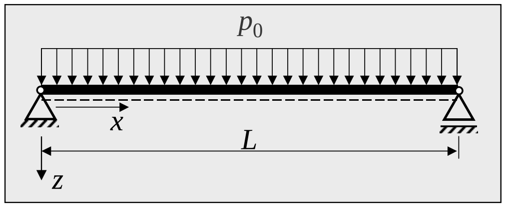
DOBRO JE VEDETI !

Pri izbiri funkcijske oblike aproksimacijskih funkcij $\psi_k(x)$ ter tvorbi aproksimativne rešitve $v_N(x)$, veljavni na celotnem intervalu $[0,L]$, je smotrno upoštevati naravo problema:

- simetričnost ali antisimetričnost problema se izkazuje tudi v funkcijskih rešitvah, ki ohranjajo to lastnost
- ustrezna izbira koordinatnega izhodišča lahko zelo poenostavi aproksimacijsko reševanje problema
- aproksimacijske funkcije, ki avtomatsko izpolnjujejo robne pogoje, zelo poenostavijo aproksimacijsko reševanje problema
- rešitev, ki izkazujejo določeno stopnjo nezveznosti, ni mogoče dobro aproksimirati s potenčnimi aproksimacijskimi funkcijami

PRIMER V.3

Na enostavnem primeru obojestransko členkasto podprtega nosilca dolžine L in konstantnega prereza $(EI = konst)$, obremenjenega z enakomerno obtežbo p_0, analizirajmo aproksimativno reševanje problema.



Aproksimativno reševanje naj bo analizirano z vidika čim učinkovitejšega računskega postopka za določitev koeficientov c_k.

PRIMER V.3.1: ekzaktna rešitev

Glede na konstantnost prečnega prereza $(EI = konst)$ bo rešitev upogibnega problema $w(x)$ zadovoljevala vodilno območno enačbo ter enačbe robnih pogojev v naslednji obliki:

$$EI\,\frac{d^4w}{dx^4} = p_0 \quad ; \quad x \in [0,L]$$

$$w(0) = \frac{d^2w}{dx^2}(0) = 0 \quad \wedge \quad w(L) = \frac{d^2w}{dx^2}(L) = 0$$

Eksaktna rešitev tako definiranega robnega problema je funkcija:

$$w(x) = \frac{p_0L^4}{24EI}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)\right] \quad ; \quad x \in [0,L]$$

z največjim upogibkom in upogibnim momentom v sredini:

$$w_{\max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384}\,\frac{p_0L^4}{EI} \quad \wedge \quad M_{\max} = -EI\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{p_0L^2}{8}$$

PRIMER V.3.2: aproksimativna rešitev A

Lastnosti rešitve upogibnega problema sledijo iz funkcijskih predpisov obremenitvenih in konstitucijskih parametrov, kar v obravnavanem primeru pogojuje za rešitev zvezno in zvezno odvedljivo funkcijo (vsaj do 4-tega odvoda, kolikor je tudi red vodilne diferencialne enačbe).

Aproksimativno rešitev lahko tedaj iščemo v obliki potenčne vrste:

$$w_N(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k \quad ; \quad x \in [0,L]$$

Zaradi narave potenčne vrste in konsistentnosti aproksimativne rešitve z vodilno diferencialno enačbo problema je najmanjše število N, ki ga smemo privzeti $N_{min} = 3$ v primeru, ko je $p(x) = 0$, sicer pa $N_{min} = 4$.

Zapišimo aproksimativno rešitev v obliki, ki zadošča minimalnim pogojem konsistentnosti rešitve $(N_{min} = 4)$, torej:

$$w_{N=4}(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 \quad ; \quad x \in [0,L]$$

Tako izbrana funkcijska oblika je kompletna (vsebuje vse potence do vključno največje $\mathrm{N}=4$) in vsebuje pet po velikosti neznanih koeficientov c_{k}. Da bi lahko določili njihove velikosti, je potrebno poiskati sistem petih linearno neodvisnih enačb, katerih fizikalno ozadje mora biti vsekakor utemeljeno.

