APROKSIMACIJA PARCIALNIH ODVODOV

V nadaljevanju bo veljala naša pozornost kontinualnim sistemom, katerih obnašanje je definirano bodisi v večrazsežnem prostoru ali pa je to obnašanje časovno odvisno. Odziv takšnega sistema na zunanji učinek je mogoče popisati s parcialnimi diferencialnimi enačbami. Aproksimacijo odziva bomo tako dobili z ustreznim aproksimiranjem parcialnih odvodov.

Temu ustrezno velja naše zanimanje v nadaljevanju najprej razširitvi že osvojenih konceptov za aproksimiranje odvodov funkcije ene neodvisne spremenljivke (navadne diferencialne enačbe) na aproksimiranje odvodov funkcij z več neodvisnimi spremenljivkami.

Skladno z definicijo parcialnega odvoda funkcije več neodvisnih spremenljivk $v = v(x, y, z, ...)$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y, z, ...) - v(x, y, z, ...)}{\Delta x}$$

lahko ugotovimo, da gre pri odvajanju po eni spremenljivki v bistvu za povsem običajen odvod funkcije ene spremenljivke, pri čemer so vse preostale spremenljivke v nakazanem limitnem procesu konstantne.

Aproksimacijo obravnavanega odvoda lahko tedaj zapišemo na povsem enak način, kot smo to počeli pri funkcijah ene spremenljivke. Tako bi bila aproksimacija odvoda v točki $T(x_0, y_0, z_0, ...)$ ob uporabi diferenčne sheme s centralnimi razlikami:

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} \approx \frac{v(x_0+\Delta x, y_0, z_0, ...) - v(x_0-\Delta x, y_0, z_0, ...)}{2\,\Delta x}$$

Analogno bi aproksimacijo mešanega odvoda drugega reda $\partial^2 v_0 / \partial x \partial z$ izvedli postopno v skladu z definicijo:

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right) \approx \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{v(x_0+\Delta x, y_0, z_0, ...) - v(x_0-\Delta x, y_0, z_0, ...)}{2\,\Delta x}\right]$$

Če nadalje še upoštevamo, da je:

$$\frac{\partial v(x_0+\Delta x, y_0, z_0, ...)}{\partial z} \approx \frac{v(x_0+\Delta x, y_0, z_0+\Delta z, ...) - v(x_0+\Delta x, y_0, z_0-\Delta z, ...)}{2\,\Delta z}$$

$$\frac{\partial v(x_0-\Delta x, y_0, z_0, ...)}{\partial z} \approx \frac{v(x_0-\Delta x, y_0, z_0+\Delta z, ...) - v(x_0-\Delta x, y_0, z_0-\Delta z, ...)}{2\,\Delta z}$$

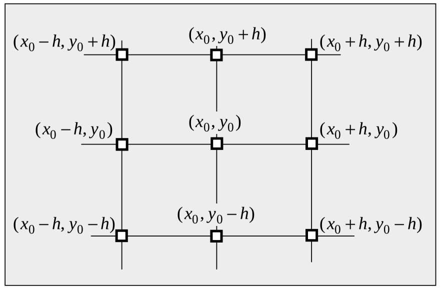
zapišemo aproksimirani mešani odvod kot:

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial z} \approx \frac{1}{4\,\Delta x\,\Delta z}\big[v(x_0+\Delta x, y_0, z_0+\Delta z, ...) - v(x_0+\Delta x, y_0, z_0-\Delta z, ...) - v(x_0-\Delta x, y_0, z_0+\Delta z, ...) + v(x_0-\Delta x, y_0, z_0-\Delta z, ...)\big]$$

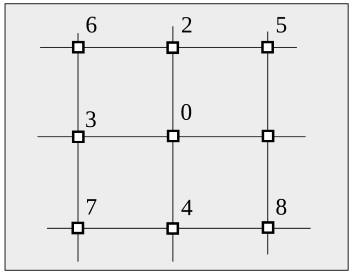
Slično bi dobili za $\partial^2 v_0 / \partial y^2$:

