INTERPOLACIJSKI PRISTOP:

V primeru INTERPOLACIJSKEGA PRISTOPA je aproksimativna rešitev zasnovana na končni množici $\{c_k\}$ diskretnih parametrov, ki aproksimirajo vrednosti primarnih spremenljivk v končno mnogo izbranih točkah območja $x = x_k$.

Aproksimativna rešitev $v_N(x)$, ki jo tedaj zapišemo kot:

$$v_N(x) = \Im(x \times \{c_k ; k = 0,1,\ldots,N\}) \quad ; \quad x \in [0, L]$$

je v funkcijskem smislu opredeljena šele z izbiro interpolacijske funkcije $\Im(x \times \{c_k\})$. Ta ekstrapolira s koeficienti c_k opredeljeno končno množico aproksimativnih diskretnih vrednosti primarnih spremenljivk na celotno funkcijsko območje $[0, L]$.

V okviru postopka izračuna aproksimativne rešitve je torej najprej potrebno določiti nepoznano velikost koeficientov c_k.

Predmet naše obravnave je območna diferencialna enačba:

$$Dv(x) = f(x) \quad ; \quad x \in [0, L]$$

katere aproksimativno rešitev $v_N(x)$ iščemo na osnovi končne množice aproksimiranih vrednosti primarnih spremenljivk v diskretnih točkah funkcijskega območja $[0, L]$.

Koeficiente c_k fizikalno opredelimo kar kot aproksimirane vrednosti osnovne primarne spremenljivke $v(x)$ v izbranih točkah $x = x_k$, torej:

$$c_k \equiv v_k \approx v(x_k) \quad ; \quad x_k \in [0, L] \quad , k = 0,1,2,\ldots,N$$

Pomembno je ugotoviti, da funkcijska oblika aproksimativne rešitve $v_N(x)$, ki jo dobimo z interpolacijo nad končno množico $\{v_k\}$ ni enolično opredeljena z naborom $\{v_k\}$, marveč šele z izbiro interpolacijske funkcije $\Im(x \times \{v_k\})$. Očitno lahko dobimo pri istem naboru $\{v_k\}$ z izbiro različnih interpolacijskih funkcij tudi različne funkcijske aproksimacije rešitve $v(x)$:

$$v_N(x) = \Im(x \times \{v_k ; k = 0,1,\ldots,N\}) \quad ; \quad x \in [0, L]$$

KAKO DOLOČITI KOEFICIENTE $c_k \equiv v_k$?

Aproksimativno rešitev $v_N(x)$:

$$v_N(x) = \Im(x \times \{v_k ; k = 0,1,\ldots,N\}) \quad ; \quad x \in [0, L]$$

določa v prvi vrsti nabor aproksimiranih funkcijskih vrednosti osnovne primarne spremenljivke problema, ki ga opredelimo s končno množico $\{v_k\}$ z (N+1) neznanimi koeficienti v_k. Določitev velikosti le-teh zahteva obstoj ustreznega sistema (N+1) linearno neodvisnih enačb.

Da bi bila aproksimativna rešitev $v_N(x)$ ne glede na stopnjo njene aproksimacije tudi fizikalno konsistentna in verodostojna, mora biti le-ta, ne glede na privzeto obliko interpolacijske funkcije $\Im(x \times \{v_k\})$, grajena na fizikalno utemeljenem naboru $\{v_k\}$. Kar pomeni, da je pri tvorbi potrebnega sistema enačb za izvrednotenje (N+1) neznanih koeficientov v_k potrebno v čim večji meri zadostiti ključnim enačbam obravnavanega problema – t.j. vodilni diferencialni enačbi ter enačbam, s katerimi so definirani robni pogoji ter pogoji konsistentnega prehoda.

Zato uporabimo kot osnovo za konstrukcijo sistema (N+1) enačb s koeficienti v_k kot neznankami najprej enačbe robnih pogojev, zatem pogoje konsistentnosti prehoda in končno še na vodilni diferencialni enačbi problema zasnovane manjkajoče enačbe.

PROBLEM:
KAKO IZ ZVEZNEGA PREITI V DISKRETNO ?

Aproksimacijo našega problema želimo graditi na diskretnih vrednostih osnovne primarne spremenljivke v_k, a izpolnitev fizikalne konsistence aproksimacije je pogojena z diferencialnimi zvezami, ki seveda zahtevajo funkcijsko obravnavo. Te pa pri interpolacijskem pristopu aproksimativnega reševanja nimamo.

Postavlja se ključno vprašanje:

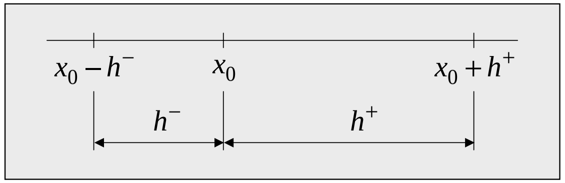
ALI JE MOGOČE DIFERENCIALNE ZVEZE APROKSIMIRATI Z DISKRETNIMI FUNKCIJSKIMI VREDNOSTMI ?

TRANSFORMACIJA DIFERENCIALNIH ZVEZ V DIFERENČNE

Naj bo funkcija $v(x)$ v okolici točke $x = x_0$ zvezna in zvezno odvedljiva funkcija, tako da jo okoli točke $x = x_0$ razvrstimo v Taylorjevo vrsto:

$$v(x_0 + h) = v(x_0) + \frac{h}{1!}\frac{dv}{dx}(x_0) + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2 v}{dx^2}(x_0) + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3 v}{dx^3}(x_0) + \ldots$$

Tedaj je ob poznanih lastnostih funkcije $v(x)$ v točki $x = x_0$ mogoče izraziti funkcijsko vrednost v neposredni okolici, npr. v točki $x = x_0 + h^+ > x_0$ ali pa v točki $x = x_0 - h^- < x_0$:



Vpeljimo nadalje še oznake:

$$v_0 = v(x_0)\ ,\quad \frac{d^r v_0}{dx^r} = \frac{d^r v}{dx^r}(x_0)$$

$$v^+ = v(x_0 + h^+)\ ,\quad v^- = v(x_0 - h^-)$$

Funkcijsko vrednost funkcije $v(x)$ v točki $x = x_0 + h^+$ izrazimo tako kot:

$$v^+ = v_0 + \frac{h^+}{1!}\frac{dv_0}{dx} + \frac{(h^+)^2}{2!}\frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{(h^+)^3}{3!}\frac{d^3 v_0}{dx^3} + \frac{(h^+)^4}{4!}\frac{d^4 v_0}{dx^4} + \ldots$$

funkcijsko vrednost v točki $x = x_0 - h^-$ pa kot:

$$v^- = v_0 - \frac{h^-}{1!}\frac{dv_0}{dx} + \frac{(h^-)^2}{2!}\frac{d^2 v_0}{dx^2} - \frac{(h^-)^3}{3!}\frac{d^3 v_0}{dx^3} + \frac{(h^-)^4}{4!}\frac{d^4 v_0}{dx^4} - \ldots$$

Z eliminacijo drugega odvoda lahko iz razvrstitev za v^+ in v^- izrazimo odvod v točki $x = x_0$, kot sledi:

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{1}{h^+ + h^-}\left\{\frac{h^-}{h^+}(v^+ - v_0) - \frac{h^+}{h^-}(v^- - v_0)\right\} - \frac{(h^+)^2 h^- + h^+ (h^-)^2}{6(h^+ + h^-)}\frac{d^3 v_0}{dx^3} + \ldots$$

