REŠEVANJE PROBLEMOV, KATERIH REŠITEV IZKAZUJE FUNKCIJSKE SPREMEMBE IN NEZVEZNOSTI

Sprememba v funkcijskem predpisu osnovne primarne spremenljivke je pogojevana s spremembo obremenitvenega (kontinuirna obtežba, koncentrirana obtežba, podpore) ali konstitucijskega (geometrija prečnega prereza, topologija območja, gradivo) predpisa.

Analizirajmo primer, ko izkazuje rešitev območne diferencialne enačbe $v(x)$:

$$Dv(x) = f(x) \quad ; \quad x \in [0,L]$$

v eni ali več notranjih točkah intervala $[0,L]$ spremembo funkcijskega predpisa. Ta ima za posledico vselej tudi nezveznost v vsaj enem od odvodov rešitve $v(x)$.

Ne glede na število različnih funkcijskih predpisov $v_k(x)$, s katerimi je definirana rešitev $v(x)$ na intervalu $[0,L]$, so tako osnovna primarna spremenljivka $v(x)$ kot tudi morebitne preostale primarne spremenljivke višjega reda na celotnem intervalu $[0,L]$ vselej zvezne funkcije. Ta lastnost izhaja iz zahtevane materialne konsistentnosti problema.

Glede na spremenljivost funkcijskega predpisa za osnovno primarno spremenljivko $v(x)$ razdelimo interval $[0,L]$ na podintervale $[a_k, b_k] \subset [0,L]$:

$$x \in [a_k, b_k] \ , \ k = 1,2,\ldots,n$$
$$0 = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \ldots < b_{n-1} = a_n < b_n = L$$

za katere naj velja (za vsakega posebej) enovitost funkcijskih predpisov obremenitvenih in konstitutivnih parametrov znotraj podintervala.

Rešitev $v(x)$ v danem primeru določa končna množica zvezno in zvezno odvedljivih funkcij $v_k(x)$, ki so definirane na pripadajočih podintervalih $[a_k, b_k]$:

$$v(x) = \bigcup_{k=1}^{k=n} v_k(x) \ ; \ v_k(x) \ldots \ x \in [a_k, b_k]$$

Posebnost danega funkcijskega zapisa je v tem, da gre za zlepek posameznih, na podintervalih $[a_k, b_k]$ definiranih, funkcijskih predpisov. V smislu aproksimativnega reševanja z do sedaj poznanim pristopom potenčne aproksimacije po celotnem intervalu $[0,L]$, ki pogojuje zveznost in zvezno odvedljivost aproksimacije, prikazani funkcijski zapis ne nudi ustrezne podlage za učinkovito aproksimativno reševanje, ki bi vključilo tudi prisotne funkcijske spremembe in nezveznosti.

V nasprotju s funkcijskim zapisom rešitve $v(x)$, ki temelji na funkcijskem obnašanju znotraj podintervalov $[a_k, b_k]$ definiranih funkcij $v_k(x)$:

$$v(x) = \bigcup_{k=1}^{k=n} v_k(x) = \begin{cases} v_1(x) & \ldots \ x \in [a_1, b_1] \\ \vdots & \vdots \\ v_k(x) & \ldots \ x \in [a_k, b_k] \\ \vdots & \vdots \\ v_n(x) & \ldots \ x \in [a_n, b_n] \end{cases}$$

bomo v nadaljevanju pokazali, da je mogoče rešitev $v(x)$ zapisati v obliki vsote funkcijskega dela $v_0(x)$, ki je na celotnem intervalu $[0,L]$ zvezna in zvezno odvedljiva funkcija, ter funkcijskega dela $\tilde{v}(x)$, ki vsebuje vse s problemom pogojene nezveznosti:

$$v(x) = v_0(x) + \tilde{v}(x) \quad ; \quad x \in [0,L]$$

Funkcijo $\tilde{v}(x)$ zapišimo v obliki končne vrste s funkcijskimi členi $\tilde{v}_k(x)$:

$$\tilde{v}(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \tilde{v}_k(x) \ ; \ \tilde{v}_k(x) \ldots \ x \in [0,L]$$

pri čemer naj bodo funkcije $\tilde{v}_k(x)$ na celotnem intervalu $[0,L]$ sicer zvezne, ne pa v splošnem tudi zvezno odvedljive funkcije. Njihove lastnosti opredelimo z:

$$\tilde{v}_k(x) = \begin{cases} 0 & \ldots \ x \in [0, a_k] \\ g_k(x) & \ldots \ x \in (a_k, L] \end{cases} \quad , \ k = 2,\ldots,n$$

pri čemer so funkcije $g_k(x)$ zvezne in zvezno odvedljive funkcije na intervalih $(a_k, L]$.

Za poenostavitev zapisov v nadaljevanju je ugodno vpeljati še nično funkcijo $\tilde{v}_1(x)$:

$$\tilde{v}_1(x) = 0 \ \ldots \ x \in [0,L]$$

Celotno rešitev $v(x)$ zapišemo tedaj kot:

$$v(x)=v_0(x)+\sum_{k=1}^{k=n}\tilde{v}_k(x) \quad ; \quad x\in[0,L]$$

Glede na zgradbo funkcij $\tilde{v}_k(x)$ je mogoče zaključiti, da je funkcija $v_0(x)$ na podintervalu $[0,b_1]$ v bistvu identična funkcijskemu predpisu $v_1(x)$, sicer veljavnem na začetnem podintervalu $[0,b_1]$.

Če v nadaljevanju opredelimo razširitev veljavnosti funkcijskega predpisa $v_1(x)$ iz podintervala $[0,b_1]$ na celotni interval $[0,L]$, kar simbolično zapišemo s simbolom $(\hat{\ })$ nad funkcijo, katere veljavnost razširjamo:

$$v_1(x) \quad \ldots \quad x\in[0,b_1] \quad ; \quad v_1(x)\rightarrow\hat{v}_1(x) \quad \ldots \quad x\in[0,L]$$

lahko ugotovimo, da je tako vpeljana funkcija $\hat{v}_1(x)$ na celotnem intervalu $[0,L]$ zvezna in zvezno odvedljiva funkcija, ob tem pa izpolnjuje diferencialno enačbo:

$$D\hat{v}_1(x)=\hat{f}_1(x) \quad \ldots \quad x\in[0,L]$$

Ob tem smo seveda izvedli še razširitev veljavnosti funkcijskega predpisa $f_1(x)$ iz podintervala $[0,b_1]$ na celotni interval $[0,L]$, kar izraža funkcijski predpis $\hat{f}_1(x)$.

Ker izkazuje funkcija $v_0(x)$ povsem enake lastnosti v pogledu zveznosti in zvezne odvedljivosti na celotnem intervalu $[0,L]$, prav tako pa tudi v smislu izpolnjevanja vodilne diferencialne enačbe na podintervalu $[0,b_1]$ ter robnih pogojev pri $x=0$ in nenazadnje vseh lastnosti, ki izhajajo iz zahtevane konsistentnosti rešitve na meji $x=b_1$, je identičnost funkcijskega predpisa $v_0(x)$ s predpisom $\hat{v}_1(x)$ očitna:

$$v_0(x)\equiv\hat{v}_1(x) \quad \ldots \quad x\in[0,L]$$

Glede na funkcijski predpis $v_1(x)$, ki je veljaven na podintervalu $[0,b_1]$ in izpolnjuje diferencialno enačbo:

$$Dv_1(x)=f_1(x) \quad ; \quad x\in[0,b_1]$$

izpolnjuje funkcijski predpis $v_0(x)\equiv\hat{v}_1(x)$ diferencialno enačbo:

$$Dv_0(x)\equiv D\hat{v}_1(x)=\hat{f}_1(x) \quad \ldots \quad x\in[0,L]$$

na celotnem intervalu $[0,L]$.

Spreminjanje funkcijskega predpisa rešitve $v(x)$:

$$v(x)=v_0(x)+\sum_{k=1}^{k=n}\tilde{v}_k(x) \quad ; \quad x\in[0,L]$$

vzdolž intervala $[0,L]$ skladno s spreminjanjem obremenitvenih in konstitutivnih parametrov po podintervalih omogoča množica funkcij $g_k(x)$, ki so na pripadajočih intervalih $(a_k,L]$ zvezne in zvezno odvedljive funkcije.

Funkcijska oblika in s tem tudi lastnosti funkcij $g_k(x)$ so opredeljene z lastnostmi rešitve $v(x)$ na meji med posameznimi podintervali ter funkcijsko obliko obremenitvenega dela vodilne diferencialne enačbe na teh podintervalih.

Tako pogojuje konsistentnost rešitve $v(x)$ v smislu zveznosti primarnih spremenljivk še naslednje lastnosti funkcij $g_k(x)$:

$$\lim_{x\to a_k}\frac{d^r g_k(x)}{dx^r}=0 \quad ; \quad r=0,1,\ldots,(m-1) \quad \wedge \quad k=2,\ldots,n$$

pri čemer je $2m$ red vodilne diferencialne enačbe problema.

Nasprotno pa konsistentnost rešitve $v(x)$ v smislu konsistentne spremembe sekundarnih spremenljivk, ki se lahko v splošnem izkazuje z nezveznostjo odvodov višjega reda, pogojuje še naslednje lastnosti funkcij $g_k(x)$:

$$\lim_{x\to a_k}\frac{d^r g_k(x)}{dx^r}=\hat{\beta}^{(k)}_{r-m+1} \quad ; \quad r=m,(m+1),\ldots,(2m-1) \quad \wedge \quad k=2,\ldots,n$$

kjer so koeficienti $\hat{\beta}^{(k)}_j$ v primeru pogojene nezveznosti od nič različni.