KLJUČNO ZAHTEVO ZA OBJEKTIVNOST NEKE REŠITVE (ekzaktne ali aproksimativne) PREDSTAVLJA:

- IZPOLNITEV ROBNIH POGOJEV,
- IZPOLNITEV POGOJEV KONSISTENTNOSTI PREHODA
  ter
- IZPOLNITEV OBMOČNE ENAČBE PROBLEMA.

ZATO TVORIMO
ISKANI SISTEM LINEARNO NEODVISNIH ENAČB
NA OSNOVI IZPOLNITVE ZGORNJIH ZAHTEV V ČIM VEČJI MERI.

Za obravnavani primer, ki ne izkazuje nezveznosti na območju $[0,L]$, sledi:

ENAČBE na osnovi robnih pogojev:
Iz naslova izpolnitve robnih pogojev je možno tvoriti največ toliko enačb, kolikor je na voljo robnih pogojev. Ker imamo v obravnavanem primeru štiri robne pogoje, izhaja od tod sistem štirih enačb:

$$w_{\mathrm{N}=4}(0)=\frac{d^2 w_{\mathrm{N}=4}}{dx^2}(0)=0 \quad \wedge \quad w_{\mathrm{N}=4}(L)=\frac{d^2 w_{\mathrm{N}=4}}{dx^2}(L)=0$$

ENAČBE na osnovi izpolnitve območne enačbe problema:
Iz naslova izpolnitve območne enačbe problema v izbranih točkah območja je možno tvoriti preostalo število manjkajočih enačb. Ker je aproksimacijska rešitev zasnovana na potenčnem nastavku, je zaradi tega leva (z diferencialnim operatorjem) stran območne enačbe vselej potenčne oblike. S pretvorbo funkcijskega dela desne strani enačbe v potenčno vrsto je dana izpolnitev enačbe s primerjanjem potenčnih koeficientov na obeh straneh območne enačbe, seveda ob pogoju, da je tudi stopnja aproksimacijskega polinoma zadostna. V našem primeru sledi:

$$EI\,\frac{d^4 w_{\mathrm{N}=4}}{dx^4}=p_0 \quad ; \quad x\in[0,L]$$

Ker je izbrani aproksimacijski polinom 4-te stopnje in je zaradi tega odvod 4-tega reda konstanta, daje območna enačba ob $p(x)=p_0=konst$ eno samo (za naš problem še edino manjkajočo) enačbo.

Sistem enačb za določitev koeficientov c_{k}:

$$w_{\mathrm{N}=4}(0)=0 \;:$$
$$\frac{d^2 w_{\mathrm{N}=4}}{dx^2}(0)=0 \;:$$
$$w_{\mathrm{N}=4}(L)=0 \;:$$
$$\frac{d^2 w_{\mathrm{N}=4}}{dx^2}(L)=0 \;:$$
$$EI\,\frac{d^4 w_{\mathrm{N}=4}}{dx^4}=p_0 \;:$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 & L^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6L & 12L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_0 \end{Bmatrix}$$

z rešitvijo:

$$\{c_0,c_1,c_2,c_3,c_4\}=\left\{0,L^3,0,-2L,1\right\}\frac{p_0}{24EI}$$

Očitno je rešitev, ki smo jo dobili, eksaktna rešitev, kar seveda ne bi smelo biti nobeno presenečenje:

$$w_{\mathrm{N}=4}(x)\equiv w(x)=\frac{p_0 L^4}{24EI}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^4-2\left(\frac{x}{L}\right)^3+\left(\frac{x}{L}\right)\right] \quad ; \quad x\in[0,L]$$

PRIMER V.3.3: aproksimativna rešitev B

Obravnavani problem izkazuje simetričnost tako v obliki konstrukcije in njenih podpor, kot tudi v obremenitvi. Kot posledica teh značilnosti je tudi deformacijska črta – upogibnica simetrična krivulja.