Če nadalje poskrbimo, da je h tako izbran, da veljajo odnosi:

$$h^3 << h < 1$$

lahko aproksimiramo odvod v točki $x = x_0$ s funkcijskima vrednostima v sosednjih točkah:

$$\frac{dv_0}{dx} \approx \frac{1}{h^+ + h^-}\left\{\frac{h^-}{h^+}(v^+ - v_0) - \frac{h^+}{h^-}(v^- - v_0)\right\}$$

Z eliminacijo prvega odvoda iz razvrstitev za v^+ in v^- lahko izrazimo tudi drugi odvod v točki $x = x_0$. Aproksimacija le-tega je:

$$\frac{d^2 v_0}{dx^2} \approx \frac{2}{h^+ + h^-}\left\{\frac{1}{h^+}(v^+ - v_0) + \frac{1}{h^-}(v^- - v_0)\right\}$$

V primeru, ko sta obe točki od $x = x_0$ enako oddaljeni, torej ko je $h^+ = h^- = h$, sta aproksimaciji obeh odvodov podani s t.i. centralnima razlikama:

$$\frac{dv_0}{dx} \approx \frac{v^+ - v^-}{2h}\quad ,\quad \frac{d^2 v_0}{dx^2} \approx \frac{v^+ - 2v_0 + v^-}{h^2}$$

V nadaljevanju vpeljimo še operatorsko označbo za odvode, izražene s centralnimi razlikami:

$$\frac{d^r v_0}{dx^r} = \frac{d^r v}{dx^r}(x_0) \approx D^r v_0$$

APROKSIMACIJA ODVODOV NA OSNOVI CENTRALNIH RAZLIK:

V nadaljevanju se omejimo le na obravnavo aproksimiranih odvodov v točki $x = x_0$ na osnovi funkcijskih vrednosti v enako oddaljenih sosednjih točkah. Točke v okolici točke $x = x_0$ na številski premici oštevilčimo, kot prikazuje slika:

-2	-1	0	$+1$	$+2$
$x_0 - 2h$	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$	$x_0 + 2h$

Skladno s tem dogovorom zapišemo aproksimacijo prvega in drugega odvoda v centralni točki 0 s funkcijskima vrednostima v sosednjih točkah $+1$ in -1:

$$\frac{dv_0}{dx} \approx \frac{v_1 - v_{-1}}{2h} = D^1 v_0 \quad , \quad \frac{d^2 v_0}{dx^2} \approx \frac{v_1 - 2v_0 + v_{-1}}{h^2} = D^2 v_0$$

S tema odvodoma že lahko obravnavamo aproksimativno reševanje problemov, ki so definirani z diferencialno enačbo drugega reda (npr. osno obremenjeni nosilci).

Da bi lahko reševali še probleme, definirane z diferencialno enačbo četrtega reda (npr. upogibno obremenjeni nosilci), je potrebno izpeljati še ustrezne aproksimacije tretjega in četrtega odvoda:

$$\frac{d^3 v_0}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 v_0}{dx^2}\right) \approx \frac{d}{dx}\left(\frac{v_{+1} - 2v_0 + v_{-1}}{h^2}\right)$$

$$\frac{d^4 v_0}{dx^4} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2 v_0}{dx^2}\right) \approx \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{v_{+1} - 2v_0 + v_{-1}}{h^2}\right)$$

kar da:

$$\frac{d^3 v_0}{dx^3} \approx \frac{(v_{+2} - v_{-2}) - 2(v_{+1} - v_{-1})}{2h^3} = D^3 v_0$$

$$\frac{d^4 v_0}{dx^4} \approx \frac{6v_0 - 4(v_{+1} + v_{-1}) + (v_{+2} + v_{-2})}{h^4} = D^4 v_0$$

Številske vzorce, ki ponazarjajo udeležbo funkcijskih vrednosti centralne in sosednjih okoliških točk v izrazih za aproksimacijo odvodov, je mogoče slikovno prikazati:

	-2	-1	0	$+1$	$+2$	
$D^1 v_0$		-1	0	$+1$		$* \frac{1}{2h}$
$D^2 v_0$		$+1$	-2	$+1$		$* \frac{1}{h^2}$
$D^3 v_0$	$+1$	-2	0	$+2$	-1	$* \frac{1}{2h^3}$
$D^4 v_0$	$+1$	-4	$+6$	-4	$+1$	$* \frac{1}{h^4}$

Aproksimacije odvodov, dobljene na osnovi centralnih razlik, izkazujejo isto stopnjo natančnosti. Izkaže se namreč, da gredo aproksimirani odvodi vsaj s potenco h^2 proti eksaktni rešitvi. Prepričamo se lahko, da velja:

$$D^1 v_0 = \frac{dv_0}{dx} + h^2\left(\alpha_1 \frac{d^3 v_0}{dx^3} + \beta_1 \frac{d^5 v_0}{dx^5} h^2 + \ldots\right) ,$$

$$D^2 v_0 = \frac{d^2 v_0}{dx^2} + h^2\left(\alpha_2 \frac{d^4 v_0}{dx^4} + \beta_2 \frac{d^6 v_0}{dx^6} h^2 + \ldots\right) ,$$

$$D^3 v_0 = \frac{d^3 v_0}{dx^3} + h^2\left(\alpha_3 \frac{d^5 v_0}{dx^5} + \beta_3 \frac{d^7 v_0}{dx^7} h^2 + \ldots\right) ,$$

$$D^4 v_0 = \frac{d^4 v_0}{dx^4} + h^2\left(\alpha_4 \frac{d^6 v_0}{dx^6} + \beta_4 \frac{d^8 v_0}{dx^8} h^2 + \ldots\right)$$

METODA KONČNIH RAZLIK

Aproksimativna metoda, ki temelji na interpolacijskem pristopu, sistem enačb, potreben za določitev neznanih koeficientov v_k, pa zastavlja na pretvorbi diferencialnih operatorjev v diferenčne, se imenuje METODA KONČNIH RAZLIK.

KLJUČNO ZAHTEVO ZA OBJEKTIVNOST REŠITVE PREDSTAVLJA:

- IZPOLNITEV ROBNIH POGOJEV,
- IZPOLNITEV POGOJEV KONSISTENTNOSTI PREHODA

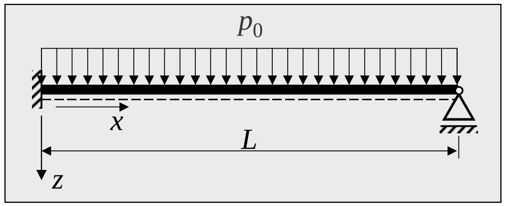
ter

- IZPOLNITEV OBMOČNE ENAČBE PROBLEMA.

ZATO TVORIMO
ISKANI SISTEM LINEARNO NEODVISNIH ENAČB
NA OSNOVI IZPOLNITVE ZGORNJIH ZAHTEV V ČIM VEČJI MERI.

PRIMER VII.1

Na primeru obojestransko podprtega nosilca dolžine L in konstantnega prereza $(EI = konst)$, obremenjenega z enakomerno obtežbo p_0, analiziramo reševanje problema po metodi končnih razlik (MKR) ob upoštevanju aproksimacije odvodov z diferenčnimi operatorji na osnovi centralnih razlik.