Glede na zapisane lastnosti je funkcijo $g_k(x)$ mogoče zapisati kot vsoto potenčnih prispevkov $g^{\beta}_k(x)$, kjer naj indeks β opredeljuje funkcijski prispevek konsistentnega prehoda sekundarnih spremenljivk v funkcijskem predpisu za $g_k(x)$:

$$g^{\beta}_k(x)=\sum_{j=1}^{m}\beta^{(k)}_j(x-a_k)^{m+j-1} \quad ; \quad x\in(a_k,L]$$

kjer se koeficienti $\beta^{(k)}_j$ od koeficientov $\hat{\beta}^{(k)}_j$ razlikujejo za multiplikativni faktor:

$$(r!)\beta^{(k)}_{r-m+1}=\hat{\beta}^{(k)}_{r-m+1} \quad ; \quad r=m,(m+1),\ldots,(2m-1)$$

Označimo nadalje z $f_k(x)$ funkcijski predpis, ki določa desno stran vodilne diferencialne enačbe na podintervalu $[a_k, b_k]$. Za rešitev $v_k(x)$ na omenjenem podintervalu tedaj velja:

$$D v_k(x) = f_k(x) \quad ; \quad x \in [a_k, b_k]$$

Razširitev veljavnosti funkcijskega predpisa $f_k(x)$ iz podintervala $[a_k, b_k]$ na podinterval $(a_k, L]$ naj opredeljuje funkcijski predpis, ki ga označimo z $\hat{f}_k(x)$:

$$f_k(x) \quad \dots \quad x \in [a_k, b_k] \quad ; \quad f_k(x) \to \hat{f}_k(x) \quad \dots \quad x \in (a_k, L]$$

Analogno lahko razširimo veljavnost funkcijskega predpisa $v_k(x)$ iz podintervala $[a_k, b_k]$ na podinterval $(a_k, L]$, kar opredelimo s funkcijskim predpisom $\hat{v}_k(x)$:

$$v_k(x) \quad \dots \quad x \in [a_k, b_k] \quad ; \quad v_k(x) \to \hat{v}_k(x) \quad \dots \quad x \in (a_k, L]$$

Pri tem izpolnjuje funkcija $\hat{v}_k(x)$ na tem podintervalu tudi diferencialno enačbo:

$$D \hat{v}_k(x) = \hat{f}_k(x) \quad ; \quad x \in (a_k, L]$$

kar je razširitev osnovne diferencialne enačbe za funkcijo $v_k(x)$ iz podintervala $[a_k, b_k]$ na podinterval $(a_k, L]$.

Glede na to, da velja na intervalu $(a_k, L]$ za funkcijo $\hat{v}_k(x)$ funkcijska odvisnost:

$$\hat{v}_k(x) = v_0(x) + \sum_{i=1}^{i=k} \tilde{v}_i(x) \quad ; \quad x \in (a_k, L]$$

lahko iz identitete:

$$D\hat{v}_k(x) = D\left(v_0(x) + \sum_{i=1}^{i=k} \tilde{v}_i(x) \right) = D\left(v_0(x) + \sum_{i=1}^{i=k-1} \tilde{v}_i(x) + \tilde{v}_k(x) \right) =$$
$$= D\left(\hat{v}_{k-1}(x) + \tilde{v}_k(x) \right) \quad ; \quad x \in (a_k, L]$$

izvedemo pogoj, kateremu mora zadostiti funkcija $\tilde{v}_k(x)$ v smislu korektivnega učinka na funkcijo $\hat{v}_{k-1}(x)$:

$$D\tilde{v}_k(x) = D\hat{v}_k(x) - D\hat{v}_{k-1}(x) = \hat{f}_k(x) - \hat{f}_{k-1}(x) \quad ; \quad x \in (a_k, L]$$

Pogoj opredeljuje, v nasprotju z do sedaj poznanimi lastnostmi, izhajajočimi iz pogojev konsistentnega prehoda na meji med posameznimi podintervali, korekcijo glede na spremembo funkcijskih parametrov vodilne diferencialne enačbe.

Iz zapisane lastnosti funkcije $\tilde{v}_k(x)$ sledi tudi obnašanje funkcije $g_k(x)$:

$$D g_k(x) = \hat{f}_k(x) - \hat{f}_{k-1}(x) \quad ; \quad x \in (a_k, L]$$

Ker je na podintervalu $(a_k, L]$ desna stran enačbe po definiciji zvezna funkcija, jo moremo razviti po potencah $(x - a_k)$ skladno s Taylorjevo razvrstitvijo:

$$\hat{f}_k(x) - \hat{f}_{k-1}(x) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \hat{\alpha}_i^{(k)} (x - a_k)^j \quad ; \quad x \in (a_k, L]$$

kjer so koeficienti Taylorjeve razvrstitve $\hat{\alpha}_j^{(k)}$:

$$\hat{\alpha}_j^{(k)} = \frac{\frac{d^j}{dx^j}\left[\hat{f}_k(x) - \hat{f}_{k-1}(x)\right]_{x=a_k}}{j!}$$

Funkcijski prispevek spremembe funkcijskih parametrov vodilne diferencialne enačbe v funkcijskem predpisu za $g_k(x)$ je mogoče zapisati kot vsoto potenčnih prispevkov $g_k^{\alpha}(x)$:

$$g_k^{\alpha}(x) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \alpha_j^{(k)} (x - a_k)^{2m+j} \quad ; \quad x \in (a_k, L]$$

kjer se koeficienti $\alpha_j^{(k)}$ od koeficientov $\hat{\alpha}_j^{(k)}$ razlikujejo za multiplikativni faktor.

Končno lahko zapišemo splošno obliko funkcijskega predpisa za $g_k(x)$, upoštevajoč tako vpliv konsistentnega prehoda sekundarnih spremenljivk $g_k^{\beta}(x)$ kot vpliv spremembe funkcijskih parametrov vodilne diferencialne enačbe $g_k^{\alpha}(x)$:

$$g_k(x) = g_k^{\beta}(x) + g_k^{\alpha}(x) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \beta_j^{(k)} (x - a_k)^{m+j-1} + \sum_{j=0}^{j=\infty} \alpha_j^{(k)} (x - a_k)^{2m+j} \quad ; \quad x \in (a_k, L]$$

Rešitev $v(x)$, ki smo jo zapisali v obliki:

$$v(x)=v_0(x)+\sum_{k=1}^{k=n}\tilde{v}_k(x) \quad ; \quad x\in[0,L]$$

je torej razumeti kot superpozicijo korektivnih učinkov $\tilde{v}_k(x)$ nad osnovno, po celotnem intervalu zvezno in zvezno odvedljivo funkcijo $v_0(x)$. Vpliv določenega korektivnega učinka $\tilde{v}_k(x)$, ki v skladu s fizikalnim ozadjem problema pogojuje spremembo funkcijskega predpisa $v_{k\text{-}1}(x)$ oz. $\hat{v}_{k\text{-}1}(x)$ ob prehodu na novi podinterval $[a_k,b_k]$, je zaznaven na preostalem delu intervala od točke $x=a_k$ naprej.

Poudariti velja, da gre pri rešitvi $v(x)$, ki smo jo zasnovali na superpoziciji zvezne in zvezno odvedljive funkcije $v_0(x)$ ter korektivnih učinkov $\tilde{v}_k(x)$, za povsem ekzaktno rešitev. Posebnost takšnega pristopa je le v izpostavitvi drugačnega razumevanja zgradbe funkcije, ki je sicer podana z odsekoma spremenljivim funkcijskim predpisom:

$$v(x)=\bigcup_{k=1}^{k=n}v_k(x) \quad ; \quad v_k(x)\ldots \quad x\in[a_k,b_k]$$

Obravnavano aproksimativno reševanje na osnovi funkcijskega pristopa z upoštevanjem obeh vplivov, $g_k^{\beta}(x)$ in $g_k^{\alpha}(x)$, v funkcijah korektivnega učinka $\tilde{v}_k(x)$ vodi v končni fazi do ekzaktne rešitve.

Ker pa je lahko upoštevanje vpliva spremembe funkcijskih parametrov vodilne diferencialne enačbe $g_k^{\alpha}(x)$ v funkcijah korektivnega učinka $\tilde{v}_k(x)$ računsko zamudno, se ponuja alternativna možnost aproksimativne rešitve z neupoštevanjem tega vpliva.

S tem se sicer že vnaprej odpovemo možnosti ekzaktne rešitve, a rešitev vsebuje kljub temu vse ključne spremembe iz naslova konsistentnega prehoda sekundarnih spremenljivk. To pa je za fizikalno objektivnost aproksimativne rešitve ključno.

Zadovoljiva aproksimativna izpolnitev vpliva spremembe funkcijskih parametrov vodilne diferencialne enačbe vzdolž celotnega intervala $[0,L]$ je tako v celoti prepuščena aproksimacijski funkciji $v_N(x)$.

Dejstvo, da so funkcije $\tilde{v}_k(x)$ opredeljene s pogoji konsistentnega prehoda v točkah $x=a_k$ ter vodilno enačbo na podintervalih $[a_k,b_k]$ in so kot take osnovni nosilec informacije o fizikalnem spreminjanju v notranjosti intervala $[0,L]$, lahko izrabimo tudi pri aproksimativnem reševanju obravnavanega problema.