S postavitvijo izhodišča koordinatnega sistema v sredino nosilca $x\in\left[-\frac{L}{2},+\frac{L}{2}\right]$ lahko aproksimativno rešitev sestavimo sicer ponovno v obliki potenčne vrste, a tokrat tako, da vanjo vključimo le tiste potence, ki izkazujejo simetričnost:

$$w_{\mathrm{N}}(x)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}} c_{2\mathrm{k}}x^{2\mathrm{k}} \quad ; \quad x\in\left[-\frac{L}{2},+\frac{L}{2}\right]$$

Nadalje pa lahko še ugotovimo, da pomeni izpolnitev robnih pogojev na enem robu zaradi simetričnosti izbrane funkcijske oblike:

$$w_{\mathrm{N}}(-x)=w_{\mathrm{N}}(+x);\quad x\in\left[-\frac{L}{2},+\frac{L}{2}\right]$$

in lastnosti, ki jih imajo njeni odvodi:

$$\frac{d^{2\mathrm{r}-1}w_{\mathrm{N}}}{dx^{2\mathrm{r}-1}}(-x)=-\frac{d^{2\mathrm{r}-1}w_{\mathrm{N}}}{dx^{2\mathrm{r}-1}}(+x)\quad\wedge\quad\frac{d^{2\mathrm{r}}w_{\mathrm{N}}}{dx^{2\mathrm{r}}}(-x)=+\frac{d^{2\mathrm{r}}w_{\mathrm{N}}}{dx^{2\mathrm{r}}}(+x)$$
$$\mathrm{r}=1,2,\ldots,\mathrm{N}$$

avtomatično že tudi izpolnitev robnih pogojev na drugem robu.

Zapišimo aproksimativno rešitev v obliki, ki zadošča minimalnim pogojem konsistentnosti rešitve $(\mathrm{N}_{\min}=2)$, torej:

$$w_{\mathrm{N=2}}(x)=c_0+c_2x^2+c_4x^4\quad;\quad x\in\left[-\frac{L}{2},+\frac{L}{2}\right]$$

Izbrana funkcijska oblika je kompletna (vsebuje vse sode potence do vključno največje $2\mathrm{N}=4$) in vsebuje tri neznane koeficiente c_{k}. Glede na predhodni primer se število enačb s pet reducira na tri, kar je neposredna posledica vključitve popolnejšega vedenja o problemu v aproksimacijski nastavek.

ENAČBE na osnovi robnih pogojev:

V obravnavanem primeru imamo sicer štiri robne pogoje, vendar daje zaradi privzete funkcijske oblike rešitve njihovo upoštevanje tako na enem kot na drugem robu med seboj identične (in zaradi tega linearno odvisne) enačbe. Izpolnitev robnih pogojev na enem robu pogojuje sistem dveh enačb:

$$w_{\mathrm{N=2}}\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{d^2w_{\mathrm{N=2}}}{dx^2}\left(\frac{L}{2}\right)=0$$

ENAČBE na osnovi izpolnitve območne enačbe problema:

Manjkajoča enačba za dopolnitev iskanega sistema enačb sledi z izpolnitvijo vodilne enačbe.

$$EI\frac{d^4w_{\mathrm{N=2}}}{dx^4}=p_0\quad;\quad x\in\left[-\frac{L}{2},+\frac{L}{2}\right]$$

Sistem enačb za določitev koeficientov c_{k}:

$$w_{\mathrm{N=2}}\left(\frac{L}{2}\right)=0\ :\qquad \frac{d^2w_{\mathrm{N=2}}}{dx^2}\left(\frac{L}{2}\right)=0\ :\qquad EI\frac{d^4w_{\mathrm{N=2}}}{dx^4}=p_0\ :$$