PRIMER VII.1.1: ekzaktna rešitev

Glede na konstantnost prečnega prereza $(EI = konst)$ bo rešitev upogibnega problema $w(x)$ zadovoljevala vodilno območno enačbo ter enačbe robnih pogojev v naslednji obliki:

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = p_0 \quad ; \quad x \in [0, L]$$

$$w(0) = \frac{dw}{dx}(0) = 0 \quad \wedge \quad w(L) = \frac{d^2w}{dx^2}(L) = 0$$

Eksaktna rešitev tako definiranega robnega problema je funkcija:

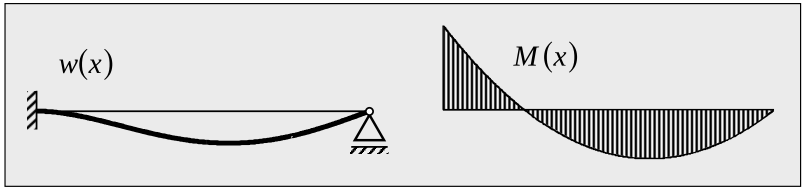
$$w(x) = \frac{p_0L^4}{48EI}\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 5\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \quad ; \quad x \in [0, L]$$

z upogibkom v sredini:

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{192}\frac{p_0L^4}{EI} = 0.00521\frac{p_0L^4}{EI}$$

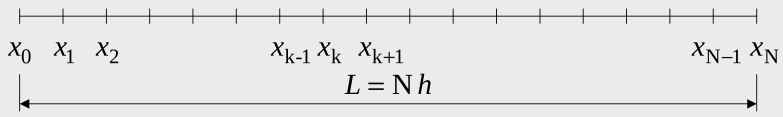
in upogibnim momentom v sredini in na mestu vpetja:

$$M(0) = -EI\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=0} = -\frac{p_0L^2}{8} \quad \wedge \quad M\left(\frac{L}{2}\right) = -EI\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{p_0L^2}{16}$$



PRIMER VII.1.2: aproksimativna rešitev z MKR (centralne razlike)

Pri aproksimativnem reševanju problemov, popisanih z območno diferencialno enačbo, z MKR najprej diskretiziramo območje, t.j. v našem primeru enorazsežni interval $[0, L]$, na določeno število podintervalov, katerih dolžine naj bodo enake, kar pa sicer ni obvezno. Naj bo širina posameznega podintervala h, število vseh podintervalov pa N. Točke x_k, $\mathrm{k} = 1,2,...,(\mathrm{N}-1)$, ki razmejujejo podintervale, ter krajišča intervala $[0, L]$ tvorijo nabor točk, v katerih želimo poiskati aproksimativne vrednosti osnovne spremenljivke $w_\mathrm{k} \approx w(x_\mathrm{k})$, $\mathrm{k} = 0,1,2,..., \mathrm{N}$.



$$h = x_\mathrm{k} - x_{\mathrm{k}-1} = \frac{L}{\mathrm{N}} \;;\; \mathrm{k} = 1,2,..., \mathrm{N}$$

Neznanke tako diskretiziranega problema so torej funkcijske vrednosti osnovne spremenljivke v (N+1) točkah intervala $[0, L]$. Število potrebnih enačb dobimo na že ustaljeni način.

Za obravnavani primer, ki ne izkazuje nezveznosti na območju $[0, L]$, sledi:

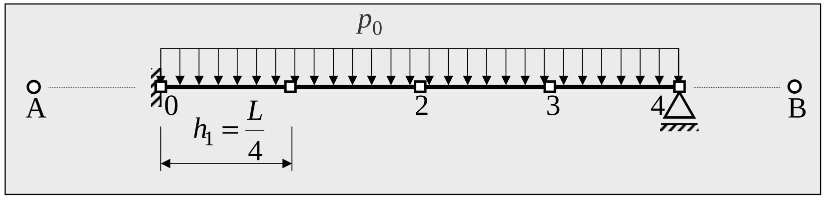
ENAČBE na osnovi izpolnitve območne enačbe problema v notranjih točkah območja:

Za vsako točko x_k; $\mathrm{k} = 1,2,...,(\mathrm{N}-1)$ v notranjosti opazovanega intervala zapišemo območno diferencialno enačbo v ustrezni diferenčni diskretizirani obliki:

$$EI\,\frac{d^4 w_\mathrm{k}}{dx^4} = p_\mathrm{k} \quad \rightarrow \quad EI\, D^4 v_\mathrm{k} = p_\mathrm{k} \;;\; \mathrm{k} = 1,2,...,(\mathrm{N}-1)$$

$$EI\,\frac{6v_\mathrm{k} - 4(v_{\mathrm{k}+1} + v_{\mathrm{k}-1}) + (v_{\mathrm{k}+2} + v_{\mathrm{k}-2})}{h^4} = p_\mathrm{k}$$

Formiranje enačbe postane sporno za skrajni točki v območju, to je točki x_1 in $x_{\mathrm{N-1}}$, saj zaradi uporabljenega vzorca zahtevata uporabo funkcijskih vrednosti v točkah izven realnega območja. S tem se tudi število neznank poveča za dve.



Zagato bomo razrešili z uporabo robnih pogojev.

ENAČBE na osnovi robnih pogojev:

Iz naslova izpolnitve robnih pogojev je možno tvoriti največ toliko enačb, kolikor je na voljo robnih pogojev. Morebitne diferencialne zveze nadomestimo z diskretiziranimi diferenčnimi s centralnimi razlikami. Ker imamo v obravnavanem primeru štiri robne pogoje:

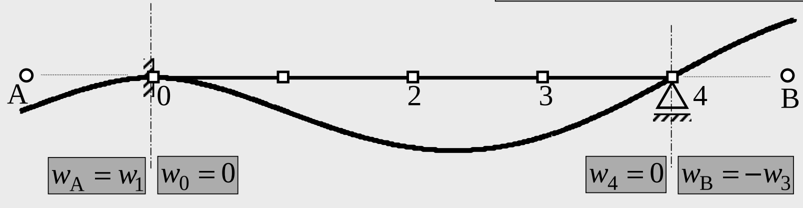
$$w_0 = \frac{dw_0}{dx} = 0 \quad \wedge \quad w_4 = \frac{d^2 w_4}{dx^2} = 0$$

sledijo od tod še štiri diferenčne enačbe:

$$w_0 = D^1 w_0 = 0 \quad \wedge \quad w_4 = D^2 w_4 = 0$$

Predvsem sta potrebni komentarja enačbi, s katerima razrešimo zagato v zvezi s funkcijskima vrednostima $w_\mathrm{A} \approx w(-h)$ ter $w_\mathrm{B} \approx w(L+h)$. Deformacijsko črto – upogibnico namišljeno nadaljujemo preko roba s simetrijskim nadaljevanjem v primeru vpetega roba oz. antisimetrijskim nadaljevanjem v primeru členkaste pritrditve.

$$D^1 w_0 = \frac{w_1 - w_\mathrm{A}}{2h} = 0 \qquad D^2 w_4 = \frac{w_\mathrm{B} - 2w_4 + w_3}{h^2} = 0$$



Za izbrano delitev na štiri podintervale dobimo naslednji sistem enačb:

$$
\begin{array}{r}
D^1 w_0 = 0 : \\
w_0 = 0 : \\
EI\, D^4 w_1 = p_0 : \\
EI\, D^4 w_2 = p_0 : \\
EI\, D^4 w_3 = p_0 : \\
w_4 = 0 : \\
D^2 w_4 = 0 :
\end{array}
\quad
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} w_A \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_B \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\frac{p_0 h^4}{EI}
$$

z rešitvijo:

$$\{w_A, w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_B\} = \{20,0,20,37,30,0,-30\}\frac{p_0 h^4}{22EI}$$

Izračunana velikost povesa v sredini nosilca:

$$w\left(\frac{L}{2}\right) \approx w_2 = \frac{37}{22}\frac{p_0 h^4}{EI} = 0.00657\frac{p_0 L^4}{EI}$$

se od točne vrednosti razlikuje za 26%, kar niti ni tako veliko glede na izredno redko mrežo $h = h_1 = 0.25L$

Izračunana velikost momenta v sredini nosilca:

$$M\left(\frac{L}{2}\right) \approx -EI\, D^2 w_2 = -EI\,\frac{w_3 - 2w_2 + w_1}{h^2} = \frac{24}{22} p_0 h^2 = 0.0682\, p_0 L^2$$

se od točne vrednosti razlikuje le za 9.1%, kar je zelo dobra ocena, ni pa to v skladu z ugotovljeno natančnostjo za osnovno primarno spremenljivko. Glede na odstopanje od prave vrednosti tako dobro aproksimacijo za moment lahko razumemo kot povsem slučajno!