Analogno zapisu rešitve $v(x)$ v obliki končne vrste:

$$v(x)=v_0(x)+\sum_{k=1}^{k=n}\tilde{v}_k(x) \quad ; \quad x\in[0,L]$$

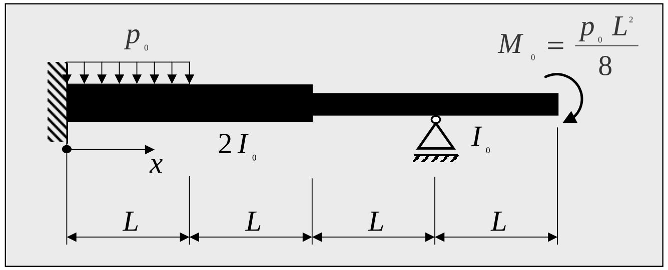
zapišemo aproksimativno rešitev $v_{apr}(x)$ kot superpozicijo aproksimacijske funkcije $v_N(x)$ v poznanem smislu, to je z definiranostjo, zveznostjo in zvezno odvedljivostjo na celotnem intervalu $[0,L]$, ter funkcije korektivnih učinkov $\tilde{v}(x)$:

$$v_{apr}(x)=v_N(x)+\sum_{k=1}^{k=n}\tilde{v}_k(x) \quad ; \quad x\in[0,L]$$

Tako zasnovana aproksimativna rešitev $v_{apr}(x)$ ima ob zadostni stopnji N aproksimacijske funkcije $v_N(x)$ vso možnost, da problem reši ekzaktno.

PRIMER VI.1

Analizirajmo statično nedoločeno podprti nosilec dolžine $4L$ z odsekoma konstantnim prerezom ($EI_i = konst$; $I_1=I_2=2I_0, I_3=I_4=I_0$), ki je izpostavljen kombinirani upogibni obtežbi z zvezno obremenitvijo p_0 in točkovnim momentom M_0.



Primer obravnavajmo v luči iskanja takšnega zapisa funkcijskega obnašanja rešitve za upogibek $v=w(x)$, ki bo nudil osnovo za učinkovito aproksimativno reševanje tudi v primeru funkcijskih sprememb in nezveznosti.

Rešitev $w(x)$ je v danem primeru določena z množico štirih odsekoma definiranih zveznih in zvezno odvedljivih funkcij $w_k(x)$, katerih veljavnost je omejena na pripadajoči podinterval $[a_k = (k-1)L, b_k = kL]$; $k = 1,2,3,4$:

$$w(x) = \bigcup_{k=1}^{k=4} w_k(x) = \begin{cases} w_1(x) & \dots \quad x \in [0, L] \\ w_2(x) & \dots \quad x \in [L, 2L] \\ w_3(x) & \dots \quad x \in [2L, 3L] \\ w_4(x) & \dots \quad x \in [3L, 4L] \end{cases}$$

funkcije $w_k(x)$ pa pri tem izpolnjujejo vodilno enačbo na pripadajočem podintervalu, robne pogoje ter pogoje konsistentnega prehoda na mejah med podintervali.

Če s C_0 označimo konstanto:

$$C_0 = \frac{p_0 L^4}{1344\, EI_0}$$

zapišemo funkcijske predpise $w_k(x)$ ekzaktne rešitve na naslednji način:

$$w_1(x) = C_0 \left[28\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 99\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 93\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad \dots \quad x \in [0, L]$$

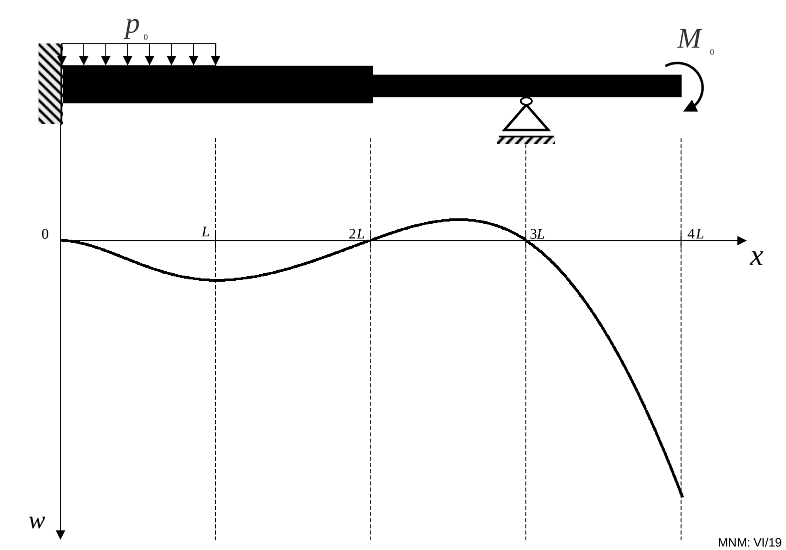
$$w_2(x) = C_0 \left[13\left(\frac{x-L}{L}\right)^3 - 36\left(\frac{x-L}{L}\right)^2 + \left(\frac{x-L}{L}\right) + 22 \right] \quad \dots \quad x \in [L, 2L]$$

$$w_3(x) = C_0 \left[26\left(\frac{x-2L}{L}\right)^3 + 6\left(\frac{x-2L}{L}\right)^2 - 32\left(\frac{x-2L}{L}\right) \right] \quad \dots \quad x \in [2L, 3L]$$

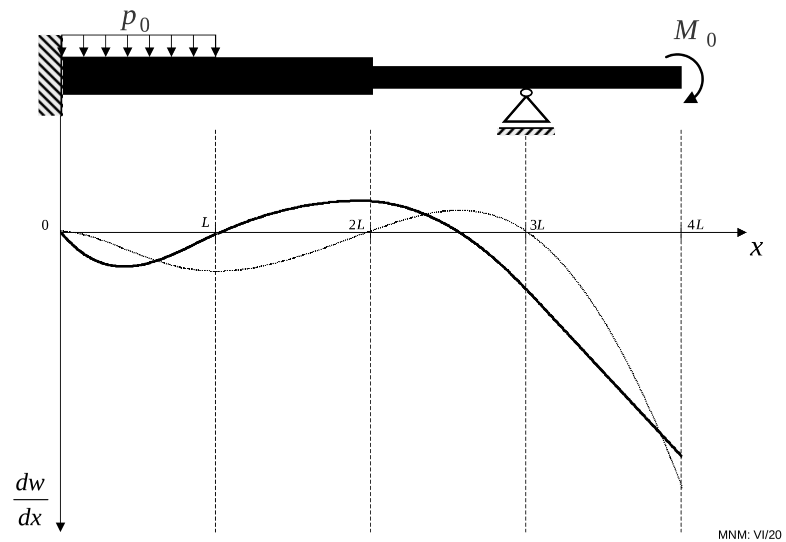
$$w_4(x) = C_0 \left[84\left(\frac{x-3L}{L}\right)^2 + 58\left(\frac{x-3L}{L}\right) \right] \quad \dots \quad x \in [3L, 4L]$$

Za naše nadaljnje namene je koristno, da dane funkcije in njihove odvode predstavimo grafično. Predvsem bodimo pozorni na lastnosti grafov v smislu funkcijskih sprememb in morebitnih nezveznosti, ki jih le-ti izkazujejo na mejah podintervalov. Ob tem poiščimo za vsako ugotovljeno značilnost fizikalno razlago, kar je še posebej pomembno glede na postavljeni cilj: POISKATI FUNKCIJSKO OBLIKO, KI BO PRIMERNA TUDI ZA APROKSIMATIVNO REŠEVANJE.

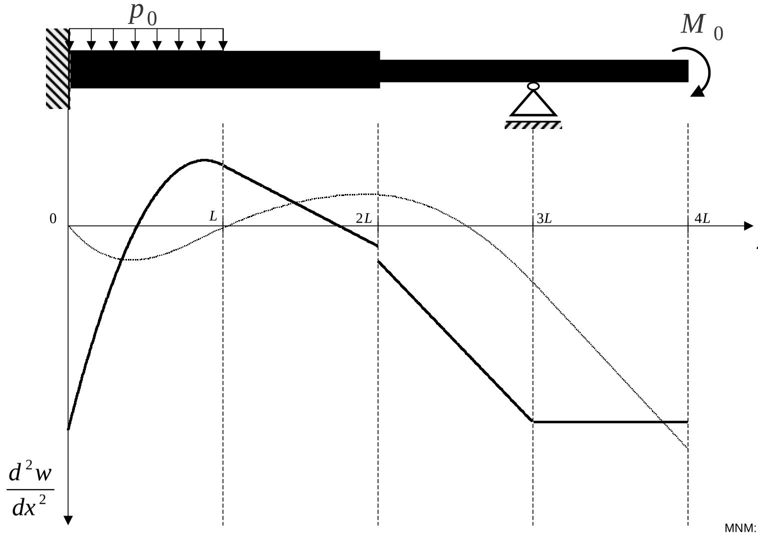
Funkcija $w(x)$ je osnovna primarna spremenljivka problema – upogibek w in kot taka izkazuje zveznost vzdolž celotnega intervala.