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{L^2}{4} & \frac{L^4}{16}\\ 0 & 2 & 3L^2\\ 0 & 0 & 24EI\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_0\\ c_2\\ c_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ p_0\end{Bmatrix}$$

z rešitvijo:

$$\{c_0,c_2,c_4\}=\{5L^4,-24L^2,16\}\frac{p_0}{384EI}$$

Ponovno smo dobili eksaktno rešitev:

$$w_{\mathrm{N=2}}(x)\equiv w(x)=\frac{p_0L^4}{384EI}\left[16\left(\frac{x}{L}\right)^4-24\left(\frac{x}{L}\right)^2+5\right]\quad;\quad x\in\left[-\frac{L}{2},+\frac{L}{2}\right]$$

PRIMER V.3.4: aproksimativna rešitev C

Reševanje aproksimativne rešitve lahko še nadalje izboljšamo, če v funkcijsko obliko vključimo funkcijski del, ki že *a priori* zagotavlja izpolnitev robnih pogojev nad primarnimi spremenljivkami.

V obravnavanem primeru sta robna pogoja nad primarnimi spremenljivkami dva:

$$w_{\mathrm{N=2}}\left(-\frac{L}{2}\right)=w_{\mathrm{N=2}}\left(+\frac{L}{2}\right)=0$$

Aproksimativno rešitev lahko sestavimo sicer ponovno v obliki potenčne vrste, a tokrat tako, da iz vrste izpostavimo funkcijski del, ki zagotavlja izpolnitev robnih pogojev nad primarnimi spremenljivkami. Z ohranitvijo simetrijskih lastnosti rešitve lahko za obravnavani primer zapišemo:

$$w_{\mathrm{N}}(x)=\left(L^2-4x^2\right)\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}}c_{2\mathrm{k}}x^{2\mathrm{k}}\quad;\quad x\in\left[-\frac{L}{2},+\frac{L}{2}\right]$$

Zapišimo aproksimativno rešitev v obliki, ki zadošča minimalnim pogojem konsistentnosti rešitve $(\mathrm{N}_{\min}=1)$, torej:

$$w_{\mathrm{N=1}}(x)=\left(L^2-4x^2\right)\left(c_0+c_2x^2\right) \quad ; \quad x\in\left[-\frac{L}{2},+\frac{L}{2}\right]$$

ENAČBE na osnovi robnih pogojev:

Zaradi simetričnega značaja funkcijskega nastavka ter vključitve funkcijskega dela, ki zagotavlja izpolnitev robnih pogojev nad primarnimi spremenljivkami ne glede na velikost koeficientov c_k, pogojuje izpolnitev robnih pogojev nad sekundarnimi spremenljivkami (na enem robu !) eno enačbo:

$$\frac{d^2w_{\mathrm{N=1}}}{dx^2}\left(\frac{L}{2}\right)=0$$

ENAČBE na osnovi izpolnitve območne enačbe problema:

Manjkajoča enačba za dopolnitev iskanega sistema enačb sledi z izpolnitvijo vodilne enačbe:

$$EI\,\frac{d^4w_{\mathrm{N=1}}}{dx^4}=p_0 \quad ; \quad x\in\left[-\frac{L}{2},+\frac{L}{2}\right]$$

Sistem enačb za določitev koeficientov c_k :

$$\frac{d^2w_{\mathrm{N=1}}}{dx^2}\left(\frac{L}{2}\right)=0 \;:$$

$$EI\,\frac{d^4w_{\mathrm{N=1}}}{dx^4}=p_0 \;:$$

$$\begin{bmatrix}8 & 10L^2\\ 0 & 96EI\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_0\\ c_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ p_0\end{Bmatrix}$$

z rešitvijo:

$$\{c_0,c_2\}=\{5L^2,-4\}\frac{p_0}{384EI}$$

Ponovno smo dobili eksaktno rešitev:

$$w_{\mathrm{N=1}}(x)\equiv w(x)=\frac{p_0L^4}{384EI}\left[1-4\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\left(5-4\left(\frac{x}{L}\right)^2\right) \;;\; x\in\left[-\frac{L}{2},+\frac{L}{2}\right]$$

POMEMBNO !