DILEME ob uporabi diferenčnih operatorjev na osnovi centralnih razlik

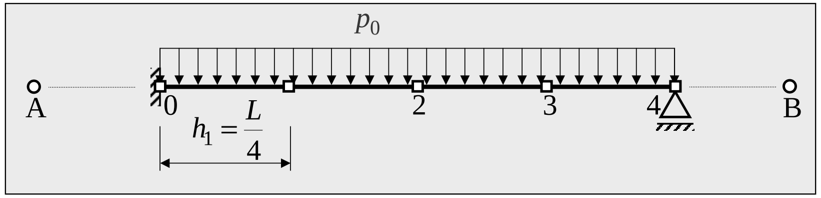
Ob uporabi diferenčnih operatorjev na osnovi centralnih razlik se moramo zavedati, da so bili le-ti izpeljani na osnovi Taylorjeve razvrstitve zvezne in zvezno odvedljive funkcije okrog točke $x = x_0$.

Aproksimacija odvoda v neki točki z uporabo diferenčnega operatorja na osnovi centralnih razlik zajema nabor diskretnih vrednosti v, glede na točko, v kateri aproksimiramo odvod, simetrično razporejenih okoliških točkah. Matematična konsistentnost diskretne aproksimacije bo v duhu njene izpeljave zagotovljena le v primeru, če pripadajo funkcijske vrednosti v teh točkah tudi dejansko (fizikalno pogojenemu) istemu funkcijskemu predpisu, ki izkazuje zveznost in zvezno odvedljivost na območju točk, uporabljenih v diferenčni aproksimaciji.

Točke, v katerih prihaja do spremembe funkcijskega predpisa, so bile že vseskozi predmet naše posebne obravnave. V povezavi z njimi smo govorili tako o robnih pogojih kot o pogojih konsistentnega prehoda. Že tedaj smo ugotavljali, da nespoštovanje kateregakoli od teh pogojev vodi do nepravilne rešitve problema. Kar je veljalo pri ekzaktnem reševanju, velja nedvomno tudi za aproksimativno reševanje!

PROBLEMATIKA OBRAVNAVE TOČK, v katerih prihaja do spremembe funkcijskih predpisov, v primeru uporabe diferenčnih operatorjev na osnovi centralnih razlik

Že v primeru VII.1.2 smo za izpolnitev robnih pogojev uporabili diferenčne operatorje na osnovi centralnih razlik, a smo ob tem odprli vprašanje fizikalne utemeljenosti takšnega pristopa, saj smo pri aproksimaciji robnih pogojev ter vodilne enačbe problema v prvih notranjih točkah območja uporabili nematerialne točke izven realnega območja problema.

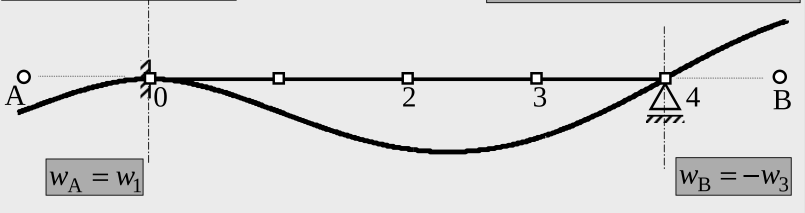


Aproksimacija robnih pogojev na osnovi centralnih razlik je dala naslednje odvisnosti med funkcijskimi vrednostmi v točkah območja in točkami izven območja:

$$w_A = w_1 \quad \wedge \quad w_B = -w_3$$

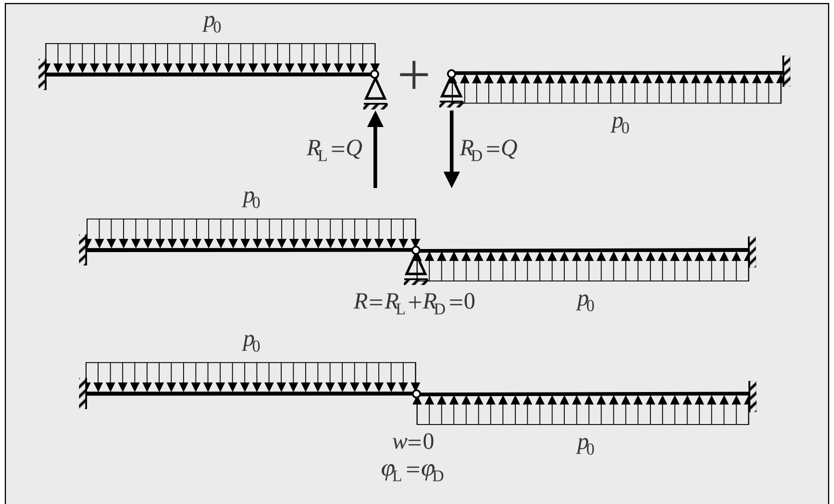
Če iščemo fizikalno ozadje, ki bi ustrezalo dobljenim zvezam, pravzaprav relativno hitro najdemo primer, ki povsem ustreza. Če deformacijsko črto namišljeno nadaljujemo preko roba s simetrijskim nadaljevanjem v primeru vpetega roba oz. antisimetrijskim nadaljevanjem v primeru členkaste pritrditve, dobimo primer, ki je povsem realen, s tem pa tudi aproksimacija obravnavanih dveh odvodov.

$$D^1 w_0 = \frac{w_1 - w_A}{2h} = 0 \qquad D^2 w_4 = \frac{w_B - 2w_4 + w_3}{h^2} = 0$$



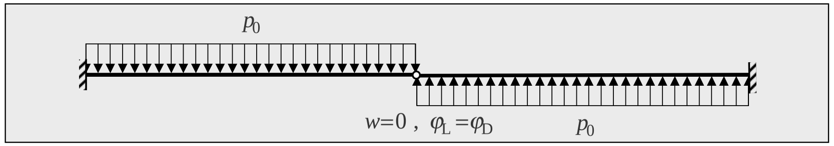
Navkljub temu, da je prikazana razširitev funkcijskega predpisa z realnega območja fizikalno konsistentna, je očitno, da izkazujejo tako dobljeni funkcijski predpisi nezveznost vsaj v enem od višjih odvodov na krajiščih realnega območja, s tem pa je pričakovati tudi težave ob njihovi aproksimaciji.

Statična in deformacijska analiza obravnavanega primera dejansko pokažeta, da je antisimetrijsko nadaljevanje nosilca v smeri preko členkaste podpore povsem realno.



