IZBOLJŠANJE REŠITVE OB ROBOVIH

Iz dosedanjih izkušenj uporabe metodologije končnih razlik na osnovi centralnih razlik smo pri problemu, ki ga opisuje območna diferencialna enačba četrtega reda, z nadomestitvijo diferencialnih zvez z ustreznimi diferenčnimi na območju, ki smo ga razdelili na množico enako velikih podobmočij, ugotovili:

- da pogojuje izpolnjevanje območne diferencialne enačbe v vseh notranjih točkah območja poznavanje funkcijske vrednosti v zunanjosti območja. Zaradi oblike uporabljene centralne diferenčne sheme le-ta zahteva pri aplikaciji na notranjo robno točko tudi vključitev zunanje robne točke, ki je sicer povsem fiktivna. Analitično nadaljevanje problema v primeru, ko za to ni fizikalne utemeljitve, je vprašljivo, s tem pa tudi objektivnost same funkcijske vrednosti v zunanji točki.
- da je nadomestitev izpolnitve pogojev konsistentnega prehoda z izpolnitvijo območne diferencialne enačbe v notranjih robnih točkah prirejenega ekvivalentnega modela sicer možna, a vodi ta pristop k objektivnim rešitvam le ob izredno fini diskretizaciji območja.

APROKSIMACIJA ODVODOV NA OSNOVI LEVIH OZ. DESNIH RAZLIK:

Večkrat se izkaže smotrno, da aproksimacije odvodov v točki $x = x_0$ ne izvedemo s sredinsko, glede na točko $x = x_0$, razporejenimi funkcijskimi vrednostmi, marveč tako, da so le-te razporejene bodisi levo ali desno od točke $x = x_0$. Točke v okolici točke $x = x_0$ na številski premici oštevilčimo, kot prikazuje slika:

desne razlike

0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
x_0	x_0+h	x_0+2h	x_0+3h	x_0+4h

leve razlike

-4	-3	-2	-1	0
x_0-4h	x_0-3h	x_0-2h	x_0-h	x_0

Izvedimo aproksimacijo odvodov v primeru desnih/levih razlik, to pomeni s funkcijskimi vrednostmi, ki se nahajajo desno/levo od točke $x = x_0$, v kateri iščemo aproksimirano vrednost odvodov. Da bi lahko reševali do sedaj obravnavane probleme, katerih vodilna diferencialna enačba je največ četrtega reda, zapišimo naslednje razvrstitve funkcije $v(x)$ v okolici točke $x = x_0$:

$$v_{\pm1} = v_0 \pm \frac{h}{1!}\frac{dv_0}{dx} + \frac{(h)^2}{2!}\frac{d^2v_0}{dx^2} \pm \frac{(h)^3}{3!}\frac{d^3v_0}{dx^3} + \frac{(h)^4}{4!}\frac{d^4v_0}{dx^4} \pm \frac{(h)^5}{5!}\frac{d^5v_0}{dx^5} + \dots,$$
$$v_{\pm2} = v_0 \pm \frac{2h}{1!}\frac{dv_0}{dx} + \frac{(2h)^2}{2!}\frac{d^2v_0}{dx^2} \pm \frac{(2h)^3}{3!}\frac{d^3v_0}{dx^3} + \frac{(2h)^4}{4!}\frac{d^4v_0}{dx^4} \pm \frac{(2h)^5}{5!}\frac{d^5v_0}{dx^5} + \dots,$$
$$v_{\pm3} = v_0 \pm \frac{3h}{1!}\frac{dv_0}{dx} + \frac{(3h)^2}{2!}\frac{d^2v_0}{dx^2} \pm \frac{(3h)^3}{3!}\frac{d^3v_0}{dx^3} + \frac{(3h)^4}{4!}\frac{d^4v_0}{dx^4} \pm \frac{(3h)^5}{5!}\frac{d^5v_0}{dx^5} + \dots,$$
$$v_{\pm4} = v_0 \pm \frac{4h}{1!}\frac{dv_0}{dx} + \frac{(4h)^2}{2!}\frac{d^2v_0}{dx^2} \pm \frac{(4h)^3}{3!}\frac{d^3v_0}{dx^3} + \frac{(4h)^4}{4!}\frac{d^4v_0}{dx^4} \pm \frac{(4h)^5}{5!}\frac{d^5v_0}{dx^5} + \dots,$$

V nadaljevanju vpeljimo še operatorsko označbo za odvode, izražene z desnimi/levimi $(+/-)$ razlikami:

$$\frac{d^{\mathrm{r}}v_0}{dx^{\mathrm{r}}} = \frac{d^{\mathrm{r}}v}{dx^{\mathrm{r}}}(x_0) \approx D_+^{\mathrm{r}}v_0 \quad \dots \quad \text{desne razlike}$$
$$\frac{d^{\mathrm{r}}v_0}{dx^{\mathrm{r}}} = \frac{d^{\mathrm{r}}v}{dx^{\mathrm{r}}}(x_0) \approx D_-^{\mathrm{r}}v_0 \quad \dots \quad \text{leve razlike}$$

Aproksimacijo odvodov z desnimi/levimi razlikami želimo izvesti tako, da bo stopnja natančnosti, ki smo jo dosegli s centralnimi razlikami, ohranjena. Torej:

$$D_\pm^{\mathrm{r}}v_0 = \frac{d^{\mathrm{r}}v_0}{dx^{\mathrm{r}}} + h^2\left(\alpha_{\mathrm{r}}\frac{d^{\mathrm{r}+2}v_0}{dx^{\mathrm{r}+2}} + \beta_{\mathrm{r}}\frac{d^{\mathrm{r}+4}v_0}{dx^{\mathrm{r}+4}}h^2 + \dots\right)$$