Ugotovili smo, da se postopek reševanja aproksimativne rešitve izboljša, če v funkcijsko obliko vključimo funkcijski del, ki že *a priori* zagotavlja izpolnitev robnih pogojev nad primarnimi spremenljivkami.

Vendar pa velja pri tem ugotoviti, da je šlo za t.i. HOMOGENE robne pogoje nad primarnimi spremenljivkami:

Robna vrednost primarne spremenljivke = 0

Vsaj načeloma velja tudi, da bi z vključitvijo funkcijskega dela, ki bi že *a priori* zagotavljal izpolnitev morebitnih homogenih robnih pogojev tudi nad sekundarnimi spremenljivkami, postopek reševanja aproksimativne rešitve dodatno izboljšali.

VENDAR ZAHTEVA IZBIRA PRIMERNE FUNKCIJSKE OBLIKE POSEBNO POZORNOST IN PREVIDNOST.

HOMOGENI ROBNI POGOJI:

Homogenost robnih pogojev se izraža v tem, da so na robu poznane veličine (primarne ali sekundarne spremenljivke) po velikosti nične.

Predpostavimo, da iskano aproksimativno rešitev $v_{\mathrm{N}}(x)$ zapišemo v obliki produkta dveh potenčnih funkcij:

$$v_{\mathrm{N}}(x)=\omega(x)\sigma_{\mathrm{N}}(x) \quad ; \quad x\in[0,L]$$

kjer naj bi bila funkcija $\omega(x)$ takšne oblike, da izpolnjuje vsaj homogene robne pogoje nad primarnimi spremenljivkami, medtem ko funkcijo $\sigma_{\mathrm{N}}(x)$ opredeljuje aproksimacijski polinom:

$$\sigma_{\mathrm{N}}(x)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}}c_{\mathrm{k}}x^{\mathrm{k}} \quad ; \quad x\in[0,L]$$

Obravnavajmo problem splošno, tako da lahko izsledke analize uporabimo za obe obravnavani vodilni enačbi 2-ega oz. 4-ega reda.

Iz zgradbe tako zasnovane aproksimativne rešitve $v_N(x)$ in njenih odvodov:

$$v_N = \omega\sigma_N$$
$$\frac{dv_N}{dx} = \frac{d\omega}{dx}\sigma_N + \omega\frac{d\sigma_N}{dx}$$
$$\frac{d^2 v_N}{dx^2} = \frac{d^2\omega}{dx^2}\sigma_N + 2\frac{d\omega}{dx}\frac{d\sigma_N}{dx} + \omega\frac{d^2\sigma_N}{dx^2}$$
$$\frac{d^3 v_N}{dx^3} = \frac{d^3\omega}{dx^3}\sigma_N + 3\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\frac{d\sigma_N}{dx} + \frac{d\omega}{dx}\frac{d^2\sigma_N}{dx^2}\right) + \omega\frac{d^3\sigma_N}{dx^3}$$

kjer je razvidna kompleksnost povezav med funkcijama $\omega(x)$ in $\sigma_N(x)$ ter njunimi odvodi, lahko zaključimo, da je dejansko mogoče v zgornjem smislu zajeti zgolj robne pogoje nad primarnimi (najprej za osnovno in šele zatem še za drugo) spremenljivkami in to v homogeni obliki.

Obravnavajmo robne pogoje na robu $x = c$:

Osna obremenitev:

Izpolnitev robnega pogoja za primarno spremenljivko:

Homogeno obliko robnega pogoja primarne spremenljivke $v_N(x)$ na robu $x = c$:

$$v_N(c) = \omega(c)\sigma_N(c) = 0$$

lahko izpolnimo s primerno izbiro funkcije $\omega(x)$, tako da velja:

$$\omega(c) = 0$$

V obliki produkta:

$$v_N(x) = \omega(x)\,\sigma_N(x)$$

zasnovana aproksimacijska rešitev torej z ustrezno funkcijsko izbiro faktorja $\omega(x)$ zadosti homogenemu robnemu pogoju za primarno spremenljivko.