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2}\big[v(x_0, y_0+\Delta y, z_0, ...) - 2v(x_0, y_0, z_0, ...) + v(x_0, y_0-\Delta y, z_0, ...)\big]$$

Ker se bomo največkrat ukvarjali z ravninskimi problemi, je smotrno območje okoli točke $T(x_0, y_0)$, v kateri analizirajmo najprej parcialne odvode drugega reda, ustrezno diskretizirati z množico smiselno urejenih točk. Enostavno in urejeno ureditev množice okoliških točk podaja ortogonalno mreženje z ekvidistantno delitvijo v obeh smereh $\Delta x = \Delta y = h$.



Nadalje je smotrno izbrani nabor točk v okolici točke $T(x_0, y_0)$ oštevilčiti kot je prikazano:

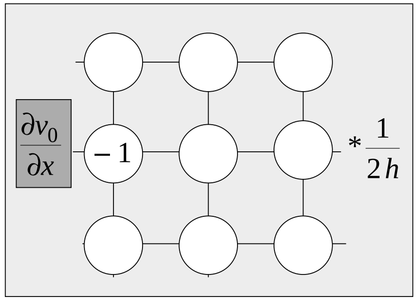


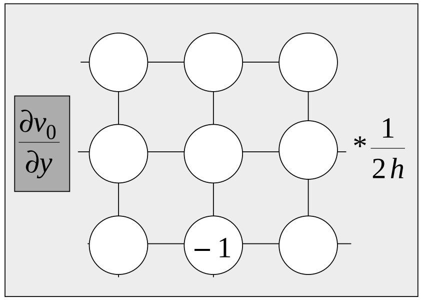
Parcialne odvode prvega in drugega reda lahko tedaj zapišemo kot :

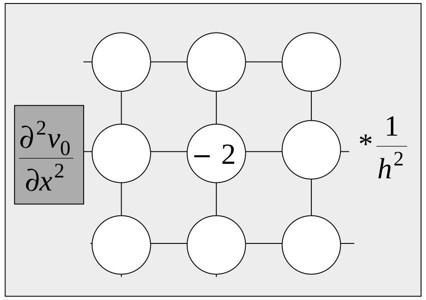
$$\frac{\partial v_0}{\partial x} \approx \frac{v_1 - v_3}{2h} \quad , \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} \approx \frac{v_2 - v_4}{2h} \quad , \quad \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \approx \frac{v_5 - v_6 + v_7 - v_8}{4h^2}$$

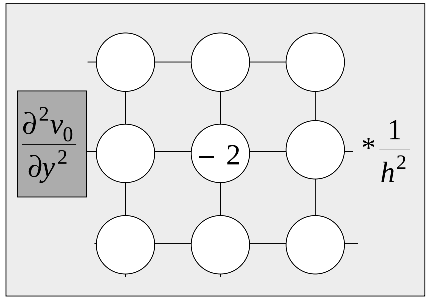
$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \approx \frac{v_1 - 2v_0 + v_3}{h^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \approx \frac{v_2 - 2v_0 + v_4}{h^2}$$

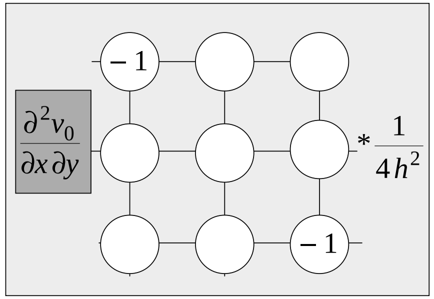
Številske vzorce, ki ponazarjajo udeležbo funkcijskih vrednosti centralne in sosednjih okoliških točk v izrazih za aproksimacijo parcialnih odvodov prvega in drugega reda funkcije dveh spremenljivk z uporabo centralnih razlik, je mogoče slikovno prikazati:







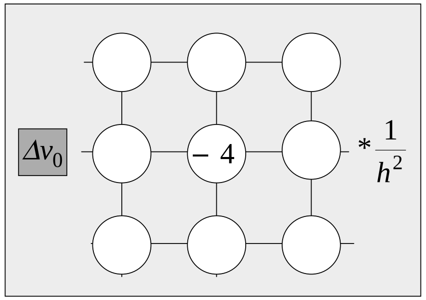




Končno zapišimo še diferenčno obliko diferencialnega operatorja Δ, ki se pojavlja izredno pogosto v območnih enačbah ravninskih problemov:

$$\Delta v_0 = \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \approx \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 4v_0}{h^2}$$

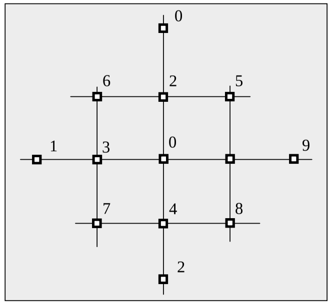
Številski vzorec, ki ponazarja udeležbo funkcijskih vrednosti centralne in sosednjih okoliških točk v izrazu za aproksimacijo Laplaceovega operatorja je:



Izredno pomemben je tudi dvojni Laplaceov operator $\Delta\Delta$, ki se prav tako pojavlja v območnih enačbah ravninskih problemov:

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Aproksimiranje operatorja $\Delta\Delta$ v točki $T(x_0, y_0)$ zahteva razširitev nabora okoliških točk. V ortogonalno mrežo vključimo še dodatne točke, ki jih ustrezno oštevilčimo, kot sledi:



Aproksimacijo operatorja $\Delta\Delta$ izvedemo ob upoštevanju diferencialnih zvez:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^4}{\partial y^4} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

ter diferenčnih povezav, izraženimi s centralnimi razlikami:

$$\frac{\partial^4 v_0}{\partial x^4} \approx \frac{6v_0 - 4(v_1 + v_3) + (v_9 + v_{11})}{h^4}$$

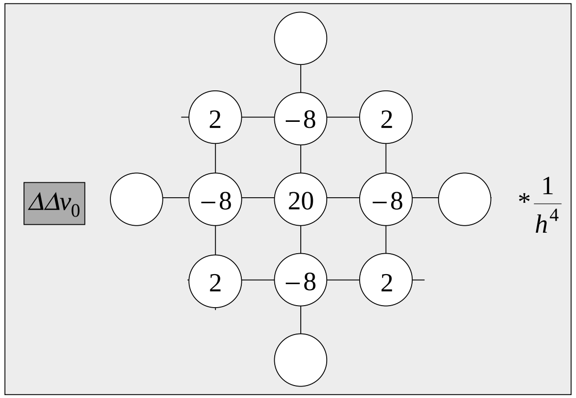
$$\frac{\partial^4 v_0}{\partial y^4} \approx \frac{6v_0 - 4(v_2 + v_4) + (v_{10} + v_{12})}{h^4}$$

$$\frac{\partial^4 v_0}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \frac{4v_0 - 2(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + (v_5 + v_6 + v_7 + v_8)}{h^4}$$

kar da:

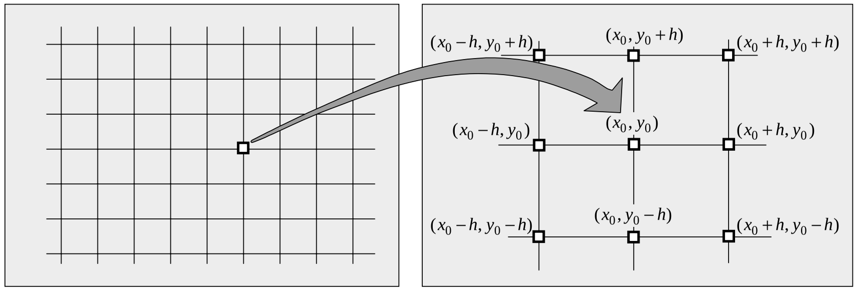
$$\Delta\Delta v_0 \approx \frac{20v_0 - 8(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + 2(v_5 + v_6 + v_7 + v_8) + (v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{12})}{h^4}$$