Za delitev h naj velja ista ocena kot v primeru analize s centralnimi razlikami:

$$h^3 << h < 1$$

Z eliminacijo drugega odvoda lahko iz razvrstitev za v_1 in v_2 izrazimo odvod v točki $x = x_0$, kot sledi:

$$\frac{dv_0}{dx} = -\frac{1}{2h}\left(3v_0 - 4v_1 + v_2\right) + \frac{h^2}{3}\frac{d^3v_0}{dx^3} + \ldots$$

Upoštevajoč velikostne relacije potenc delitve h aproksimiramo odvod v točki $x = x_0$ s funkcijskima vrednostima v sosednjih točkah, ki ležijo bodisi desno ali levo od točke $x = x_0$:

$$\frac{dv_0}{dx} \approx \mp\frac{1}{2h}\left(3v_0 - 4v_{\pm 1} + v_{\pm 2}\right) = D^1_{\pm}v_0$$

Z eliminacijo tretjega odvoda lahko iz razvrstitev za v_1, v_2 in v_3 izrazimo aproksimacijo drugega odvoda v točki $x = x_0$, kot sledi:

$$\frac{d^2v_0}{dx^2} \approx \frac{1}{h^2}\left(2v_0 - 5v_{\pm 1} + 4v_{\pm 2} - v_{\pm 3}\right) = D^2_{\pm}v_0$$

Z eliminacijo četrtega odvoda lahko iz razvrstitev za v_1, v_2, v_3 in v_4 izrazimo aproksimacijo tretjega odvoda v točki $x = x_0$, kot sledi:

$$\frac{d^3v_0}{dx^3} \approx \mp\frac{1}{2h^3}\left(5v_0 - 18v_{\pm 1} + 24v_{\pm 2} - 14v_{\pm 3} + 3v_{\pm 4}\right) = D^3_{\pm}v_0$$

Pokažimo še, da aproksimacije odvodov, dobljene na osnovi desnih/levih razlik, resnično izkazujejo isto stopnjo natančnosti. Zahtevali smo, da gredo aproksimirani odvodi vsaj s potenco h^2 proti eksaktni rešitvi.

$$D^1_{\pm}v_0 = \frac{dv_0}{dx} + h^2\left(\alpha_1\frac{d^3v_0}{dx^3} + \beta_1\frac{d^5v_0}{dx^5}h^2 + \ldots\right),$$

$$D^2_{\pm}v_0 = \frac{d^2v_0}{dx^2} + h^2\left(\alpha_2\frac{d^4v_0}{dx^4} + \beta_2\frac{d^6v_0}{dx^6}h^2 + \ldots\right),$$

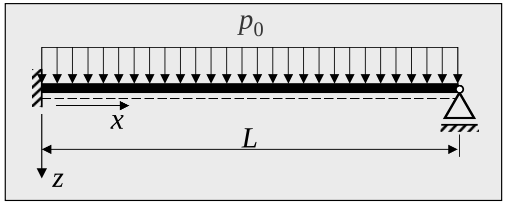
$$D^3_{\pm}v_0 = \frac{d^3v_0}{dx^3} + h^2\left(\alpha_3\frac{d^5v_0}{dx^5} + \beta_3\frac{d^7v_0}{dx^7}h^2 + \ldots\right)$$

Številske vzorce, ki ponazarjajo udeležbo funkcijskih vrednosti centralne in sosednjih okoliških točk v izrazih za aproksimacijo odvodov z uporabo desnih/levih razlik, je mogoče slikovno prikazati:

$\pm$	0	± 1	± 2	± 3	± 4	
$D^1_{\pm}v_0$	∓ 3	± 4	∓ 1			$*\frac{1}{2h}$
$D^2_{\pm}v_0$	2	-5	4	-1		$*\frac{1}{h^2}$
$D^3_{\pm}v_0$	∓ 5	± 18	∓ 24	± 14	∓ 3	$*\frac{1}{2h^3}$

PRIMER VIII.1 ≡ VII.1.3

Nadaljujmo analizo aproksimativnega reševanja problema VII.1 po metodi končnih razlik (MKR), a tokrat z upoštevanjem zgolj diskretizacijskih točk realnega območja.



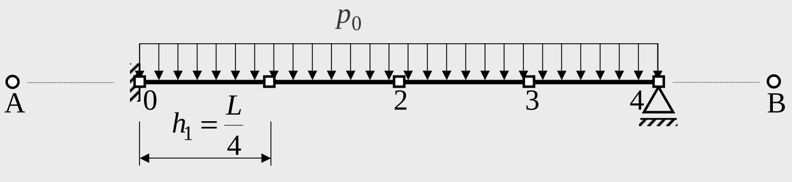
Rešitev naj bo primerjalno analizirana z vidika:

I. aproksimiranja robnih pogojev:
   a) s centralnimi razlikami
   b) z desnimi in levimi razlikami.

II. vpliva diskretizacijske delitve na natančnost aproksimirane rešitve.

PRIMER VII.1.3: aproksimativna rešitev z MKR (nespremenjena delitev z uporabo desnih/levih razlik za izražavo robnih pogojev)

Glede na to, da smo pri aproksimiranju območne enačbe na osnovi centralnih razlik v skrajnih notranjih točkah x_1 in x_3 tik ob robu naleteli na težave v obliki funkcijskih vrednosti v zunanjih točkah x_A in x_B, ki sta izven realnega območja nosilca, se pojavlja vprašanje ali bi lahko problem rešili še kako drugače. Še posebej je to vprašanje pomembno, saj nimamo zagotovila, da lahko analizirano območje nosilca analitično razširimo preko njegovih realnih meja, ne da bi pri tem spremenili tudi deformacijski odziv nosilca.