Izpolnitev robnega pogoja za sekundarno spremenljivko:

Iz zgradbe prvega odvoda funkcije $v_N(x)$:

$$\frac{dv_N}{dx} = \frac{d\omega}{dx}\sigma_N + \omega\frac{d\sigma_N}{dx}$$

je mogoče razbrati, da izpolnitev homogene oblike robnega pogoja sekundarne spremenljivke, ki se izraža s prvim odvodom funkcije $v_N(x)$, ni mogoča samo z izbiro funkcije $\omega(x)$. Zaradi konjugiranosti primarne in sekundarne spremenljivke namreč velja $\omega(c) \neq 0$. Funkcija $\omega(x)$, ki bi izpolnjevala dani robni pogoj, je v celoti soodvisna od izbranega aproksimacijskega nastavka $\sigma_N(x)$ in števila členov, določenih z N.

Upogibna obremenitev:

Izpolnitev robnega pogoja za prvo primarno spremenljivko:

Homogeno obliko robnega pogoja primarne spremenljivke $v_N(x)$ na robu $x = c$:

$$v_N(c) = \omega(c)\sigma_N(c) = 0$$

lahko izpolnimo s primerno izbiro funkcije $\omega(x)$, tako da velja:

$$\omega(c) = 0$$

V obliki produkta:

$$v_N(x) = \omega(x)\,\sigma_N(x)$$

zasnovana aproksimacijska rešitev torej z ustrezno funkcijsko izbiro faktorja $\omega(x)$ zadosti homogenemu robnemu pogoju za osnovno (prvo !) primarno spremenljivko.

Izpolnitev robnega pogoja za drugo sekundarno spremenljivko:

Iz zgradbe prvega odvoda funkcije $v_\mathrm{N}(x)$:

$$\frac{dv_\mathrm{N}}{dx}=\frac{d\omega}{dx}\sigma_\mathrm{N}+\omega\frac{d\sigma_\mathrm{N}}{dx}$$

je mogoče razbrati, da je izpolnitev homogene oblike robnega pogoja za drugo primarno spremenljivko, ki se izraža s prvim odvodom funkcije $v_\mathrm{N}(x)$, mogoča le v primeru, ko se preostali robni pogoj nanaša na osnovno primarno spremenljivko in je le-ta prav tako homogene oblike. Izbira funkcije $\omega(x)$ je neodvisna od oblike aproksimacijskega nastavka $\sigma_\mathrm{N}(x)$, pogojena pa je z:

$$\omega(c)=\frac{d\omega}{dx}(c)=0$$

V obliki produkta:

$$v_\mathrm{N}(x)=\omega(x)\,\sigma_\mathrm{N}(x)$$

zasnovana aproksimacijska rešitev torej z ustrezno funkcijsko izbiro faktorja $\omega(x)$ zadosti homogeni obliki robnega pogoja za obe primarni spremenljivki.

Izpolnitev robnega pogoja za prvo in drugo sekundarno spremenljivko:

Iz zgradbe drugega in tretjega odvoda funkcije $v_\mathrm{N}(x)$, ki opredeljujeta sekundarni spremenljivki:

$$\frac{d^2v_\mathrm{N}}{dx^2}=\frac{d^2\omega}{dx^2}\sigma_\mathrm{N}+2\frac{d\omega}{dx}\frac{d\sigma_\mathrm{N}}{dx}+\omega\frac{d^2\sigma_\mathrm{N}}{dx^2}$$
$$\frac{d^3v_\mathrm{N}}{dx^3}=\frac{d^3\omega}{dx^3}\sigma_\mathrm{N}+3\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\frac{d\sigma_\mathrm{N}}{dx}+\frac{d\omega}{dx}\frac{d^2\sigma_\mathrm{N}}{dx^2}\right)+\omega\frac{d^3\sigma_\mathrm{N}}{dx^3}$$