Primer izkazuje prav posebne lastnosti glede zveznosti fizikalnih spremenljivk – primarne so zvezne po definiciji, od sekundarnih pa je glede na lastnosti antisimetrične obremenitve simetrično oblikovane konstrukcije z vmesno členkasto povezavo, na kar smo uspeli prevesti obravnavani primer nosilca, upogibni moment $M(x)$ zvezna funkcija, prečna sila $T(x)$ pa nezvezna funkcija (vpliv interakcijskih sil v členku!).

Nezveznost izkazujeta tako tretji kot četrti odvod, ki je proporcionalen zunanji prečni obtežbi $p_z(x)$. Omenjena lastnost neizpodbitno kaže na to, da popisujeta osnovno primarno spremenljivko $w(x)$ v obravnavanih intervalih, levo oz. desno od sredine, dva različna funkcijska predpisa. Zaradi lastnosti zunanje obtežbe, ki ima za posledico tudi antisimetrično deformiranje konstrukcije, je mogoče ob privzetju koordinatnega izhodišča na mestu členkaste podpore funkcijo povesa $w(x)$ predstaviti kot liho funkcijo, katere tretji in četrti odvod v sredini, to je pri $x = 0$, nista zvezna.



Kakor že lahko gledamo na obravnavani primer razširitve problema z realnega območja na okolico, za katero smo pokazali njeno povsem trdno fizikalno ozadje, kot neproblematičnega, lahko ugotovimo, da je skladno z opisanimi funkcijskimi lastnostmi rešitve uporaba funkcijskih vrednosti v točkah razširjenega intervala upravičena pri aproksimaciji odvodov do tretjega reda, je pa vprašljiva ko gre za aproksimiranje četrtega odvoda. V našem primeru je torej aproksimiranje vodilne diferencialne enačbe z uporabo zunanjih točk izven realnega območja vprašljivo in prinaša v naš izračun dodatno napako.

Napaka, ki bi jo naredili z uporabo zunanjih točk realnega območja v primeru aproksimacije odvodov, ki opredeljujejo sekundarne spremenljivke (v našem primeru torej drugi in tretji odvod), v primeru, da bi ti izkazovali nezveznost, je lahko še bolj zaznavna.

V to se prepričamo, če obravnavamo simetrično nadaljevanje problema preko toge podpore. Reakcijska sila in s tem tudi prečna sila $T(x)$ na tem mestu sta od nič različni, a v skladu s centralnimi razlikami aproksimirani tretji odvod da za rezultat nič. Rezultat sploh ni presenetljiv in je povsem v skladu z lastnostmi mehanskega odziva simetrične konstrukcije na simetrično obremenitev.

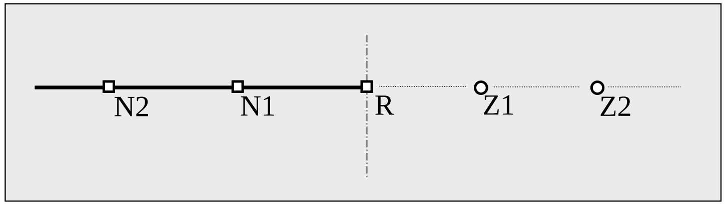
Vse to samo potrjuje, da moramo biti pri uporabi centralnih razlik previdni.

DILEME ob aproksimaciji robnih pogojev z diferenčnimi operatorji na osnovi centralnih razlik

Glede na konjugiranost primarnih in sekundarnih spremenljivk lahko ugotovimo, da imamo pri opredelitvi robnih pogojev na istem robu možne naslednje kombinacije:

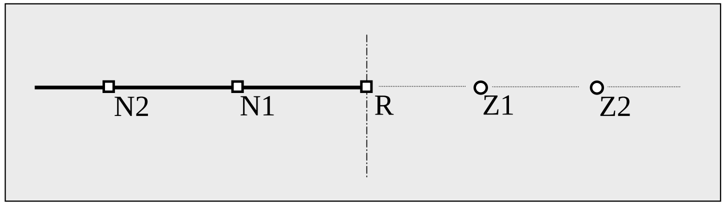
Robni problem	Fizikalne spremenljivke		Matematične spremenljivke	
	1. pogoj	2.pogoj	1. pogoj	2.pogoj
I.	w	φ	w	$\frac{dw}{dx}$
II.	w	M	w	$\frac{d^2w}{dx^2}$
III.	φ	F	$\frac{dw}{dx}$	$\frac{d^3w}{dx^3}$
IV.	M	F	$\frac{d^2w}{dx^2}$	$\frac{d^3w}{dx^3}$

S stališča diferenčne aproksimacije na osnovi centralnih razlik se za aproksimiranje danih odvodov v robni točki uporabijo funkcijske vrednosti v eni ali dveh zunanjih točkah:



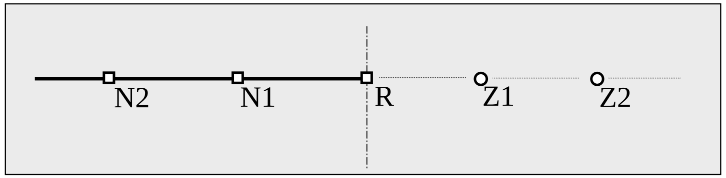
$$\frac{dw}{dx}(x_R) \approx D^1 w_R = \frac{w_{Z1} - w_{N1}}{2h}$$
$$\frac{d^2w}{dx^2}(x_R) \approx D^2 w_R = \frac{w_{Z1} - 2w_R + w_{N1}}{h^2}$$
$$\frac{d^3w}{dx^3}(x_R) \approx D^3 w_R = \frac{w_{Z2} - 2w_{Z1} + 2w_{N1} - w_{N2}}{2h^3}$$

V primeru I. in II. robnega problema, ki vključujejo v robnih pogojih odvode do drugega reda, pomeni njihova aproksimativna izpolnitev vključitev prve zunanje točke. S tem se število neznank, ki so prvotno omejene le na točke realnega območja, na danem robu poveča za eno. Ker zahtevamo za notranje točke območja izpolnitev vodilne enačbe problema, za rob pa izpolnitev robnih pogojev, imamo v obravnavanem primeru na robu ob dveh pogojih dejansko na voljo dve enačbi. Eden od pogojev, na prvi pogled sicer odvečen v smislu potrebnega števila enačb za neznane funkcijske vrednosti v točkah realnega območja, definira dodatno enačbo za novo neznanko.



$$\frac{dw}{dx}(x_R) \approx D^1 w_R = \frac{w_{Z1} - w_{N1}}{2h}, \quad \frac{d^2w}{dx^2}(x_R) \approx D^2 w_R = \frac{w_{Z1} - 2w_R + w_{N1}}{h^2}$$

Nasprotno pa pomeni obravnava robnih pogojev, ki vključujejo odvode tretjega reda (III. in IV. robni problem), vključitev dodatne zunanje točke pri aproksimativni izpolnitvi robnih pogojev. S tem se število neznank, ki so prvotno omejene le na točke realnega območja, na obravnavanem robu poveča za dve. V nasprotju z obravnavo v predhodnem odstavku pa tokrat sama izpolnitev robnih pogojev ne nudi zadostnega števila enačb za rešitev problema. Manjkajočo enačbo zaradi neznanke v dodatni zunanji točki bomo ustvarili z izpolnitvijo vodilne enačbe v robni točki, česar se nam do sedaj ni bilo treba poslužiti.



$$\frac{d^3w}{dx^3}(x_R) \approx D^3 w_R = \frac{w_{Z2} - 2w_{Z1} + 2w_{N1} - w_{N2}}{2h^3}$$

S tem smo vsaj načeloma razrešili problem aproksimacije robnih pogojev na osnovi centralnih razlik. Fizikalna utemeljenost takšnega pristopa pa ostaja še vedno pod vprašajem.