Dejansko bi lahko območni diferencialni enačbi, ki smo ju sicer želeli izpolniti v omenjenih notranjih točkah, nadomestili z enačbama taistih robnih pogojev, s katerima smo ob uporabi aproksimacije odvodov s centralnimi razlikami razrešili problem funkcijskih vrednosti v fiktivnih zunanjih točkah.

Če za diferenčno izražavo robnih pogojev ne uporabimo več centralnih razlik pač pa leve oz. desne razlike, pač glede na obravnavani rob, se s tem v obravnavi ne pojavita več zunanji točki x_A in x_B :

$$D_+^1 w_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2h}\left(-3w_0 + 4w_1 - w_2\right) = 0$$

$$D_-^2 w_4 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{h^2}\left(2w_4 - 5w_3 + 4w_2 - w_1\right) = 0$$

Če se hočemo v celoti izogniti uporabi zunanjih točk x_A in x_B, tedaj tudi vodilne enačbe v notranjih točkah x_1 in x_3 ne kaže aproksimirati na ustaljeni način, to je s centralnimi razlikami.

Še več, s stališča zagotovitve zadostnega števila enačb glede na neznanke problema, teh pa je prav toliko, kolikor je diskretizacijskih točk na danem območju (notranje + robne), se celo izkaže, da območnih enačb v omenjenih točkah sploh ne bi bilo potrebno izpolniti.

Druge enačbe robnega pogoja na robu tokrat ni potrebno uporabiti kot dodatno enačbo za izračun funkcijske vrednosti v zunanji točki, a njena prisotnost, če želimo problem rešiti v skladu z robnimi pogoji, je nujna. Da bi problem glede na število neznank ostal določen, se moramo s tem odreči eni enačbi iz naslova izpolnjevanja območne enačbe v notranjih točkah.

S predlaganim načinom, to je z aproksimiranjem robnih pogojev brez vključitve zunanjih točk območja, se izognemo iskanju fizikalno vprašljivih funkcijskih vrednosti v zunanjosti območja problema, a ob tem lahko tudi ugotovimo, da se enakomerno izpolnjevanje območne diferencialne enačbe vzdolž celotnega intervala žal s tem poruši.

Intuitivno lahko pričakujemo, da bo zaradi tega odziv, ki ga bo registrirala numerična rešitev, vseboval tudi to posebnost.

Opisani pristop diferenčnega aproksimiranja odvodov z desnimi oz. levimi razlikami kaže uporabiti tudi pri izpolnjevanju pogojev konsistentnega prehoda, saj bi v nasprotnem primeru, to je z aproksimacijo preko centralne diferenčne sheme, zajemali funkcijske vrednosti dveh različnih funkcijskih predpisov, kar pa je v nasprotju z izpeljavo diferenčnih operatorjev.

Za izbrano delitev na štiri podintervale dobimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{array}{rl} w_0 = 0 : & \longrightarrow \\ D_+^1 w_0 = 0 : & \longrightarrow \\ E\,I D^4 w_2 = p_0 : & \longrightarrow \\ D_-^2 w_4 = 0 : & \longrightarrow \\ w_4 = 0 : & \longrightarrow \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{p_0 h^4}{EI}$$

z rešitvijo:

$$\{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\} = \{0,1,4,3,0\} \frac{p_0 h^4}{8EI}$$

kar je bistveno slabše kot v primeru uporabe fiktivnih zunanjih točk.

Nedvomno lahko sicer to anomalijo odpravimo z dodatnim povečanjem števila podintervalov in zgoščevanjem mreže.

	$\frac{x}{L}$	ekzaktna rešitev	$h_1 = \frac{L}{4}$ a)	$h_1 = \frac{L}{4}$ b)	$h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{L}{8}$ a)	$h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{L}{8}$ b)	$h_3 = \frac{h_2}{2} = \frac{L}{16}$ a)	$h_3 = \frac{h_2}{2} = \frac{L}{16}$ b)
$w \frac{EI}{p_0 L^4}$	0.25	0.002441	0.003551	0.000488	0.002722	0.001831	0.002511	0.002276
	0.50	0.005208	0.006569	0.001953	0.005552	0.004255	0.005294	0.004956
	0.75	0.004394	0.005326	0.001464	0.004630	0.003574	0.004453	0.004180
$M \frac{1}{p_0 L^2}$	0.00	0.12500	0.11401	0.06250	0.12209	0.11161	0.12426	0.12187
	0.25	0.00000	-0.00852	0.01562	-0.00218	0.00558	-0.00055	0.00156
	0.50	-0.06250	-0.06818	-0.03125	-0.06395	-0.05357	-0.06286	-0.06015
	0.75	-0.06250	-0.06534	-0.01562	-0.06322	-0.05022	-0.06268	-0.05937
	1.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

NADALJNJE IZBOLJŠANJE REŠITVE OB ROBOVIH

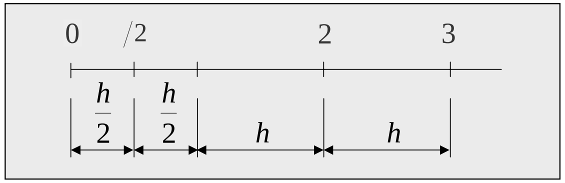
Iz dosedanjih izkušenj uporabe metodologije končnih razlik z nadomestitvijo diferencialnih zvez z ustreznimi diferenčnimi na območju, ki smo ga razdelili na množico enako velikih podobmočij, smo pri problemu, ki ga opisuje območna diferencialna enačba četrtega reda, ugotovili:

- da pogojuje izpolnjevanje območne diferencialne enačbe v vseh notranjih točkah območja poznavanje funkcijske vrednosti v zunanjosti območja. Zaradi oblike uporabljene centralne diferenčne sheme le-ta zahteva pri aplikaciji na notranjo robno točko tudi vključitev zunanje robne točke, ki je sicer povsem fiktivna. Analitično nadaljevanje problema v primeru, ko za to ni fizikalne utemeljitve, je vprašljivo, s tem pa tudi objektivnost same funkcijske vrednosti v zunanji točki.
- da nadomestitev območne diferencialne enačbe v notranjih robnih točkah z enačbami robnih pogojev, izraženih v diferenčni obliki z levimi oz. desnimi razlikami, sicer uspešno eliminira problem funkcijskih vrednosti v zunanjih fiktivnih točkah, ima pa neenakomerno izpolnjevanje območne diferencialne enačbe neugoden vpliv na numerično rešitev.

Izboljšanje rešitve želimo poiskati tako:

- da ne bo potrebna uporaba fizikalno spornih funkcijskih vrednosti v zunanjih robnih točkah.
- da bo izpolnitev območne diferencialne enačbe v diskretni obliki enakomerna po območju.

Postavljeni zahtevi lahko izpolnimo z vpeljavo dodatne notranje robne točke, ki razpolavlja robni podinterval regularne delitve.



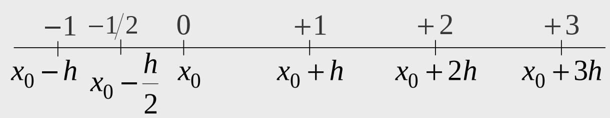
Pri tem bomo za vse notranje točke regularne delitve zahtevali izpolnitev diferenčne oblike območne enačbe problema. Enačbe, potrebne za izvrednotenje funkcijskih vrednosti v novo vpeljanih notranjih robnih točkah, pa bodo pogojene z izpolnitvijo robnih pogojev.

APROKSIMACIJA ODVODOV ZA NA ROBU MODIFICIRANO DELITEV

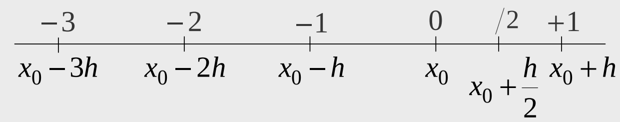
DIFERENČNI OPERATOR za opis območne enačbe četrtega reda:

Za notranjo robno točko regularne delitve (točka 0) je potrebno izpeljati diferenčni operator četrtega reda, ki ne bo baziral na centralnih razlikah ter posledični vključitvi zunanje robne točke, marveč bo vključeval novo kreirano točko ½ oz. - ½.

desne razlike z dodatno notranjo točko



leve razlike z dodatno notranjo točko



Aproksimacijo četrtega odvoda na modificirani mreži želimo izvesti tako, da bo stopnja natančnosti, ki smo jo dosegli s centralnimi razlikami, ohranjena. Torej:

$$^{*}D_{\pm}^{4}v_0 = \frac{d^4v_0}{dx^4} + h^2\left(\alpha_4 \frac{d^6v_0}{dx^6} + \beta_4 \frac{d^8v_0}{dx^8} h^2 + \dots\right)$$

Postopek določitve aproksimacije iskanega odvoda je že poznan. Z eliminacijo petega odvoda iz razvrstitev za v_{-1}, $v_{-1/2}$, v_1, v_2 in v_3 sledi:

$$\frac{d^4v_0}{dx^4} \approx \frac{1}{7h^4}\left(77v_{\mp1} - 256v_{\mp1/2} + 252v_0 - 98v_{\pm1} + 28v_{\pm2} - 3v_{\pm3}\right) = {}^{*}D_{\pm}^{4}v_0$$

$\pm$	∓1	$\mp1/2$	0	±1	±2	±3	
$^{*}D_{\pm}^{4}v_0$	77	−256	252	−98	28	−3	$*\frac{1}{7h^4}$

DIFERENČNI OPERATORJI za popis robnih pogojev:

Za robno točko (točka 0) modificirane mreže z dodatno notranjo robno točko ½ oz. - ½ je potrebno izpeljati diferenčne operatorje do vključno tretjega reda. Ponovno gre za izražavo odvodov z desnimi/levimi razlikami, le da tokrat na neekvidistantni mreži.

desne razlike z dodatno notranjo točko

0	$+1/2$	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
x_0	$x_0+\frac{h}{2}$	x_0+h	x_0+2h	x_0+3h	x_0+4h

leve razlike z dodatno notranjo točko

-4	-3	-2	-1	$-1/2$	0
x_0-4h	x_0-3h	x_0-2h	x_0-h	$x_0-\frac{h}{2}$	x_0

Aproksimacijo odvodov na modificirani mreži želimo izvesti tako, da bo stopnja natančnosti, ki smo jo dosegli s centralnimi razlikami, ohranjena. Torej:

$$^{*}D_{\pm}^{\mathrm{r}}v_0 = \frac{d^{\mathrm{r}}v_0}{dx^{\mathrm{r}}} + h^2\left(\alpha_{\mathrm{r}} \frac{d^{\mathrm{r}+2}v_0}{dx^{\mathrm{r}+2}} + \beta_{\mathrm{r}} \frac{d^{\mathrm{r}+4}v_0}{dx^{\mathrm{r}+4}} h^2 + \dots\right)$$