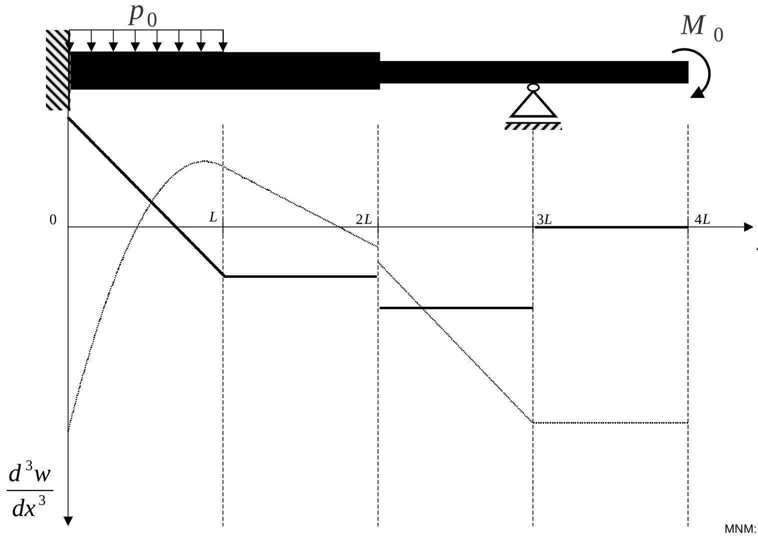
Prvi odvod funkcije $w(x)$ opredeljuje drugo primarno spremenljivko problema – zasuk φ in kot tak izkazuje prav tako zveznost vzdolž celotnega intervala.



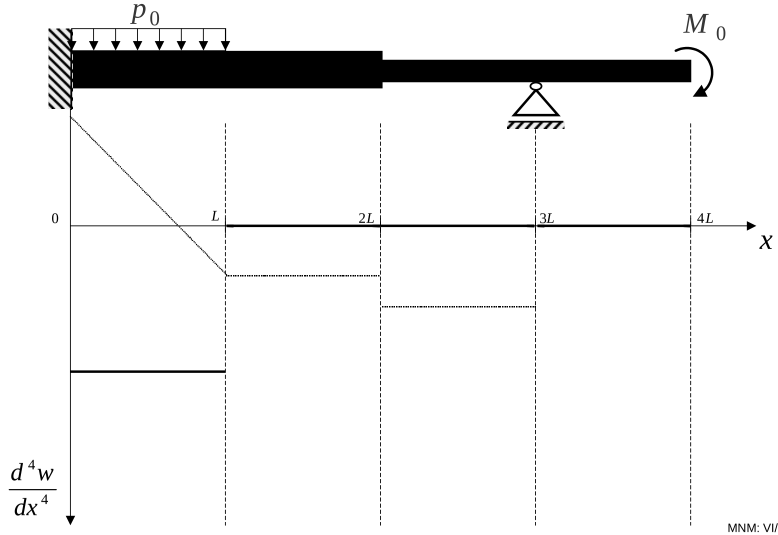
Drugi odvod funkcije $w(x)$ opredeljuje prvo sekundarno spremenljivko – upogibni moment M in glede na to izkazuje nezveznost v točkah nezvezne spremembe upogibne togosti EI in mestih delovanja točkovnega momenta.



Tretji odvod funkcije $w(x)$ opredeljuje drugo sekundarno spremenljivko – prečno silo T in glede na to izkazuje nezveznost v točkah, kjer deluje zunanja obremenitev v obliki točkovnega sile oz. imamo nezvezno spremembo upogibne togosti EI.



Četrti odvod funkcije $w(x)$ opredeljuje vodilno diferencialno enačbo problema, s tem pa izkazuje nezveznost v točkah, kjer prihaja do nezvezne spremembe kontinuirno porazdeljene prečne obremenitve p_z in nezvezne spremembe togosti EI .



Rešitev $w(x)$:

$$w(x)=\bigcup_{k=1}^{k=4} w_k(x)=\begin{cases} w_1(x) \;\ldots\; x\in[0,L] \\ w_2(x) \;\ldots\; x\in[L,2L] \\ w_3(x) \;\ldots\; x\in[2L,3L] \\ w_4(x) \;\ldots\; x\in[3L,4L] \end{cases}$$

analizirajmo še iz vidika superpozicije korektivnih učinkov $\tilde{w}_k(x)$ nad osnovno, po celotnem intervalu zvezno in zvezno odvedljivo funkcijo $w_0(x)$:

$$w(x)=w_0(x)+\sum_{k=1}^{k=n}\tilde{w}_k(x) \quad ; \quad x\in[0,4L]$$

Za naše nadaljnje potrebe razširimo veljavnost funkcijskih predpisov $w_k(x)$ iz danih podintervalov $[a_k,b_k]$ do konca intervala, tako da velja odslej razširjeni predpis, ki ga označimo z $\hat{w}_k(x)$, na intervalu $[a_k,4L]$:

$$\hat{w}_k(x) \;\ldots\; x\in[a_k,4L]$$

Rešitev $w(x)$ analizirajmo še iz vidika superpozicije korektivnih učinkov $\tilde{w}_k(x)$ nad osnovno, po celotnem intervalu zvezno in zvezno odvedljivo funkcijo $w_0(x)$:

$$w(x)=w_0(x)+\sum_{k=1}^{k=n}\tilde{w}_k(x) \quad ; \quad x\in[0,4L]$$

Glede na definicijske lastnosti funkcij $\tilde{w}_k(x)$, pri čemer ne pozabimo, da je $\tilde{w}_1(x)=0$, ter funkcijsko identičnost rešitve $w(x)$, ne glede na njen zapis, lahko s primerjanjem obeh funkcijskih zapisov vzpostavimo naslednje zveze:

$$w_0(x)=\hat{w}_1(x) \quad ; \quad x\in[0,4L]$$

$$\tilde{w}_1(x)=0 \quad ; \quad x\in[0,4L]$$

$$\tilde{w}_k(x)=\hat{w}_k(x)-\left(w_0(x)+\sum_{i=1}^{i=k-1}\tilde{w}_i(x)\right) \quad , \quad k=2,\dots,n \quad ; \quad x\in[0,4L]$$

Upoštevaje funkcijsko odvisnost rešitve $w(x)$ po podintervalih dobimo na osnovi vzpostavljenih zvez funkcijske odvisnosti $w_0(x)$ in $\tilde{w}_k(x)$. Slednje so v delu, ki je od nič različen, dejansko opredeljene s funkcijskimi odvisnostmi $g_k(x)$:

$$w_0(x)=\beta\left[28\left(\frac{x}{L}\right)^4-99\left(\frac{x}{L}\right)^3+93\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \quad \dots \quad x\in[0,4L]$$

$$g_2(x)=\beta\left[-28\left(\frac{x-L}{L}\right)^4\right] \quad \dots \quad x\in[L,4L]$$

$$g_3(x)=\beta\left[13\left(\frac{x-2L}{L}\right)^3+3\left(\frac{x-2L}{L}\right)^2\right] \quad \dots \quad x\in[2L,4L]$$

$$g_4(x)=\beta\left[-26\left(\frac{x-3L}{L}\right)^3\right] \quad \dots \quad x\in[3L,4L]$$

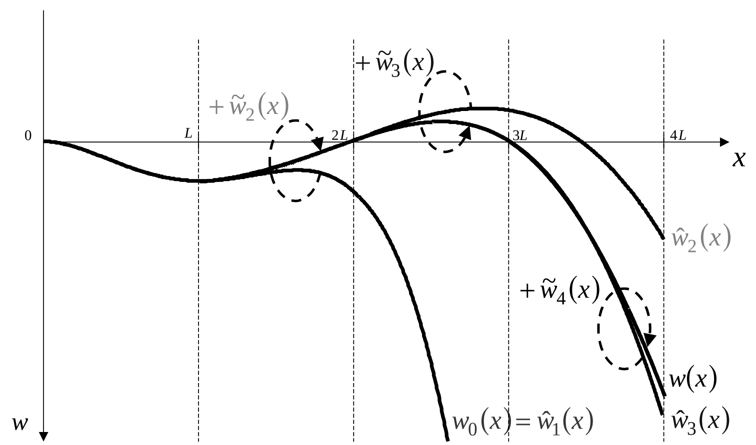
Rešitev $w(x)$ zapišemo tedaj kot vsoto na celotnem intervalu zvezne in zvezno odvedljive funkcije $w_0(x)$ ter korekcijskih učinkov vzdolž intervala, izraženih s funkcijami $\tilde{w}_k(x)$ oz. njihovega neničnega dela $g_k(x)$:

$$w(x)=w_0(x)+\sum_{k=1}^{k=n}\tilde{w}_k(x) \quad ; \quad x\in[0,4L]$$

Simbolično prikažimo zgradbo algoritma ter zaporednost učinkovanja korekcijskih učinkov na spreminjanje rešitve $w(x)$ v tabelarični obliki:

predpis	$[0-L]$	$[L-2L]$	$[2L-3L]$	$[3L-4L]$
$w_0(x)$	$w_0(x)$	$w_0(x)$	$w_0(x)$	$w_0(x)$
$\tilde{w}_1(x)$	0	0	0	0
$\tilde{w}_2(x)$	0	$g_2(x)$	$g_2(x)$	$g_2(x)$
$\tilde{w}_3(x)$	0	0	$g_3(x)$	$g_3(x)$
$\tilde{w}_4(x)$	0	0	0	$g_4(x)$
$w(x)$	$\sum\downarrow=w_1(x)$	$\sum\downarrow=w_2(x)$	$\sum\downarrow=w_3(x)$	$\sum\downarrow=w_4(x)$

Končno si oglejmo še grafično razvoj rešitve problema skladno s pristopom korektivnega adaptiranja rešitve razmeram, ki jih pogojujejo obremenitvene in konstitutivne spremembe vzdolž intervala.