Števılski vzorec, ki ponazarja udeležbo funkcijskih vrednosti centralne in sosednjih okoliških točk v izrazu za aproksimacijo dvojnega Laplaceovega operatorja je:

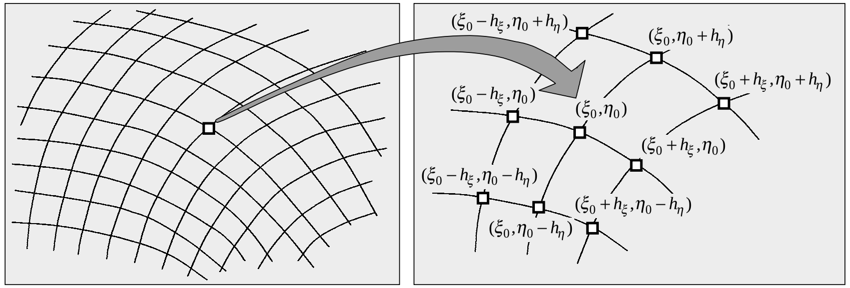


APROKSIMACIJA PARCIALNIH ODVODOV V KRIVOČRTNIH KOORDINATNIH SISTEMIH

V primeru obravnave problema v kartezičnem koordinatnem sistemu smo aproksimacijo odvodov gradili največkrat na naboru točk, dobljenih s presečišči ekvidistantno oddaljenih koordinatnih črt ($\Delta x = \Delta y = h$). S tem je bila aproksimacija odvoda funkcije v točki $T(x_0, y_0)$ določena s funkcijskimi vrednostmi v okoliških točkah.



Tudi v primeru obravnave problema v krivočrtnem koordinatnem sistemu je nabor točk, s katerimi bomo diskretno aproksimirali dani problem, smiselno graditi na mreži ekvidistantno oddaljenih koordinatnih črt ($\Delta\xi = h_\xi$, $\Delta\eta = h_\eta$).



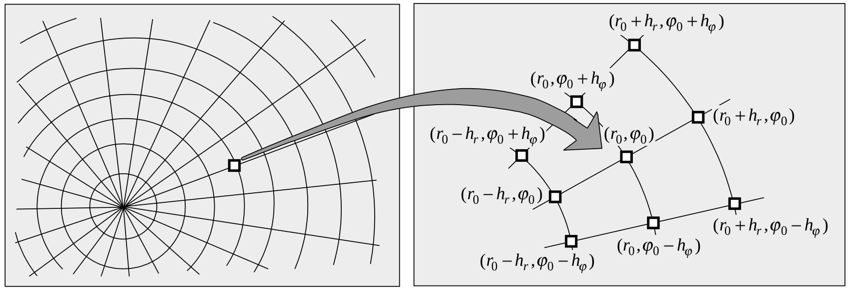
V nadaljevanju se omejimo le na obravnavo cilindričnega koordinatnega sistema (r, φ, z) z vidika njegove uporabe pri reševanju ravninskih problemov. Cilindrične koordinate v tem primeru preidejo v polarne, pri čemer je zveza med kartezičnimi in polarnimi koordinatami naslednja:

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi$$

oziroma:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Polarno mrežo tvorijo koordinatne črte v obliki radialnih poltrakov ($\varphi = konst$) ter koncentrične krožnice ($r = konst$). Regularno mrežo dobimo v primeru ekvidistantno oddaljenih koordinatnih črt ($\Delta r = h_r$, $\Delta\varphi = h_\varphi$).