Postopek določitve aproksimacije iskanih odvodov je že poznan, aproksimacije pa so, kot sledi:

$$\frac{dv_0}{dx} \approx \mp\frac{1}{h}\left(3v_0 - 4v_{\pm1/2} + v_{\pm1}\right) = {}^{*}D_{\pm}^{1}v_0$$

$$\frac{d^2v_0}{dx^2} \approx \frac{1}{h^2}\left(7v_0 - 16v_{\pm1/2} + 10v_{\pm1} - v_{\pm2}\right) = {}^{*}D_{\pm}^{2}v_0$$

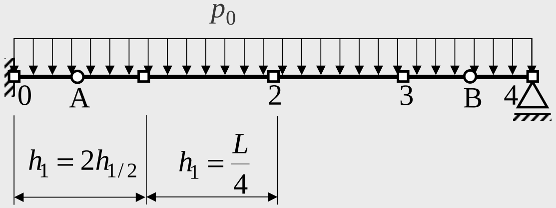
$$\frac{d^3v_0}{dx^3} \approx \mp\frac{1}{5h^3}\left(65v_0 - 192v_{\pm1/2} + 165v_{\pm1} - 45v_{\pm2} + 7v_{\pm3}\right) = {}^{*}D_{\pm}^{3}v_0$$

Številske vzorce, ki ponazarjajo udeležbo funkcijskih vrednosti centralne in sosednjih okoliških točk na modificirani neekvidistantni mreži v izrazih za aproksimacijo odvodov z uporabo desnih/levih razlik, je mogoče slikovno prikazati:

$\pm$	0	$\pm1/2$	±1	±2	±3	
$^{*}D_{\pm}^{1}v_0$	∓3	±4	∓1			$*\frac{1}{h}$
$^{*}D_{\pm}^{2}v_0$	7	−16	0	−1		$*\frac{1}{h^2}$
$^{*}D_{\pm}^{3}v_0$	∓65	±192	∓165	±45	∓7	$*\frac{1}{5h^3}$

PRIMER VIII.1 ≡ VII.1.4: aproksimativna rešitev z MKR (z dodatno notranjo točko ob robu)

Rešitev iščemo na modificirani mreži, ki v množici ekvidistantnih točk osnovne regularne delitve vključuje še dve notranji robni točki A in B, ki sta od roba oddaljeni za pol delitve. Po številu neznank je obravnavani pristop povsem enak pristopu z uporabljeno regularno ekvidistantno delitvijo ter zunanjimi robnimi točkami.



Neznanke tako diskretiziranega problema so torej funkcijske vrednosti osnovne spremenljivke v (N+1) točkah regularne ekvidistantne delitve intervala $[0, L]$ ter funkcijski vrednosti v točkah A in B modificirane mreže. Skupno je torej število neznank (N+3). Število potrebnih enačb dobimo na že ustaljeni način.

ENAČBE na osnovi izpolnitve območne enačbe problema:
Za vsako točko x_k, $k = 1,2,...,(N-1)$ regularne ekvidistantne delitve v notranjosti opazovanega intervala zapišemo območno diferencialno enačbo v ustrezni diferenčni diskretizirani obliki. Pri tem uporabimo za vse točke, z izjemo prve in zadnje, diferenčni operator na osnovi centralnih razlik D^4, za omenjeni točki pa operator na osnovi neekvidistantne delitve ${}^*D^4_{\pm}$:

$$EI\frac{d^4 w_k}{dx^4} = p_k \quad\rightarrow\quad EI\,D^4 v_k = p_k \;\;;\;\; k = 2,3,...,(N-2)$$
$$\rightarrow\quad EI\;{}^*D^4_+ v_k = p_k \;\;;\;\; k = 1$$
$$\rightarrow\quad EI\;{}^*D^4_- v_k = p_k \;\;;\;\; k = N-1$$

ENAČBE na osnovi robnih pogojev:
Iz naslova izpolnitve robnih pogojev je možno tvoriti preostale manjkajoče enačbe. Morebitne diferencialne zveze nadomestimo z diskretiziranimi diferenčnimi, ki se nanašajo na modificirano neekvidistantno mrežo. V obravnavanem primeru imamo tedaj za oba odvoda, ki se pojavljata v robnih pogojih:

$$\frac{dw_0}{dx} = 0 \quad\rightarrow\quad {}^*D^1_+ v_0 = 0$$
$$EI\frac{d^2 w_N}{dx^2} = 0 \quad\rightarrow\quad {}^*D^2_- v_N = 0$$

Sistem algebrajskih enačb dopolnjujeta še enačbi robnih pogojev osnovne primarne spremenljivke:

$$w_0 = 0 \quad\wedge\quad w_4 = 0$$

Za izbrano delitev na štiri podintervale dobimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{array}{r}
w_0 = 0 : \longrightarrow\\
{}^*D^1_+ w_0 = 0 : \longrightarrow\\
EI\;{}^*D^4_+ w_1 = p_0 : \longrightarrow\\
EI\;D^4 w_2 = p_0 : \longrightarrow\\
EI\;{}^*D^4_- w_3 = p_0 : \longrightarrow\\
{}^*D^2_- w_4 = 0 : \longrightarrow\\
w_4 = 0 : \longrightarrow
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
77 & -256 & 252 & -98 & 28 & 0 & -3\\
1 & 0 & -4 & 6 & -4 & 0 & 1\\
-3 & 0 & 28 & -98 & 252 & -256 & 77\\
0 & 0 & 0 & -1 & 10 & -16 & 7\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} w_0\\ w_A\\ w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_B\\ w_4 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 7\\ 1\\ 7\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix}\frac{p_0 h^4}{EI}$$

z rešitvijo:

$$\{w_0, w_A, w_1, w_2, w_3, w_B, w_4\} = \{0,154,616,1424,1184,651,0\}\frac{p_0 h^4}{1344 EI}$$