je mogoče razbrati, da že izpolnitev homogene oblike robnega pogoja prve sekundarne spremenljivke, ki se izraža z drugim odvodom funkcije $v_\mathrm{N}(x)$, ni mogoča samo z izbiro funkcije $\omega(x)$. Izpolnitev homogenega robnega pogoja za sekundarno spremenljivko bi namreč pogojevala tako $\omega(c)=0$ kot $(d\omega/dx)_{x=c}=0$. To pa zaradi konjugiranosti druge primarne in prve sekundarne spremenljivke, ki ob poznani prvi sekundarni spremenljivki postavlja drugo primarno spremenljivko kot neznano in v splošnem različno od nič, torej ni mogoče.

Zaključimo lahko, da izbranega funkcijskega produkta iz vidika izpolnitve robnih pogojev sekundarnih spremenljivk ni mogoče enostavno določiti.

NEHOMOGENI ROBNI POGOJI:

Nehomogenost robnih pogojev se izraža v tem, da so na robu poznane veličine (primarne ali sekundarne spremenljivke) po velikosti od nič različne.

Predpostavimo, da iskano aproksimativno rešitev $v_\mathrm{N}(x)$ zapišemo v obliki vsote dveh funkcij:

$$v_\mathrm{N}(x)=\lambda(x)+\mu_\mathrm{N}(x)\quad;\quad x\in[0,L]$$

pri čemer naj bi bila funkcija $\lambda(x)$ takšne oblike, da izpolnjuje nehomogene robne pogoje nad primarnimi spremenljivkami, medtem ko funkcija $\mu_\mathrm{N}(x)$, ki jo opredeljuje aproksimacijski polinom, v splošnem oblike:

$$\mu_\mathrm{N}(x)=\omega(x)\sigma_\mathrm{N}(x)=\omega(x)\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}}c_\mathrm{k}x^\mathrm{k}\quad;\quad x\in[0,L]$$

izpolnjuje homogeno obliko robnih pogojev nad primarnimi spremenljivkami.

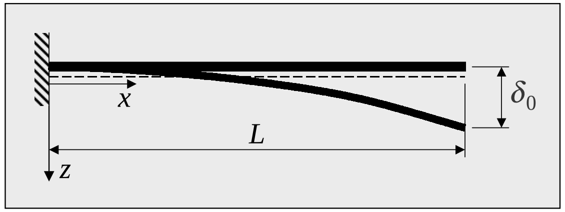
Iz zgradbe tako zasnovane aproksimativne rešitve $v_\mathrm{N}(x)$ in njenih odvodov:

$$v_\mathrm{N}=\lambda+\mu_\mathrm{N}$$
$$\frac{dv_\mathrm{N}}{dx}=\frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\mu_\mathrm{N}}{dx}$$
$$\frac{d^2v_\mathrm{N}}{dx^2}=\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\frac{d^2\mu_\mathrm{N}}{dx^2}$$
$$\frac{d^3v_\mathrm{N}}{dx^3}=\frac{d^3\lambda}{dx^3}+\frac{d^3\mu_\mathrm{N}}{dx^3}$$

in ugotovitev pri obravnavi homogenih robnih pogojev lahko zaključimo, da je dejansko mogoče v zgornjem smislu zajeti zgolj robne pogoje nad primarnimi (najprej za osnovno in šele zatem še za drugo) spremenljivkami.

PRIMER V.4

Na primeru enostransko vpetega nosilca dolžine L in konstantnega prereza $(EI = konst)$, katerega prosti konec premaknemo v prečni smeri za premik velikosti δ_0, analizirajmo aproksimativno reševanje problema v smislu najučinkovitejšega pristopa pri sestavi aproksimativne rešitve.