DILEME ob aproksimaciji pogojev konsistentnega prehoda z diferenčnimi operatorji na osnovi centralnih razlik

Izpolnitev pogojev konsistentnega prehoda se nanaša na konsistentno spremembo primarnih in sekundarnih spremenljivk ob prehodu iz območja veljavnosti enega funkcijskega predpisa v območje veljavnosti drugega predpisa.

Korektna izpolnitev teh pogojev v pogledu aproksimativnega reševanja ob uporabi diferenčnih operatorjev na osnovi centralnih razlik v nobenem primeru ni možna.

V smislu aproksimiranja robnih pogojev s centralnimi razlikami, kjer smo sicer zaradi vključitve točk izven realnega območja problema vseskozi opozarjali na fizikalno dopustnost in upravičenost takšnega pristopa, pa lahko nekatere probleme izpolnitve pogojev konsistentnega prehoda rešimo tudi s centralnimi razlikami.

Gre za primere, ko sekundarne spremenljivke ob prehodu iz enega območja v drugo ne doživijo nezvezne spremembe. V takšnem primeru sploh opustimo zahtevano izpolnjevanje pogojev konsistentnega prehoda v točki, ki razmejuje obravnavani območji. Velikost funkcijske vrednosti za dano točko dobimo z aproksimacijo vodilne enačbe, ki pa je v smislu vseh predhodnih diskusij prav gotovo vprašljiva, saj, četudi gre zgolj za diskretno aproksimacijo, ne more korektno zajeti vpliva različnosti funkcijskih predpisov.

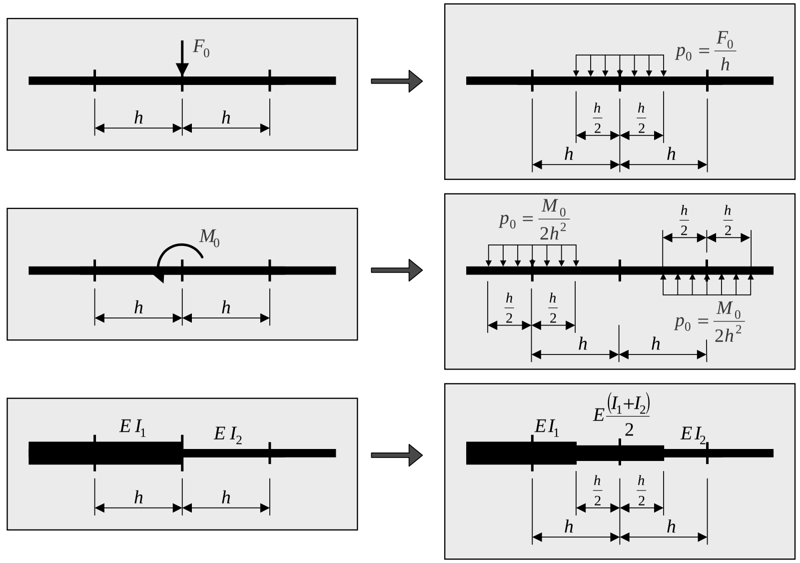
V smislu ohlapnejšega izpolnjevanja fizikalnih pogojev ob spremembah funkcijskih predpisov sledimo pravkar privzetemu pristopu tako, da s primerno transformacijo točkovnih obremenitev v ekvivalentne enakomerno porazdeljene obtežbe dejansko problem prevedemo na takšnega, ki ne izkazuje več nezveznosti v sekundarnih spremenljivkah.

S tem, ko smo iz problema izločili nezveznosti (v splošnem gre za obremenitvene ali konstitucijske parametre), lahko problem aproksimativno obravnavamo zgolj z izpolnitvijo vodilne enačbe v točkah notranjosti območja ter z izpolnitvijo robnih pogojev na robu.

Natančnost obravnavanega pristopa je močno pogojena s stopnjo diskretizacije. Zato velja razmisliti, ali vztrajati na močno poenostavljenem modelu ter, s ciljem doseči relativno objektivno aproksimacijo, reševati ustrezno večji sistem enačb ali izbrati konsistentnejši model z ustreznejšo aproksimacijo ter temu primerno manjšim sistemom enačb.

Manipulacije, ki smo jih pravkar obravnavali, kažejo na to, da imamo pri aproksimativnem reševanju relativno veliko svobode. Ob tem pa se moramo vseskozi zavedati, kje so meje nenehnega poenostavljanja.

Primeri transformacije v smislu ohranjanja statične in konstitucijske ekvivalence:



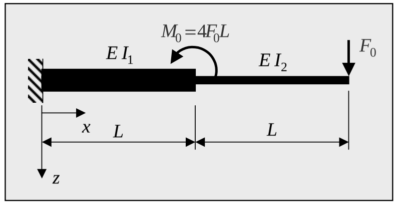
DILEME ob aproksimaciji vodilne enačbe z diferenčnimi operatorji na osnovi centralnih razlik

Tudi za aproksimiranje vodilne diferencialne enačbe z diferenčnimi operatorji na osnovi centralnih razlik velja že večkrat ugotovljeno. Zajemanje funkcijskih vrednosti v točkah, ki pripadajo drugemu funkcijskemu predpisu, ni konsistentno s postavitvijo diferenčnega operatorja na osnovi centralnih razlik. Pri izpeljavi le-tega je bila namreč predpostavljena zveznost in zvezna odvedljivost funkcije v centralni točki.

V tem smislu je aproksimiranje vodilne enačbe v notranjih točkah realnega območja, ki so bodisi neposredno ob robu ali ob meji, ki loči območja različnih funkcijskih predpisov, vselej problematično, saj zahteva centralna diferenčna shema v omenjenih točkah poseg na območje drugega funkcijskega predpisa ali celo na območje, ki opredeljuje zunanjost našega problema.

PRIMER VII.2

Na primeru konzolno vpetega nosilca dolžine $2L$ in odsekoma konstantnega prereza $(EI_i = konst\ ;\ I_1 = 2I_0, I_2 = I_0)$, obremenjenega na mestu spremembe prereza s točkovnim momentom $M_0 = 4F_0L$ ter s koncentrirano silo F_0 na koncu, analizirajmo reševanje problema po metodi končnih razlik (MKR) ob upoštevanju aproksimiranja odvodov izključno z diferenčnimi operatorji na osnovi centralnih razlik.



PRIMER VII.2.1: ekzaktna rešitev

Zaradi odsekoma spremenljivega prereza bo rešitev $w(x)$ na intervalu $[0,2L]$ definirana z dvema različnima predpisoma:

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x) & \dots\ x \in [0,L] \\ w_2(x) & \dots\ x \in [L,2L] \end{cases}$$

pri čemer bosta na meji med podintervaloma pri $x = L$ funkciji zaradi spremembe prereza izkazovali nezveznost tako v drugem kot v tretjem odvodu, ob čemer pa iz poznavanje statike vemo, da bo le notranji moment na tem mestu nezvezen.