Izračunana velikost povesa v sredini nosilca:

$$w\left(\frac{L}{2}\right) \approx w_2 = \frac{1424}{1344}\frac{p_0 h^4}{EI} = 0.00414\,\frac{p_0 L^4}{EI}$$

se od točne vrednosti razlikuje za 21%, kar je bolje kot v primeru uporabe zunanjih točk.

Izračunana velikost momenta v sredini nosilca:

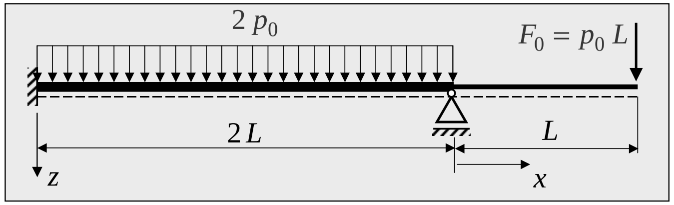
$$M\left(\frac{L}{2}\right) \approx -EI\,D^2 w_2 = -EI\,\frac{w_3 - 2w_2 + w_1}{h^2} = \frac{1048}{1344}\,p_0 h^2 = 0.0487\,p_0 L^2$$

se od točne vrednosti razlikuje za 22%, kar pa je precej slabše kot v primeru uporabe zunanjih točk. Povečanje napake v danem primeru ni alarmantno, saj je zaradi spreminjanja ukrivljenosti za korekten popis drugega odvoda potrebna bolj gosta delitev z manjšo dolžino podintervalov.

	$\frac{x}{L}$	ekzaktna rešitev	$h_1 = \frac{L}{4}$			$h_3 = \frac{h_2}{2} = \frac{L}{16}$		
			a)	b)	c)	a)	b)	c)
$w\,\frac{EI}{p_0 L^4}$	0.25	0.002441	0.003551	0.000488	0.001790	0.002511	0.002276	0.002395
	0.50	0.005208	0.006569	0.001953	0.004138	0.005294	0.004956	0.005136
	0.75	0.004394	0.005326	0.001464	0.003441	0.004453	0.004180	0.004331
$M\,\frac{1}{p_0 L^2}$	0.00	0.12500	0.11401	0.06250	0.10565	0.12426	0.12187	-0.12387
	0.25	0.00000	-0.00852	0.01562	-0.00893	-0.00055	0.00156	-0.00062
	0.50	-0.06250	-0.06818	-0.03125	-0.04873	-0.06286	-0.06015	-0.06160
	0.75	-0.06250	-0.06534	-0.01562	-0.04390	-0.06268	-0.05937	-0.06724
	1.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

PRIMER VIII.2

Na primeru previsnega nosilca dolžine $3L$ in odsekoma konstantnega prereza $(EI_i = konst\ ;\ I_1 = 2I_0\,, I_2 = I_0)$, obremenjenega med podporama z enakomerno obtežbo $2p_0$ ter s koncentrirano silo $F_0 = p_0 L$ na koncu previsnega polja, analizirajmo aproksimativno reševanje problema po metodi končnih razlik (MKR).



Aproksimativno reševanje naj bo izvedeno v smislu najustreznejšega pristopa z:
a) upoštevanjem primerne delitve območja tako glede na robove kot mejo med podintervaloma
b) upoštevanjem primernih diferenčnih izražav za čimbolj natančen popis deformacijskega odziva.

PRIMER VIII.2.1: ekzaktna rešitev

Zaradi odsekoma spremenljivega prereza bo rešitev $w(x)$ na intervalu $[-2L, L]$ definirana z dvema različnima predpisoma:

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x) & \dots\ x \in [-2L, 0] \\ w_2(x) & \dots\ x \in [0, L] \end{cases}$$

pri čemer bosta na meji med podintervaloma pri $x = 0$ funkciji izkazovali nezveznost tako v drugem (sprememba prereza) kot v tretjem odvodu (sprememba prereza in podpora z reakcijsko silo).

Glede na konstantnost prečnega prereza $(EI_i = konst)$ ter konstantnost zvezno porazdeljene prečne obtežbe $p(x)$ v vsakem od obeh podintervalov bo rešitev $w(x)$ danega problema zadovoljevala vodilno območno enačbo na naslednji način:

$$EI_1 \frac{d^4 w_1}{dx^4} = 2p_0\ ;\ \ x \in [-2L, 0] \quad \wedge \quad EI_2 \frac{d^4 w_2}{dx^4} = 0\ ;\ \ x \in [0, L]$$

ter robne pogoje:

$$w_1(-2L)=\frac{dw_1}{dx}(-2L)=0 \quad \wedge \quad \frac{d^2w_2}{dx^2}(L)=0 \quad \wedge \quad \frac{d^3w_2}{dx^3}(L)=-\frac{F_0}{EI_2}$$