PRIMER V.4.1: ekzaktna rešitev

Glede na konstantnost prečnega prereza $(EI = konst)$ bo rešitev upogibnega problema $w(x)$ zadovoljevala vodilno območno enačbo ter enačbe robnih pogojev v naslednji obliki:

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}=0 \quad ; \quad x\in[0,L]$$

$$w(0)=\frac{dw}{dx}(0)=0 \quad \wedge \quad w(L)=\delta_0 \ , \quad \frac{d^2w}{dx^2}(L)=0$$

Eksaktna rešitev tako definiranega robnega problema je funkcija:

$$w(x)=\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\frac{\delta_0}{2} \quad ; \quad x\in[0,L]$$

PRIMER V.4.2: aproksimativna rešitev

Glede na to, da se trije od štirih robnih pogojev nanašajo na predpisane vrednosti primarnih spremenljivk na robu, od katerih sta dva pogoja homogene oblike:

$$w(0)=\frac{dw}{dx}(0)=0$$

eden pa nehomogene oblike:

$$w(L)=\delta_0$$

je smotrno aproksimativno rešitev $w_N(x)$ danega problema zasnovati v obliki vsote dveh funkcij:

$$w_N(x)=\lambda(x)+\mu_N(x) \quad ; \quad x\in[0,L]$$

pri čemer naj glede na izpolnjevanje robnih pogojev nad primarnimi spremenljivkami funkcija $\lambda(x)$ izpolnjuje robne pogoje v celoti (torej tudi nehomogeni del), funkcija $\mu_N(x)$ pa le njihov homogeni del.

Funkcijski obliki $\lambda(x)$ ter $\mu_N(x)$ naj izkazujeta torej naslednje lastnosti:

$$\begin{aligned}
&\lambda(0)=0 && \wedge && \mu_N(0)=0\\
&\frac{d\lambda}{dx}(0)=0 && \wedge && \frac{d\mu_N}{dx}(0)=0\\
&\lambda(L)=\delta_0 && \wedge && \mu_N(L)=0
\end{aligned}$$

Funkciji, ki izkazujeta želene lastnosti, sta oblike:

$$\lambda(x)=\left(\frac{x}{L}\right)^2\delta_0 \quad \wedge \quad \mu_N(x)=\omega(x)\sigma_N(x)$$

$$\omega(x)=x^2(L-x) \quad \wedge \quad \sigma_N(x)=\sum_{k=0}^{N}c_k x^k \quad ; \quad x\in[0,L]$$

Vloga funkcijskega nastavka $\sigma_N(x)$ v potenčni obliki je zagotoviti izpolnitev še preostalega, s funkcijama $\lambda(x)$ in $\omega(x)$ neizpolnjenega robnega pogoja nad sekundarno spremenljivko.

Zapišimo aproksimativno rešitev v obliki, ki zadošča minimalnim pogojem konsistentnosti rešitve. Iz osnovne diferencialne problema sledi, da je najnižja možna stopnja polinoma 3. Glede na to, da je že funkcija $\omega(x)$ 3-je stopnje, je $(\mathrm{N}_{\min}=0)$ najnižja možna stopnja potenčnega nastavka $\sigma_{\mathrm{N}}(x)$, tako da zapišemo rešitev našega problema kot:

$$w_{\mathrm{N}=0}(x)=\left(\frac{x}{L}\right)^2\delta_0+x^2(L-x)c_0 \quad ; \quad x\in[0,L]$$

z enim samim neznanim koeficientom c_0 .

Edino enačbo, ki jo potrebujemo za izračun koeficienta c_0 , dobimo z izpolnitvijo še edinega neizpolnjenega robnega pogoja:

$$\frac{d^2w_{\mathrm{N}=0}}{dx^2}(L)=0$$

medtem ko je diferencialna enačba za dano obliko aproksimacijske rešitve identično izpolnjena za poljubno vrednost koeficienta c_0.

Enačba, iz katere določimo koeficient c_0 , je oblike:

$$2Lc_0-\frac{\delta_0}{L^2}=0$$

z rešitvijo:

$$c_0=\frac{\delta_0}{2L^3}$$

Ponovno smo dobili eksaktno rešitev:

$$w_{\mathrm{N}=0}(x)\equiv w(x)=\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\frac{\delta_0}{2} \quad ; \quad x\in[0,L]$$