Analiza prikazanega računskega primera je služila v prvi vrsti utrditvi razumevanja funkcijskega obnašanja rešitve problema, predvsem pa razlogom, ki so spremembe v funkcijskih predpisih pogojevali.

Če se povrnemo k splošni obravnavi s funkcijo $v(x)$ kot osnovno primarno spremenljivko, lahko ugotovimo naslednje:

- Spremembo funkcijskega obnašanja opredeljuje sprememba v funkcijskem predpisu za zunanjo obremenitev oz. konstitucijski parameter
- Nezveznost v odvodih, asociiranih s sekundarnimi spremenljivkami problema, opredeljuje sprememba konstitucijskega parametra ter nezvezna sprememba zunanje obremenitve
- Rešitev $v(x)$ je v takem primeru sestavljena kot superpozicija na celotnem intervalu zvezne in zvezno odvedljive funkcije $v_0(x)$ ter korektivnih učinkov $\tilde{v}_k(x)$ vzdolž intervala
- Funkcijska oblika korektivnih učinkov $\tilde{v}_k(x)$ je povsem opredeljana s spremembami na meji med dvema podintervaloma
- Funkcijo $v_0(x)$ pri aproksimativnem reševanju nadomestimo z ustrezno funkcijsko aproksimacijo $v_N(x)$.

Morebitno nezveznost funkcije $\Phi(x)$ na meji $x = b_{k-1} = a_k$, ki razmejuje podintervala $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ in $[a_k, b_k]$, popišemo simbolno z vpeljavo funkcijske označbe:

$$[\Phi(x)]_{b_{k-1}}^{a_k} = \lim_{x \to a_k + 0} \Phi(x) - \lim_{x \to b_{k-1} - 0} \Phi(x)$$

kjer velja:

$$[\Phi(x)]_{b_{k-1}}^{a_k} = \begin{cases} J_{k-1,k} = 0 & \text{v primeru zveznosti } \Phi(x) \\ J_{k-1,k} \neq 0 & \text{v primeru nezveznosti } \Phi(x) \end{cases}$$

Nezveznosti v rešitvi problema, definiranega s funkcijo $v(x)$, opredelimo s sistemom:

$$[Bv(x)]_{b_{k-1}}^{a_k} = P_{k-1,k} \quad \wedge \quad [Dv(x)]_{b_{k-1}}^{a_k} = Q_{k-1,k}$$

kjer zajema prva enačba pogoje konsistentnosti prehoda nad sekundarnimi spremenljivkami, druga pa morebitno nezveznost nehomogenega dela diferencialne enačbe.

Operatorja B in D sta diferencialna operatorja, ki definirata sekundarne spremenljivke oz. vodilno enačbo problema, $P_{k-1,k}$ in $Q_{k-1,k}$ pa predpisane nezveznosti. Za obravnavana primera imamo:

Osna obremenitev:

$$v(x) = u(x), \quad f(x) = -n(x) + \frac{d}{dx}(EA\alpha\Delta T),$$
$$D = \frac{d}{dx}\left(EA\frac{d}{dx}\right), \quad B = EA\frac{d}{dx},$$
$$P_{k-1,k} = -F_{k-1,k} + [EA\alpha\Delta T]_{b_{k-1}}^{a_k},$$
$$Q_{k-1,k} = [f(x)]_{b_{k-1}}^{a_k}$$

Upogibna obremenitev:

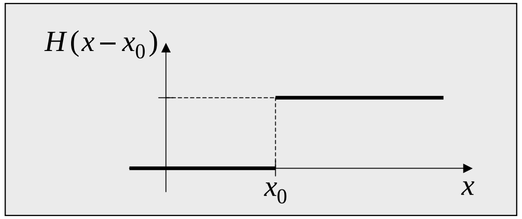
$$v(x) = w(x), \; f(x) = p_z(x) - \frac{d^2}{dx^2}(EI\alpha\Delta\vartheta_h)$$
$$D = \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2}{dx^2}\right), \; B^{(1)} = EI\frac{d^2}{dx^2}, \quad B^{(2)} = \frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2}{dx^2}\right)$$
$$P_{k-1,k}^{(1)} = M_{k-1,k} - [EI\alpha\Delta\vartheta_h]_{b_{k-1}}^{a_k},$$
$$P_{k-1,k}^{(2)} = F_{k-1,k} - \left[\frac{d(EI\alpha\Delta\vartheta_h)}{dx}\right]_{b_{k-1}}^{a_k}$$
$$Q_{k-1,k} = [f(x)]_{b_{k-1}}^{a_k}$$

Za popis nezveznosti na meji $x = x_0$ med dvema podintervaloma lahko uporabimo Heavisideovo koračno funkcijo $H(x-x_0)$, definirano s predpisom:

$$H(x-x_0) = \begin{cases} 1 & \dots \quad x > x_0 \\ 0 & \dots \quad x < x_0 \end{cases}$$

z očitno lastnostjo:

$$\left[H(x-x_0)\right]_{b_{k-1}}^{a_k} = 1 \quad \wedge \quad b_{k-1} = a_k = x_0$$



V nadaljevanju si oglejmo še funkcijski produkt:

$$G_p(x,x_0) = H(x-x_0)(x-x_0)^p = \begin{cases} (x-x_0)^p & \dots \quad x > x_0 \\ 0 & \dots \quad x < x_0 \end{cases} \; ; \; p \in \mathcal{N}$$

katerega odvodi so definirani z:

$$\frac{d^r}{dx^r}\left(G_p(x,x_0)\right) = H(x-x_0)\,p(p-1)\dots(p-r+1)(x-x_0)^{p-r} \; ; \; r \le p$$

Očitno velja:

$$\left[\frac{d^r}{dx^r}\left(G_p(x,x_0)\right)\right]_{b_{k-1}=x_0}^{a_k=x_0} = \begin{cases} p! & \dots \quad r = p \\ 0 & \dots \quad 0 \le r < p \;\wedge\; r > p \end{cases}$$

kar je predvsem iz vidika zahtevane zveznosti primarnih spremenljivk izredno pomembno.

Naj bo 2m red območne diferencialne enačbe $D = D^{(2m)}$. Upoštevajoč funkcijske lastnosti Heavisideove koračne funkcije $H(x-x_0)$ in na njem zasnovanega funkcijskega produkta $G_p(x,x_0)$ zapišemo rešitev $\tilde{v}(x)$, ki vsebuje vse s problemom pogojene nezveznosti ter funkcijske spremembe, kot:

$$\tilde{v}(x) = \sum_{k=2}^{n} \tilde{v}_k(x) =$$
$$= \sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j^{(k)} G_{m+j-1}(x,x_k) + \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j^{(k)} G_{2m+j}(x,x_k)\right)$$
$$; \quad x \in [0,L] \quad \wedge \quad x_k = b_{k-1} = a_k$$

Preostali del v rešitvi $v(x)$, ki ga predstavlja zvezna in zvezno odvedljiva funkcija $v_0(x)$, zapišemo v smislu aproksimativne rešitve problema na že poznani način:

$$v_0(x) \approx \sum_{k=0}^{N} c_k x^k \quad ; \quad x \in [0,L]$$

z vsemi že spoznanimi ugotovitvami.

Velikosti koeficientov $\beta_j^{(k)}$ v funkcijskem zapisu $\tilde{v}(x)$ so določene iz pogojev konsistentnega prehoda na mejah med posameznimi podintervali:

$$\left[B\left(v_0(x)+\tilde{v}(x)\right)\right]_{b_{k-1}}^{a_k} \equiv \left[B\tilde{v}(x)\right]_{b_{k-1}}^{a_k} = P_{k-1,k} \quad ; \quad k = 2,\dots,n$$

medtem ko določa velikost koeficientov $\alpha_j^{(k)}$ sprememba v funkcijskem predpisu obremenitvenega dela vodilne diferencialne enačbe:

$$D\tilde{v}_k(x) = \hat{f}_k(x) - \hat{f}_{k-1}(x) \quad ; \quad x \in (a_k, L] \quad \wedge \quad k = 2,\dots,n$$

V primeru, ko pri prehodu iz (K-1)-vega podintervala na sosednji K-ti podinterval spremembe v funkcijskem predpisu obremenitvenega dela vodilne diferencialne enačbe ni:

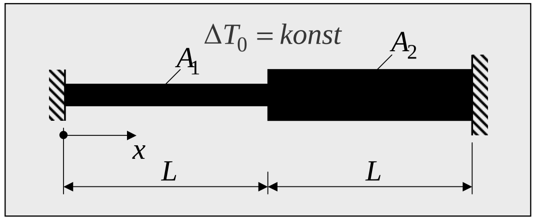
$$\hat{f}_K(x) - \hat{f}_{K-1}(x) = 0 \quad ; \quad x \in (a_K, L] \quad \wedge \quad K \in \{2,\dots,n\}$$

je prispevek $g_K^{\alpha}(x)$ v funkciji korektivnega učinka $\tilde{v}_K(x)$ ničen, s čemer so tudi vsi pripadajoči koeficienti $\alpha_j^{(K)}$ nični:

$$\alpha_j^{(k)} = 0 \quad ; \quad j = 1,2,\dots \quad \wedge \quad K \in \{2,\dots,n\}$$

PRIMER VI.2

Obojestransko vpeti nosilec dolžine $2L$ in odsekoma konstantnega prereza $(EA_i = konst\ ;\ A_1 = A_0, A_2 = 2A_0)$ je izpostavljen enakomerni temperaturni spremembi $\Delta T = \Delta T_0 = konst$. Analizirajmo aproksimativno reševanje problema, katerega rešitev bo zaradi spremenljivega prereza karakterizirana z določenimi nezveznostmi.