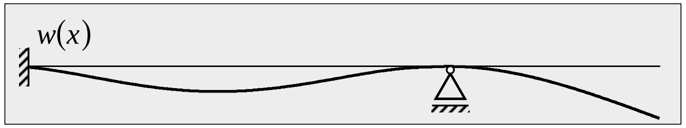
ter pogoje konsistentnosti prehoda:

$$w_1(0)=w_2(0)=0\ ,$$
$$\frac{dw_1}{dx}(0)=\frac{dw_2}{dx}(0)\ ,$$
$$EI_1\frac{d^2w_1}{dx^2}(0)=EI_2\frac{d^2w_2}{dx^2}(0)$$

Ob tem velja sicer še poudariti, da se v pogoju konsistentnosti prehoda druge sekundarne spremenljivke pojavlja reakcija v členkasti podpori, ki je po velikosti neznana. Vendar je problem rešljiv tudi brez tega pogoja, saj pogoj zveznosti osnovne primarne spremenljivke podaja zaradi podpore dve enačbi.

Eksaktna rešitev tako definiranega robnega problema je funkcija:

$$w(x)=\begin{cases} w_1(x)=\dfrac{p_0L^4}{12EI_0}\left[16\left(\dfrac{x}{2L}\right)^4+30\left(\dfrac{x}{2L}\right)^3+12\left(\dfrac{x}{2L}\right)^2-2\left(\dfrac{x}{2L}\right)\right] & \dots\ x\in[-2L,0] \\ w_2(x)=\dfrac{p_0L^4}{12EI_0}\left[-2\left(\dfrac{x}{L}\right)^3+6\left(\dfrac{x}{L}\right)^2-\left(\dfrac{x}{L}\right)\right] & \dots\ x\in[0,L] \end{cases}$$

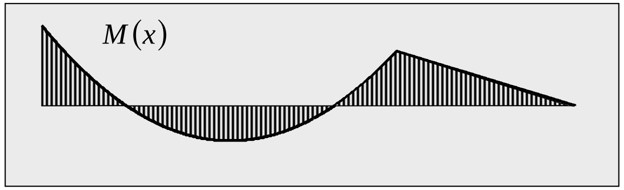


z upogibkoma v sredini podprtega dela ter na koncu previsnega polja:

$$w_1(-L)=\frac{5}{48}\frac{p_0L^4}{EI_0}=0.10417\frac{p_0L^4}{EI_0}$$
$$w_2(+L)=\frac{12}{48}\frac{p_0L^4}{EI_0}=0.25\frac{p_0L^4}{EI_0}$$

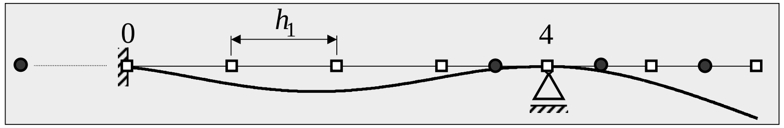
in upogibnim momentom nad členkasto podporo, v sredini in na mestu vpetja:

$$M(-2L)=-2EI_0\frac{d^2w_1}{dx^2}(-2L)=-1.5\,p_0L^2$$
$$M(-L)=-2EI_0\frac{d^2w_1}{dx^2}(-L)=+0.75\,p_0L^2$$
$$M(0)=-2EI_0\frac{d^2w_1}{dx^2}(0)=-EI_0\frac{d^2w_2}{dx^2}(0)=-1.0\,p_0L^2$$

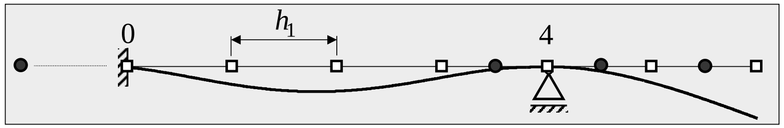


Preden pristopimo k aproksimativnemu reševanju z MKR, izvedimo še primerjalno analizo natančnosti odvodov, ki jih dobimo z uporabo različnih diferenčnih shem. Natančnost bomo preizkusili kar na osnovi dobljene ekzaktne rešitve, kar je nedvomno najboljši pokazatelj kvalitete posamezne sheme.

Ko gre za reševanje po MKR pa se moramo zavedati, da tako aproksimirani odvodi ključno vplivajo na aproksimativno rešitev funkcijskih vrednosti v točkah delitve območja.



	ekzaktna rešitev	aproksimativna rešitev					
		$h_1 = \frac{2L}{4}$		$h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{2L}{8}$		$h_3 = \frac{h_2}{2} = \frac{2L}{16}$	
		$D^r w_0$	$D^r_+ w_0$	$D^r w_0$	$D^r_+ w_0$	$D^r w_0$	$D^r_+ w_0$
$\frac{dw_0}{dx}$	0.00	0.00	0.114585	0.00	0.036456	0.00	0.010092
$\frac{d^2 w_0}{dx^2}$	0.75	0.437504	0.291660	0.583328	0.635546	0.664064	0.721280



	ekzaktna rešitev		aproksimativna rešitev					
			$h_1 = \frac{2L}{4}$		$h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{2L}{8}$		$h_3 = \frac{h_2}{2} = \frac{2L}{16}$	
			$^*D^r_- w_4$	$^*D^r_+ w_4$	$^*D^r_- w_4$	$^*D^r_+ w_4$	$^*D^r_- w_4$	$^*D^r_+ w_4$
$\frac{dw_4}{dx}$	-0.08333		-0.177085	0.000000	-0.114582	-0.062496	-0.092124	-0.078132
$\frac{d^2 w_4}{dx^2}$	0.5	1.0	0.354188	0.999968	0.463504	0.999999	0.490816	0.999999
			$D^r_- w_4$	$D^r_+ w_4$	$D^r_- w_4$	$D^r_+ w_4$	$D^r_- w_4$	$D^r_+ w_4$
$\frac{d^2 w_4}{dx^2}$	0.5	1.0	0.041660	0.999952	0.385456	0.999999	0.471296	0.999999