Glede na konstantnost prečnega prereza $(EI_i = konst)$ ter odsotnost zvezno porazdeljene prečne obtežbe $p(x)$ v vsakem od obeh podintervalov bo rešitev $w(x)$ danega problema zadovoljevala vodilno območno enačbo na naslednji način:

$$EI_1 \frac{d^4 w_1}{dx^4} = 0\ ;\ \ x \in [0,L] \quad \wedge \quad EI_2 \frac{d^4 w_2}{dx^4} = 0\ ;\ \ x \in [L,2L]$$

ter robne pogoje:

$$w_1(0) = \frac{dw_1}{dx}(0) = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2 w_2}{dx^2}(2L) = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^3 w_2}{dx^3}(2L) = -\frac{F_0}{EI_2}$$

in pogoje konsistentnosti prehoda:

$$w_1(L) = w_2(L)$$

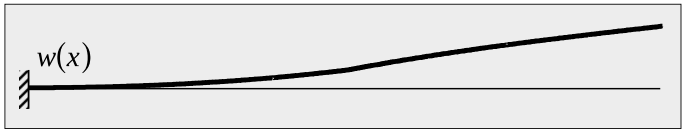
$$\frac{dw_1}{dx}(L) = \frac{dw_2}{dx}(L)$$

$$EI_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2}(L) - EI_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2}(L) = M_0$$

$$EI_1 \frac{d^3 w_1}{dx^3}(L) = EI_2 \frac{d^3 w_2}{dx^3}(L)$$

Eksaktna rešitev tako definiranega robnega problema je funkcija:

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x) = -\dfrac{F_0 L^3}{12 EI_0}\left[\left(\dfrac{x}{L}\right)^3 + 6\left(\dfrac{x}{L}\right)^2\right] & \dots\ x \in [0,L] \\ w_2(x) = -\dfrac{F_0 L^3}{12 EI_0}\left[2\left(\dfrac{x-L}{L}\right)^3 - 6\left(\dfrac{x-L}{L}\right)^2 + 15\left(\dfrac{x-L}{L}\right) + 7\right] & \dots\ x \in [L,2L] \end{cases}$$



z upogibkoma na mestu spremembe prereza ter na koncu konzole:

$$w_1(L) = -\frac{7}{12}\frac{F_0L^3}{EI_0} = -0.58333\frac{F_0L^3}{EI_0}$$

$$w_2(2L) = -\frac{18}{12}\frac{F_0L^3}{EI_0} = -1.5\frac{F_0L^3}{EI_0}$$

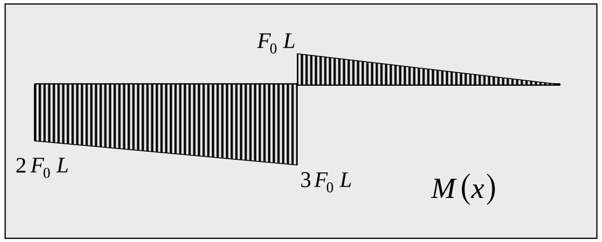
in upogibnim momentom na mestu spremembe prereza in na mestu vpetja:

$$M(L+0) = -EI_2\frac{d^2w_2}{dx^2}(L) = -1.0F_0L$$

$$M(L-0) = -EI_1\frac{d^2w_1}{dx^2}(L) = +3.0F_0L$$

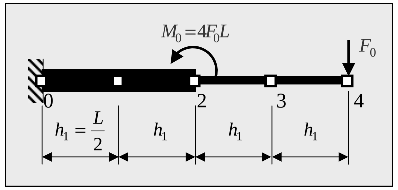
$$M(0) = -EI_1\frac{d^2w_1}{dx^2}(0) = +2.0F_0L$$

ter potekom, prikazanim v spodnjem diagramu:



PRIMER VIII.1.2: aproksimativna rešitev z MKR (centralne razlike)

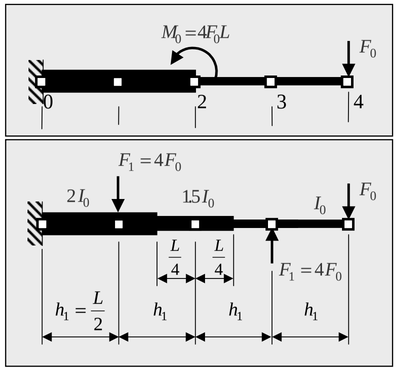
V smislu aproksimativnega reševanja po metodi končnih razlik razdelimo interval, na katerem je definiran naš problem, na štiri enako velike podintervale dolžine $h = 0.5L$. Neznanke tako diskretiziranega problema so funkcijske vrednosti osnovne spremenljivke v petih točkah območja nosilca.



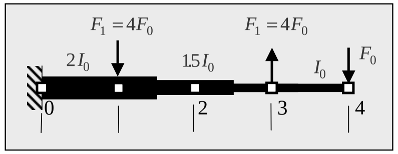
Ker izkazuje dani problem spremembo funkcijskega predpisa na mestu spremembe prereza, bi morali za njegovo korektno reševanje upoštevati pogoje konsistentnega prehoda spremenljivk na tem mestu. Tega nam diferenčne aproksimacije na osnovi centralnih razlik ne omogočajo. Poskusimo navkljub vsemu dani problem rešiti na osnovi aproksimacij s centralnimi razlikami ter analizirajmo pri tem velikost zavestno pogojene napake.

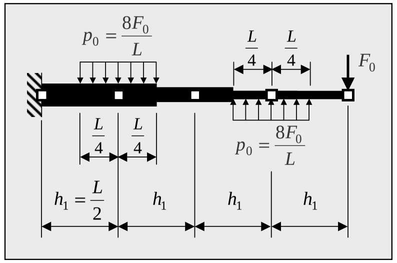
Da bi zaobšli nezveznosti, ki jih problem izkazuje na mestu spremembe prereza (v splošnem pa lahko tudi pri vsakem zveznem spreminjanju prečne obtežbe ali geometrije prečnega prereza), nadomestimo realni problem s statično in geometrijsko ekvivalentnim problemom. Osnovno načelo, ki ga bomo pri tem zasledovali, je, da so na območju $[x_0 - 0.5h, x_0 + 0.5h]$, ki pripada diskretizacijski točki x_0, vsi parametri konstantni.

V tem smislu ustvarimo najprej model I.:



Ker ekvivalentne točkovne sile, s katerimi smo nadomestili učinkovanje točkovnega momenta v sredini, predstavljajo same zase prav tako nezveznost v rešitvi, model I. še nadalje poenostavimo:





Model II. karakterizirajo odsekoma konstantni parametri, kar daje možnost uporabe centralnih razlik pri aproksimiranju našega problema.

Neznanke tako diskretiziranega problema so funkcijske vrednosti osnovne spremenljivke v petih točkah intervala $[0,2L]$, ki ga opredeljuje obravnavani nosilec. Število potrebnih enačb dobimo na že ustaljeni način.