Aproksimativno reševanje naj bo analizirano z vidika čim učinkovitejšega računskega postopka za določitev koeficientov c_k.

PRIMER VI.2.1: ekzaktna rešitev

Zaradi odsekoma spremenljivega prereza, bo rešitev $u(x)$ na intervalu $[0,2L]$ definirana z dvema različnima predpisoma:

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \dots\ x \in [0,L] \\ u_2(x) & \dots\ x \in [L,2L] \end{cases}$$

pri čemer bosta na meji med podintervaloma pri $x = L$ funkciji izkazovali nezveznost v prvem odvodu.

Glede na konstantnost prečnega prereza $(EA_i = konst)$ ter konstantnost temperaturne spremembe ΔT v vsakem od obeh podintervalov bo rešitev $u(x)$ danega problema zadovoljevala vodilno območno enačbo na naslednji način:

$$EA_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} = 0 \quad ; \quad x \in [0,L] \quad \wedge \quad EA_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} = 0 \quad ; \quad x \in [L,2L]$$

ter robne pogoje:

$$u_1(0) = 0 \quad \wedge \quad u_2(2L) = 0$$

ter pogoje konsistentnosti prehoda:

$$u_1(L) = u_2(L)\,,$$
$$\left[EA_1\left(\frac{du_1}{dx} - \alpha\Delta T_0\right)\right]_{x=L} = \left[EA_2\left(\frac{du_2}{dx} - \alpha\Delta T_0\right)\right]_{x=L}$$

Eksaktna rešitev tako definiranega robnega problema je funkcija:

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) = -\dfrac{\alpha\Delta T_0 L}{3}\left(\dfrac{x}{L}\right) & \dots\ x \in [0,L] \\ u_2(x) = -\dfrac{\alpha\Delta T_0 L}{3}\left(2 - \dfrac{x}{L}\right) & \dots\ x \in [L,2L] \end{cases}$$

PRIMER VI.2.2: aproksimativna rešitev

Kot neposredno posledico spremembe funkcijskega predpisa za prečni prerez zaznamuje obravnavani problem nezveznost prvega odvoda rešitve $u(x)$. Če glede na primer ekzaktnega reševanja prestavimo izhodišče koordinatnega sistema na mesto spremembe prereza, zapišemo dano nezveznost kot:

$$\left[EA\frac{du}{dx}\right]_{-0}^{+0} = \left[EA\alpha\Delta T\right]_{-0}^{+0}$$

Za obravnavani problem pa velja tudi, da ostaja funkcijski predpis obremenitvenega dela diferencialne enačbe ob prehodu iz prvega podintervala na drugi podinterval nespremenjen:

$$\hat{f}_2(x) - \hat{f}_1(x) = \left[-n(x) + \frac{d}{dx}(EA\alpha\Delta T)\right]_2 - \left[-n(x) + \frac{d}{dx}(EA\alpha\Delta T)\right]_1 = 0 \quad \dots \quad x \in (0,L]$$

Zapisani funkcijski lastnosti v celoti določata obnašanje funkcije korektivnih učinkov $\tilde{u}(x)$.

Aproksimativno rešitev danega problema $u_N(x)$ je tedaj smotrno zasnovati v obliki vsote dveh funkcij:

$$u_N(x) = u_0(x) + \tilde{u}(x) \quad ; \quad x \in [-L, +L]$$

kjer je $u_0(x)$ na celotnem intervalu $[-L, +L]$ zvezna in zvezno odvedljiva funkcija, ki jo ustrezno aproksimiramo, funkcija $\tilde{u}(x) \equiv \tilde{u}_2(x)$ pa funkcija, ki pri $x = 0$ izkazuje obnašanje v smislu zahtevanih funkcijskih sprememb.

Glede na to, da je red območne diferencialne enačbe $2\mathrm{m} = 2$, prejme funkcija $\tilde{u}(x)$ ob $\mathrm{m} = 1$ in $\mathrm{n} = 2$ (dva podintervala) za obravnavani problem obliko:

$$\tilde{u}(x) \equiv \tilde{u}_2(x) = \beta_1^{(2)} G_1(x, 0) \quad ; \quad x \in [-L, +L]$$

pri čemer smo seveda upoštevali, da je prispevek $g_2^{\alpha}(x)$ v funkciji korektivnega učinka $\tilde{u}_2(x)$ ničen.

Z najnižjo možno aproksimacijo funkcije $u_0(x)$ v obliki potenčne vrste:

$$u_0(x) = c_0(x + L) \quad ; \quad x \in [-L, +L]$$

smo zaradi $\tilde{u}(-L) = 0$ uspeli že izpolniti tudi robni pogoj pri $x = -L$:

$$u_N(-L) = u_0(-L) + \tilde{u}(-L) = 0$$

Aproksimativna rešitev, katere eksplicitna oblika je:

$$u_N(x) = c_0(x + L) + H(x)\left(\beta_1^{(2)} x\right) \quad ; \quad x \in [-L, +L]$$

vsebuje dva po velikosti neznana koeficienta $c_0, \beta_1^{(2)}$, katerih velikost bomo določili iz dveh fizikalno pogojenih enačb.

Sistem fizikalno pogojenih enačb določajo:

- enačbe izpolnitve robnih pogojev $\rightarrow u_0(x)$
- enačbe izpolnitve pogojev konsistentnega prehoda $\rightarrow \tilde{u}(x)$
- enačbe spremembe funkcijskega predpisa obremenitvenega dela diferencialne enačbe vzdolž celotnega intervala $\rightarrow \tilde{u}(x)$
- enačbe izpolnitve vodilne enačbe problema po podintervalih. $\rightarrow u_0(x)$

ENAČBE na osnovi robnih pogojev:

Preostali robni pogoj, ki ga je še potrebno izpolniti, je:

$$u_N(+L) = u_0(+L) + \tilde{u}(+L) = 0$$

ENAČBE na osnovi pogojev konsistentnosti prehoda:

Zveznost primarne spremenljivke $u_N(x)$ je zagotovljena že s samim načinom izbire funkcij $u_0(x)$ ter $\tilde{u}(x)$. Zahtevana konsistentnost prehoda nad sekundarno spremenljivko pa da:

$$\left[EA\frac{du_N}{dx}\right]_{-0}^{+0} = \left[EA\frac{d}{dx}(u_0 + \tilde{u})\right]_{-0}^{+0} = [EA\alpha\Delta T]_{-0}^{+0}$$

S tem smo dobili sistem dveh linearno neodvisnih enačb, kar zadostuje za rešitev neznanih koeficientov $c_0, \beta_1^{(2)}$.

Na tem mestu je vsekakor potrebna diskusija v zvezi z enačbami, ki sicer izhajajo na osnovi izpolnitve območne enačbe problema oz. spremembe funkcijskega predpisa obremenitvenega dela diferencialne enačbe. Teh enačb na prvi pogled ni bilo potrebno uporabiti, ker smo do sistema dveh enačb z dvema neznankama našega problema prišli že z uporabo enačb robnih pogojev ter enačb pogojev konsistentnega prehoda.

Mišljenje, da omenjenih enačb pri postavitvi funkcijskega modela nismo uporabili, je vsekakor zmotna.

- Enačbe na osnovi izpolnitve spremembe funkcijskega predpisa obremenitvenega dela diferencialne enačbe smo dejansko upoštevali s tem, da smo v funkcijski obliki funkcije korektivnega učinka $\tilde{u}(x) \equiv \tilde{u}_2(x)$ privzeli $g_2^{\alpha}(x) = 0$.
- Enačbe na osnovi izpolnitve območne enačbe problema pa so v našem primeru ob funkciji $\tilde{u}(x) \equiv \tilde{u}_2(x)$, ki ekzaktno popisuje vse spremembe obremenitvenega dela diferencialne enačbe, dejansko izpolnjene s pravšnjo izbiro funkcije $u_0(x)$, kar pa v splošnem seveda ni slučaj.

Sistem enačb za določitev koeficientov $c_0, \beta_1^{(2)}$:

$$u_N(L) = 0 \; :$$

$$\left[EA \frac{du_N}{dx} \right]_{-0}^{+0} = \left[EA\,\alpha \Delta T \right]_{-0}^{+0} \; :$$

$$\begin{bmatrix} 2L & L \\ E(A_2 - A_1) & EA_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ \beta_1^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ E(A_2 - A_1)\alpha \Delta T_0 \end{Bmatrix}$$

z rešitvijo:

$$\left\{ c_0, \beta_1^{(2)} \right\} = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\} \alpha \Delta T_0$$

Rešitev, ki smo jo dobili:

$$u_N(x) = -\frac{\alpha \Delta T_0 L}{3} \left[\left(1 + \frac{x}{L} \right) - 2H(x) \left(\frac{x}{L} \right) \right] \qquad \ldots \; x \in [-L, +L]$$

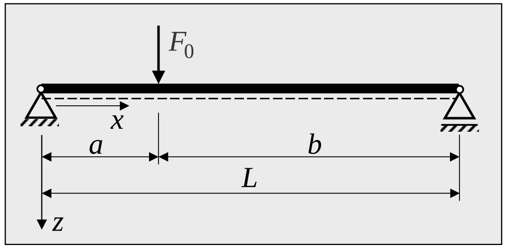
je ekzaktna rešitev, v kar bi se prepričali z upoštevanjem transformacijskih zvez med koordinatnima sistemoma, ki smo ju uporabili v primeru izračuna ekzaktne in aproksimativne rešitve.