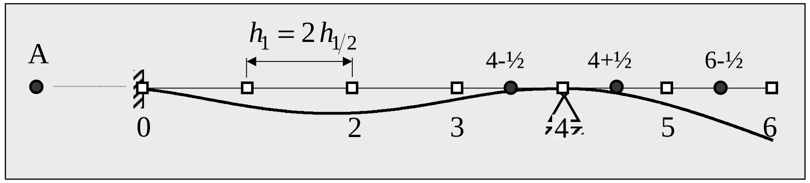
PRIMER VIII.2.2: aproksimativna rešitev z MKR

Razdelitev obravnavanega območja z mrežo diskretnih točk bomo izvedli v skladu s pridobljenimi izkušnjami ter na osnovi primerjalne analize natančnosti različnih shem odvodov. Istočasno lahko tudi ugotovimo, da je analitično nadaljevanje preko podpore togega vpetja fizikalno povsem utemeljeno.

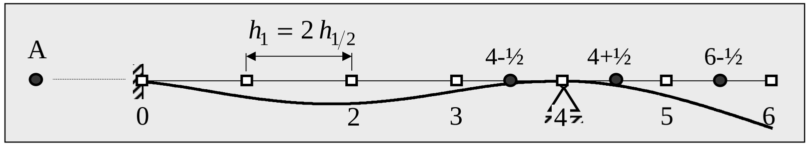
Podrobno analiziramo najosnovnejšo delitev s širino regularne ekvidistantne mreže $h = h_1 = 0.5L$, ki jo po potrebi razširimo z dodatnimi točkami ob robovih območja ter na meji med intervaloma različne togosti.

Vselej, ko bo to mogoče, bomo diferenčne sheme aplicirali na množico točk z najmanjšo širino delitve.

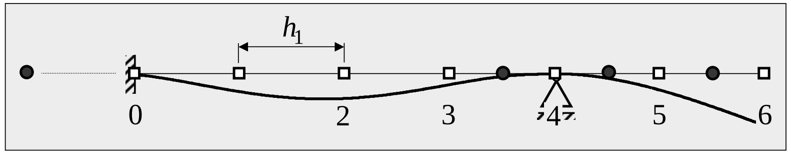
Točke osnovne delitve:	0,1,2,3,4,5,6
Točke razširjene delitve so:	4-½ , 4+½ , 6-½
Točka analitičnega nadaljevanja:	A



Sistem enačb za izračun neznanih funkcijskih vrednosti dobimo po že ustaljeni poti. V nadaljevanju podajamo diferenčni zapis posamezne pogojne enačbe z uporabljeno diferenčno shemo ter v enačbi udeleženimi neznankami:



$$
\begin{array}{rl}
D^1 w_0 = 0 \;: & \{w_A, w_1\} \\
w_0 = 0 \;: & \{w_0\} \\
EI_1\, D^4 w_1 = 2\,p_0 \;: & \{w_A, w_0, w_1, w_2, w_3\} \\
EI_1\, D^4 w_2 = 2\,p_0 \;: & \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\} \\
EI_1\, {}^{*}D_-^4 w_3 = 2\,p_0 \;: & \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_{4-1/2}, w_4\} \\
w_4 = 0 \;: & \{w_4\} \\
{}^{*}D_-^1 w_4 = {}^{*}D_+^1 w_4 \;: & \{w_3, w_{4-1/2}, w_4, w_{4+1/2}, w_5\} \\
EI_1\, {}^{*}D_-^2 w_4 = EI_2\, D_+^2 w_4 \;: & \{w_2, w_3, w_{4-1/2}, w_4, w_{4+1/2}, w_5, w_{6-1/2}\} \\
D^4 w_5 = 0 \;: & \{w_4, w_{4+1/2}, w_5, w_{6-1/2}, w_6\} \\
D_-^2 w_6 = 0 \;: & \{w_{4+1/2}, w_5, w_{6-1/2}, w_6\} \\
EI_2\, D_-^3 w_6 = -F_0 \;: & \{w_4, w_{4+1/2}, w_5, w_{6-1/2}, w_6\}
\end{array}
$$



	ekzaktna rešitev		aproksimativna rešitev $h_1 = \frac{2L}{4}$		aproksimativna rešitev $h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{2L}{8}$	
	$w\frac{EI}{p_0 L^4}$	$M\frac{1}{p_0 L^2}$	$w\frac{EI}{p_0 L^4}$	$M\frac{1}{p_0 L^2}$	$w\frac{EI}{p_0 L^4}$	$M\frac{1}{p_0 L^2}$
0	0.0000	1.5000	0.0000	0.7955	0.0000	1.4193
1	0.0546	-0.1250	0.0497	-0.0909	0.0600	-0.1621
2	0.1041	-0.7500	0.0881	-0.4773	0.1077	-0.7435
3	0.0703	-0.3750	0.0667	-0.3636	0.0703	-0.3249
4^-	0.0000	1.0000	0.0000	0.0625	0.0000	1.0000
4^+	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000
5	0.0625	0.5000	0.0176	0.5000	0.0591	0.5000
6	0.2500	0.0000	0.1602	0.0000	0.2431	0.0000