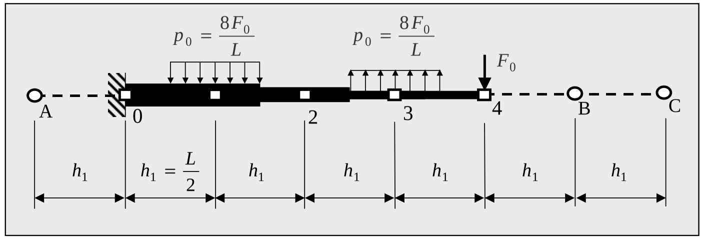
ENAČBE na osnovi izpolnitve območne enačbe problema v notranjih točkah območja:

Za tri točke v notranjosti opazovanega intervala zapišemo območno diferencialno enačbo v ustrezni diferenčni diskretizirani obliki:

$$EI\,\frac{d^4 w_{\mathrm{k}}}{dx^4} = p_{\mathrm{k}} \quad \rightarrow \quad EI_{\mathrm{k}}\, D^4 v_{\mathrm{k}} = p_{\mathrm{k}} \;\; ; \;\; \mathrm{k} = 1,2,3$$

$$EI_{\mathrm{k}}\,\frac{6v_{\mathrm{k}} - 4\left(v_{\mathrm{k}+1} + v_{\mathrm{k}-1}\right) + \left(v_{\mathrm{k}+2} + v_{\mathrm{k}-2}\right)}{h^4} = p_{\mathrm{k}}$$

Formiranje enačbe postane sporno za skrajni točki v območju, to je točki x_1 in x_3, saj zahtevata zaradi uporabljenega vzorca centralne diferenčne sheme uporabo funkcijskih vrednosti v točkah x_{A} in x_{B} izven realnega območja. S tem se število neznank poveča za dve. Glede na to, da moramo na vsakem od robov območja zadostiti še dvema robnima pogojema, neznank, za katere še nismo zapisali ustreznih diferenčno diskretiziranih enačb, pa prav tako štiri, je problem v smislu rešljivosti določen.



ENAČBE na osnovi robnih pogojev:

Štiri robne pogoje v obravnavanem primeru:

$$w_0 = \frac{dw_0}{dx} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2 w_4}{dx^2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d}{dx}\left(EI_4\,\frac{d^2 w_4}{dx^2}\right) = -F_0$$

zapišemo z diferenčnimi operatorji na osnovi centralnih razlik kot:

$$w_0 = D^1 w_0 = 0 \quad \wedge \quad D^2 w_4 = 0 \quad \wedge \quad EI_4\, D^3 w_4 = -F_0$$

Ob tem velja ugotoviti, da aproksimiranje prvega in drugega odvoda s centralnimi razlikami zahteva uporabo točk x_{A} in x_{B}, torej točk iz že poznanega nabora. Aproksimiranje tretjega odvoda pa zahteva uporabo dodatne zunanje točke x_{C}, katere funkcijska vrednost predstavlja novo neznanko v problemu. Zanjo na prvi pogled nimamo ustrezne enačbe, pa vendar ni tako.

Izpolnitev vodilne diferencialne enačbe smo do sedaj omejevali na notranje točke območja, s čemer smo dobili prav toliko enačb, kolikor je notranjih točk (in neznank!). Izpolnitev robnih pogojev (v primeru, ko ni šlo za robni pogoj s tretjim odvodom) je zagotavljala preostale štiri enačbe – dve za robni točki ter dve za zunanji točki x_{A} in x_{B}. Spomnimo se, da je bila vključitev fizikalno vprašljivih zunanjih točk v aproksimativno rešitev problema pogojena z izpolnitvijo vodilne enačbe (oz. njene aproksimacije na osnovi centralnih razlik) v prvih notranjih točkah realnega območja.

V iskanju dodatne fizikalno utemeljene enačbe, ki bo omogočila izračun s funkcijsko vrednostjo v točki x_{C} razširjenega nabora neznank, lahko ugotovimo, da funkcijska rešitev v robni točki x_4 kot točka realnega območja izpolnjuje prav tako vodilno diferencialno enačbo. Ker njena centralno diferenčna aproksimacija ne razširja števila neznank, postane problem z izpolnitvijo območne enačbe v tej točki z vidika rešljivosti sistema enačbe določen.

ENAČBE na osnovi izpolnitve območne enačbe problema v robni točki:

Za robno točko x_4 s centralnimi razlikami aproksimirana območna diferencialna enačba prejme naslednjo obliko:

$$EI\frac{d^4 w_k}{dx^4} = p_4 \quad\rightarrow\quad EI_4\, D^4 v_4 = p_4$$

$$EI_0\,\frac{6v_4 - 4(v_B + v_3) + (v_C + v_2)}{h^4} = 0$$

Opozoriti velja na to, da smo privzeli homogenost enačbe ($p_4 = 0$) navkljub temu, da v dani točki deluje točkovna obremenitev. Seveda vpliva točkovne sile nismo spregledali, ampak smo njeno prisotnost dejansko že upoštevali v robnem pogoju.

Za izbrano delitev na štiri podintervale dobimo naslednji sistem enačb:

$$D^1 w_0 = 0\ ,\ \ w_0 = 0\ ,\ \ E(2I_0)D^4 w_1 = +p_0\ ,\ \ E(1.5I_0)D^4 w_2 = 0$$

$$EI_0\, D^4 w_3 = -p_0\ ,\ \ EI_0\, D^2 w_4 = 0\ ,\ \ EI_0\, D^3 w_4 = -F_0\ ,\ \ EI_0\, D^4 w_4 = 0$$

ki da matrično enačbo z neznankami $w_A, w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_B, w_C$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_A \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_B \\ w_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{F_0 L^3}{4EI_0}$$

katerega rešitev je:

$$\{w_A, w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_B, w_C\} = \{7,0,7,25,49,74,99,123\} C_0$$

Pri tem smo s C_0 označili konstanto:

$$C_0 = -\frac{F_0 L^3}{8\,EI_0}$$

Izračunani aproksimirani velikosti povesa v sredini nosilca ter na njegovem koncu sta:

$$w(L) \approx w_2 = -\frac{25}{8}\frac{F_0 L^3}{EI_0} = -3.125\frac{F_0 L^3}{EI_0}$$

$$w(2L) \approx w_4 = -\frac{74}{8}\frac{F_0 L^3}{EI_0} = -9.250\frac{F_0 L^3}{EI_0}$$

se od točnih vrednosti močno razlikujejo (tudi več sto odstotkov na koncu konzole). Edino, kar lahko v dani aproksimacijski rešitvi potrjuje, da naš pristop le ni bil v celoti zgrešen, je oblika deformacijske črte. Ta namreč povsem zadovoljivo sledi ukrivljenosti, ki jo pogojuje realna obremenitev.

Z ozirom na veliko ugotovljeno napako je dani primer relativno težko ocenjevati iz vidika posledic nadomestitve izpolnjevanja pogojev konsistentnega prehoda z ustreznim izpolnjevanjem vodilne enačbe v prizadetih točkah. Nenazadnje je zaradi izredno redke mreže tudi nadomestni ekvivalentni model zelo daleč od zadovoljivega popisa originalnega problema.

Za kolikor toliko korektnejšo predstavo o izbranem pristopu aproksimiranja s centralnimi razlikami bi torej morali bistveno izboljšati diskretizacijski vzorec.

V primerjavi s primerom VII.1.2 kaže tudi poudariti, da je zdajšnji primer mnogo bolj občutljiv že na napako diferenčne aproksimacije. V primeru VII.1.2 je bila deformacijska črta v dveh skrajnih točkah nosilca določena z robnima pogojema nad osnovno primarno spremenljivko, kar je v veliki meri stabiliziralo aproksimacijo rešitve v točkah znotraj območja.

V pravkar obravnavanem primeru pa je deformacijska črta določena zgolj na enem robu, medtem ko je popis razmer na drugem robu izveden z vrsto aproksimacij ob uporabi fizikalno vprašljivih zunanjih točk.

Vse to pravzaprav kaže, da aproksimiranju odvodov izključno na osnovi diferenčnih shem, dobljenih s Taylorjevim razvojem okrog centralne točke ne gre povsem zaupati.