PRIMER VI.3

Na primeru obojestransko členkasto podprtega nosilca dolžine L in konstantnega prereza $(EI = konst)$, ki je obremenjen s točkovno silo velikosti F_0, analiziraj aproksimativno reševanje problema:

a) s Heavisideovim potenčnim nastavkom za zagotovitev pogojev konsistentnosti prehoda

b) s trigonometričnim nastavkom, ki izpolnjuje vse robne pogoje problema.



PRIMER VI.3.1: ekzaktna rešitev

Zaradi točkovne sile F_0, ki pogojuje spremembo obremenitvenega predpisa v notranjosti intervala $[0, L]$, bo rešitev $w(x)$ definirana z dvema različnima predpisoma:

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x) & \ldots \; x \in [0, a] \\ w_2(x) & \ldots \; x \in [a, L] \end{cases}$$

pri čemer bosta na meji med podintervaloma pri $x = a$ funkciji izkazovali nezveznost v tretjem odvodu.

Glede na konstantnost prečnega prereza $(EI = konst)$ bo rešitev upogibnega problema $w(x)$ zadovoljevala vodilno območno enačbo na naslednji način:

$$EI \frac{d^4 w_1}{dx^4} = 0 \quad ; \quad x \in [0, a] \quad \wedge \quad EI \frac{d^4 w_2}{dx^4} = 0 \quad ; \quad x \in [a, L]$$

in robne pogoje:

$$w_1(0)=\frac{d^2w_1}{dx^2}(0)=0 \quad \wedge \quad w_2(L)=\frac{d^2w_2}{dx^2}(L)=0$$

ter pogoje konsistentnosti prehoda:

$$w_1(a)=w_2(a)\,,\ \frac{dw_1}{dx}(a)=\frac{dw_2}{dx}(a)\,,$$
$$\frac{d^2w_1}{dx^2}(a)=\frac{d^2w_2}{dx^2}(a)\,,\ \frac{d^3w_1}{dx^3}(a)=\frac{d^3w_2}{dx^2}(a)-\frac{F_0}{EI}$$

Eksaktna rešitev tako definiranega robnega problema je funkcija:

$$w(x)=\begin{cases} w_1(x)=\dfrac{F_0a^3b}{6LEI}\left[\dfrac{a+2b}{a}-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right]\left(\dfrac{x}{a}\right) & \dots\ x\in[0,a] \\ w_2(x)=\dfrac{F_0ab^3}{6LEI}\left[\dfrac{2a+b}{b}-\left(\dfrac{L-x}{b}\right)^2\right]\left(\dfrac{L-x}{b}\right) & \dots\ x\in[a,L] \end{cases}$$

ki da za upogibek in upogibni moment na mestu delovanja točkovne sile naslednji vrednosti:

$$w(a)=\frac{F_0}{3EI}\left(\frac{ab}{L}\right)^2 \quad \wedge \quad M(a)=\frac{F_0ab}{L}$$

PRIMER VI.3.2: aproksimativna rešitev ad a)

Obravnavani problem zaznamuje nezveznost tretjega odvoda rešitve $w(x)$, kot neposredne posledice točkovne sile F_0 s prijemališčem v notranjosti intervala $[0,L]$. Na tem mestu izkazuje rešitev $w(x)$ naslednje lastnosti:

$$\left[EI\frac{d^2w}{dx^2}\right]_{a-0}^{a+0}=0\ ,\quad \left[\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{a-0}^{a+0}=F_0\ ,\quad \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{-0}^{+0}=0$$

Za obravnavani problem pa velja tudi, da ostaja funkcijski predpis obremenitvenega dela diferencialne enačbe ob prehodu iz prvega podintervala na drugi podinterval nespremenjen:

$$\hat{f}_2(x)-\hat{f}_1(x)=\left[p_z(x)-\frac{d^2}{dx^2}(EI\alpha\Delta\vartheta_h)\right]_2-\left[p_z(x)-\frac{d^2}{dx^2}(EI\alpha\Delta\vartheta_h)\right]_1=0 \quad \dots\quad x\in(0,L]$$

Zapisane funkcijske lastnosti v celoti določajo obnašanje funkcije korektivnih učinkov $\tilde{w}(x)$.

Aproksimativno rešitev danega problema $w_N(x)$ je tedaj smotrno zasnovati v obliki vsote dveh funkcij:

$$w_N(x)=w_0(x)+\tilde{w}(x)\quad ;\quad x\in[0,L]$$

kjer je $w_0(x)$ na celotnem intervalu $[0,L]$ zvezna in zvezno odvedljiva funkcija, ki jo ustrezno aproksimiramo, funkcija $\tilde{w}(x)\equiv\tilde{w}_2(x)$ pa funkcija, ki pri $x=a$ izkazuje obnašanje v smislu zahtevanih funkcijskih sprememb.

Glede na to, da je red območne diferencialne enačbe $2m=4$, prejme funkcija $\tilde{w}(x)$ ob $m=2$ in $n=2$ (dva podintervala) za obravnavani problem obliko:

$$\tilde{w}(x)\equiv\tilde{w}_2(x)=\beta_1^{(2)}G_2(x,a)+\beta_2^{(2)}G_3(x,a)\quad ;\quad x\in[0,L]$$

pri čemer smo seveda upoštevali, da je prispevek $g_2^{\alpha}(x)$ v funkciji korektivnega učinka $\tilde{w}_2(x)$ ničen.

Z najnižjo možno aproksimacijo funkcije $w_0(x)$ v obliki potenčne vrste:

$$w_0(x) = x\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right) \quad ; \quad x \in [0, L]$$

smo zaradi $\tilde{w}(0) = 0$ uspeli že izpolniti tudi robni pogoj pri $x = 0$:

$$w_N(0) = w_0(0) + \tilde{w}(0) = 0$$

Aproksimativna rešitev, katere eksplicitna oblika je:

$$w_N(x) = x\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right) + H(x-a)\left[\beta_1^{(2)}(x-a)^2 + \beta_2^{(2)}(x-a)^3\right] \quad \ldots \quad x \in [0, L]$$

vsebuje pet po velikosti neznanih koeficientov $c_0, c_1, c_2, \beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}$, katerih velikost bomo določili z izpolnitvijo petih fizikalno pogojenih enačb na osnovi robnih pogojev, pogojev konsistentnosti prehoda, spremembe funkcijskega predpisa obremenitvenega dela vodilne enačbe problema vzdolž celotnega intervala ter z izpolnitvijo območne enačbe problema po podintervalih.

ENAČBE na osnovi robnih pogojev:

Glede na izbrano funkcijsko obliko funkcije $w_0(x)$ ter lastnosti Heavisideove funkcije je robni pogoj za osnovno primarno spremenljivko $w_N(x) = w_0(x) + \tilde{w}(x)$ na mestu $x = 0$ že izpolnjen.

Preostali robni pogoji, ki jih je še potrebno izpolniti, so trije:

$$w_N(L) = w_0(L) + \tilde{w}(L) = 0 \ ,$$

$$\frac{d^2 w_N}{dx^2}(0) = \frac{d^2}{dx^2}(w_0 + \tilde{w})\bigg|_{x=0} = 0 \ ,$$

$$\frac{d^2 w_N}{dx^2}(L) = \frac{d^2}{dx^2}(w_0 + \tilde{w})\bigg|_{x=L} = 0 \ ,$$

ENAČBE na osnovi pogojev konsistentnosti prehoda:

Zveznost primarnih spremenljivk $w_N(x)$ in $\frac{dw_N}{dx}(x)$ je zagotovljena že s samim načinom izbire funkcij $w_0(x)$ ter $\tilde{w}(x)$.

Zahtevana konsistentnost prehoda nad sekundarnima spremenljivkama da nadaljnji dve enačbi:

$$\left[EI \frac{d^2 w_N}{dx^2}\right]_{a-0}^{a+0} = \left[EI \frac{d^2}{dx^2}(w_0 + \tilde{w})\right]_{a-0}^{a+0} = 0 \ ,$$

$$\left[\frac{d}{dx}\left(EI \frac{d^2 w_N}{dx^2}\right)\right]_{a-0}^{a+0} = \left[\frac{d}{dx}\left(EI \frac{d^2}{dx^2}(w_0 + \tilde{w})\right)\right]_{a-0}^{a+0} = F_0$$

S tem smo dobili sistem petih linearno neodvisnih enačb, kar zadostuje za rešitev neznanih koeficientov $c_0, c_1, c_2, \beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}$.

ENAČBE na osnovi izpolnitve spremembe funkcijskega predpisa obremenitvenega dela diferencialne enačbe:

V obravnavanem primeru spremembe ni, kar smo dejansko že upoštevali s tem, da smo v funkcijski obliki funkcije korektivnega učinka $\tilde{w}(x) \equiv \tilde{w}_2(x)$ privzeli $g_2^{\alpha}(x) = 0$.

ENAČBE na osnovi izpolnitve območne enačbe problema:

Ob funkciji $\tilde{w}(x) \equiv \tilde{w}_2(x)$, ki ekzaktno popisuje vse spremembe obremenitvenega dela diferencialne enačbe, so enačbe na osnovi izpolnitve območne enačbe problema dejansko izpolnjene s pravšnjo izbiro funkcije $w_0(x)$, kar pa v splošnem seveda ni slučaj.

Sistem enačb za določitev koeficientov $c_0, c_1, c_2, \beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}$ sledi iz pogojnih enačb:

$$w_N(L) = 0 \; :$$
$$\frac{d^2 w_N}{dx^2}(0) = 0 \; :$$
$$\frac{d^2 w_N}{dx^2}(L) = 0 \; :$$
$$\left[EI \frac{d^2 w_N}{dx^2} \right]_{a-0}^{a+0} = 0 \; :$$
$$\left[\frac{d}{dx}\left(EI \frac{d^2 w_N}{dx^2} \right) \right]_{a-0}^{a+0} = F_0 \; :$$

kar da naslednji sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} L & L^2 & L^3 & b^2 & b^3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6L & 2 & 6b \\ 0 & 0 & 0 & 2EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \beta_1^{(2)} \\ \beta_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_0 \end{Bmatrix}$$

z rešitvijo:

$$\left\{ c_0, c_1, c_2, \beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)} \right\} = \left\{ \left(L^2 - b^2\right)\frac{b}{L}, 0, -\frac{b}{L}, 0, 1 \right\} \frac{F_0}{6EI}$$

Rešitev, ki smo jo dobili:

$$w_N(x) = -\frac{F_0 L^3}{6EI}\left[\frac{b\left(L^2 - b^2\right)}{L^3}\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{b}{L}\left(\frac{x}{L}\right)^3 + H(x-a)\left(\frac{x-a}{L}\right)^3 \right] \; ; \quad x \in [0, L]$$

je ekzaktna rešitev, v kar bi se prepričali z ustrezno preureditvijo.

PRIMER VI.3.3: aproksimativna rešitev ad b)

Funkcijski predpis v obliki potenčne vrste ni najbolj primeren za aproksimacijo funkcije, definirane na več podintervalih. Kot zelo uspešno se lahko v takem primeru izkaže aproksimiranje s trigonometrijskimi členi skladno s Fourier-jevo razvrstitvijo.

Aproksimativno rešitev lahko tedaj iščemo v obliki sinusne vrste:

$$w_N(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \sin\frac{k\pi x}{L} \quad ; \quad x \in [0, L]$$

Izbrana funkcijska oblika se izkaže za izredno ugodno pri obravnavi našega problema, saj identično izpolnjuje vse robne pogoje. Določitev neznanih koeficientov c_k bo torej dobljena iz sistema enačb, s katerimi bo zagotavljena izpolnitev diferencialne enačbe problema.

Aplikacija diferencialnega operatorja vodilne območne enačbe da v primeru izbrane aproksimacije:

$$EI\frac{d^4 w_N}{dx^4} = EI\sum_{k=1}^{N} c_k \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 \sin\frac{k\pi x}{L} \quad ; \quad x \in [0, L]$$

kar bi naj bilo enako po intervalu porazdeljeni prečni obremenitvi. V našem primeru je ta obremenitev nična, imamo pa točkovno silo, ki ima dovolj hude posledice na samo rešitev. Če bi nam uspelo točkovno silo nadomestiti s statično ekvivalentno porazdeljeno obtežbo, bi za tvorbo iskanega sistema enačb za določitev koeficientov c_k lahko uporabili kar funkcijske enačbe, izhajajoče neposredno iz vodilne enačbe problema.

V ta namen najprej nadomestimo koncentrirano silo F_0 z ekvivalentno konstantno obtežbo p_ε na dolžini 2ε :

$$p_\varepsilon = \frac{F_0}{2\varepsilon}$$

zatem pa še tako dobljeno obremenitev razvrstimo, ob predpostavki, da je obremenitev periodična s periodo $2L$, sama funkcija pa je na tem območju liha, v Fourierjevo vrsto :

$$p_z(x)=\begin{cases}0 & \dots \quad 0<x<a-\varepsilon \\ p_\varepsilon & \dots \quad a-\varepsilon<x<a+\varepsilon \\ 0 & \dots \quad a+\varepsilon<x<L\end{cases} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} B_\mathrm{k} \sin\frac{\mathrm{k}\pi x}{L} \quad ; \quad x\in[0,L]$$

Fourierjeve koeficiente določimo skladno z:

$$B_\mathrm{k}=\frac{2}{L}\int_0^L p_z(x)\sin\frac{\mathrm{k}\pi x}{L}\,dx$$

kar da ob upoštevanju limitnega primera, ko gre $\varepsilon\to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{L}{\mathrm{k}\pi\varepsilon}\right)\sin\frac{\mathrm{k}\pi\varepsilon}{L}=1$$

Fourierjev koeficient:

$$B_\mathrm{k}=\frac{2F_0}{L}\sin\frac{\mathrm{k}\pi a}{L}$$

Z razvrstitvijo smo dobili prečno obremenitev, ki je zvezno porazdeljena po celotnem intervalu $[0,L]$, tako da rešitev diferencialne enačbe obravnavamo na celotnem intervalu, kot da ne bi šlo za primer s točkovno obremenitvijo.

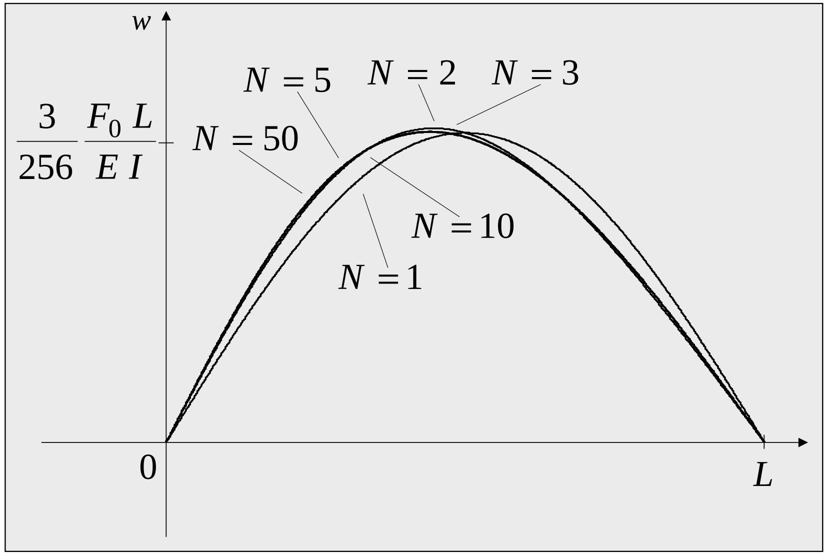
Diferencialno enačbo problema zapišemo upoštevajoč tako aproksimacijsko funkcijo kot razvrstitev obremenitve, kar da:

$$EI\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} c_\mathrm{k}\left(\frac{\mathrm{k}\pi}{L}\right)^4\sin\frac{\mathrm{k}\pi x}{L}=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} B_\mathrm{k}\sin\frac{\mathrm{k}\pi x}{L} \quad ; \quad x\in[0,L]$$

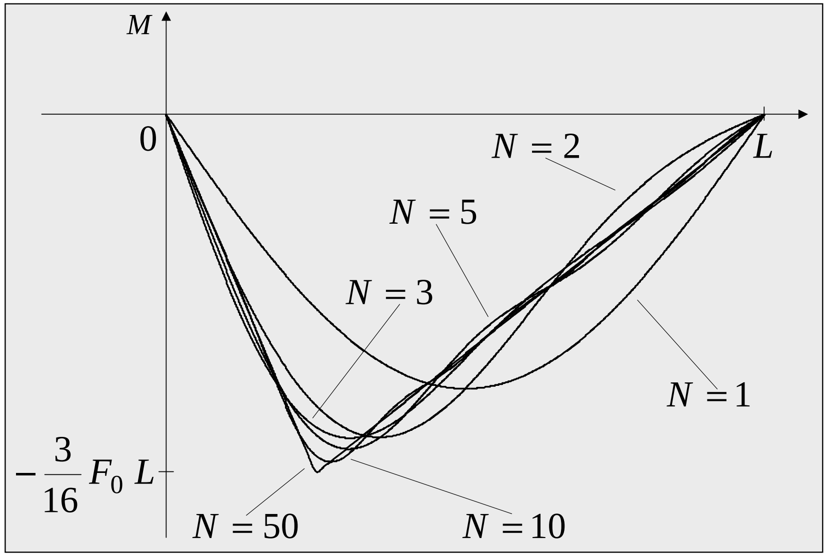
od tod pa koeficienti c_k :

$$c_\mathrm{k}=\left(\frac{L}{\mathrm{k}\pi}\right)^4\frac{B_\mathrm{k}}{EI}$$

Vpliv števila členov v aproksimacijski rešitvi na natančnost povesa



Vpliv števila členov v aproksimacijski rešitvi na natančnost momenta



Vpliv števila členov v aproksimacijski rešitvi na natančnost prečne sile