Da bi lahko vodilne diferencialne enačbe problemov, obravnavanih v kartezičnih koordinatah, transformirali v polarni koordinatni sistem, je potrebno opredeliti osnovne diferencialne operatorje v kartezičnem prostoru v odvisnosti od diferencialnih operatorjev v krivočrtnih koordinatah:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Za našo nadaljnjo uporabo so predvsem zanimivi diferencialni operatorji do vključno drugega reda, ki so glede na zapisane zveze med kartezičnimi in polarnimi koordinatami:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \sin 2\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \sin^2\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sin 2\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \cos^2\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) + \cos 2\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

Laplaceov diferencialni operator Δ preide v polarnih koordinatah v obliko:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

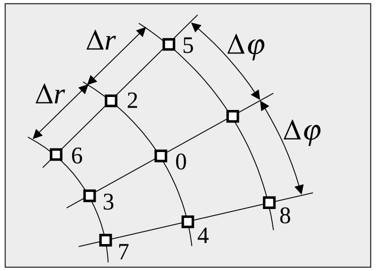
dvojni Laplaceov diferencialni operator $\Delta\Delta$ pa v obliko:

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\right) + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}$$

Za diferenčno izražavo odvodov v točki $T(r_0,\varphi_0)$ je smotrno izbrani nabor točk v okolici dane točke oštevilčiti, kot je prikazano, pri čemer ležijo točke 3,0,1 na poltraku $\varphi=\varphi_0$ v smeri naraščajoče koordinate r :



Zapišimo še tiste parcialne odvode prvega in drugega reda, ki jih bomo v nadaljevanju uporabljali:

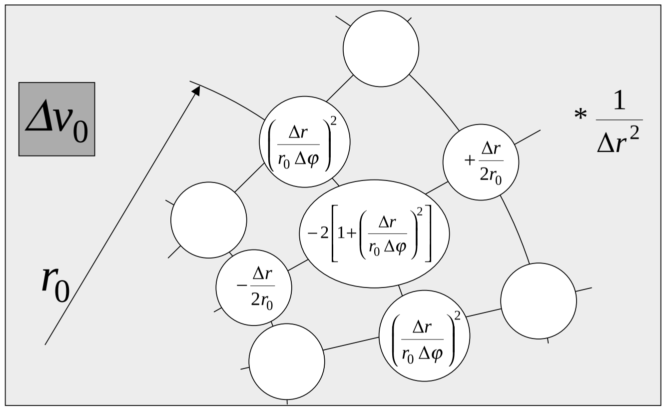
$$\frac{\partial v_0}{\partial r}\approx\frac{v_1-v_3}{2\Delta r}\quad,\quad\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}\approx\frac{v_2-v_4}{2\Delta\varphi}$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2}\approx\frac{v_1-2v_0+v_3}{\Delta r^2}\quad,\quad\frac{\partial^2 v_0}{\partial\varphi^2}\approx\frac{v_2-2v_0+v_4}{\Delta\varphi^2}$$

Končno zapišimo še diferenčno obliko diferencialnega operatorja Δ :

$$\Delta v_0=\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r_0}\frac{\partial v_0}{\partial r}+\frac{1}{r_0^{\,2}}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\varphi^2}\approx\frac{v_1-2v_0+v_3}{\Delta r^2}+\frac{v_1-v_3}{2r_0\Delta r}+\frac{v_2-2v_0+v_4}{(r_0\Delta\varphi)^2}$$

Številski vzorec, ki ponazarja udeležbo funkcijskih vrednosti centralne in sosednjih okoliških točk v izrazu za aproksimacijo Laplaceovega operatorja, je:



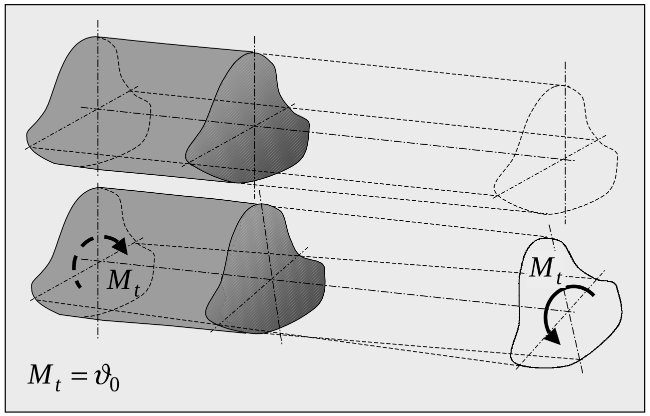
RAVNINSKI PROBLEMI
-
FUNKCIJSKE OBLIKE MATEMATIČNIH MODELOV NEKATERIH POMEMBNIH TEHNIČNIH PROBLEMOV

- ČASOVNO NEODVISNI PROBLEMI
  - torzija prizmatičnih elementov nekrožnega prereza
  - stacionarni prevod toplote
  - potencialni tok tekočine v ravnini
  - ravninska elastostatika
  - statika upogiba plošč

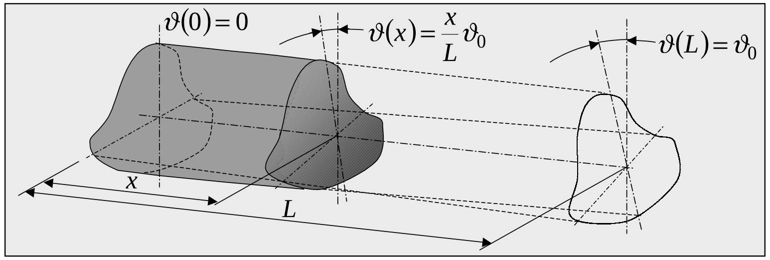
- ČASOVNO ODVISNI PROBLEMI
  - nestacionarni prevod toplote
  - dinamika upogiba plošč

TORZIJA PRIZMATIČNIH ELEMENTOV

PRIZMATIČNI ELEMENT POLJUBNEGA PREČNEGA PREREZA, KATEREGA OBLIKA SE VZDOLŽ OSI NE SPREMINJA, JE OBREMENJEN Z RELATIVNIM ZASUKOM SKRAJNIH PREREZOV. PLAŠČ ELEMENTA JE NEOBREMENJEN.



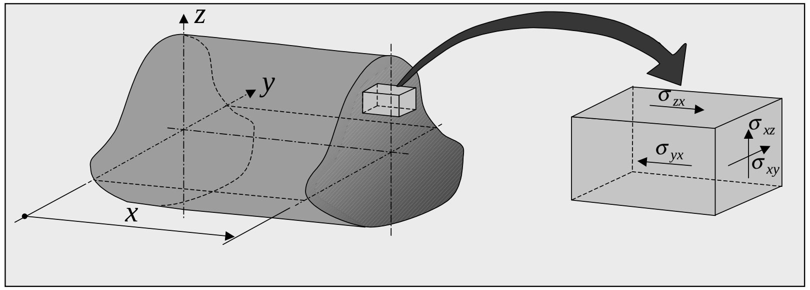
Analizirajmo raven enoosni element dolžine L , po dolžini nespremenljivega prečnega prereza A , iz linearno elastičnega gradiva s strižnim modulom G . Element, ki deformacijsko ni oviran, je na čelnih ploskvah obremenjen z nasproti delujočima torzijskima momentoma velikosti M_t , katerih delovanje rezultira v relativnem zasuku obeh čelnih prerezov v velikosti ϑ_0 ter deformiranju elementa vzdolž osi $\vartheta = \vartheta(x)$.



V analizi enoosnega elementa moramo upoštevati vodilne enačbe problema, ki izhajajo iz:

- statičnega ravnotežja vseh obremenitev
- deformacijske konsistentnosti
- konstitucijskega obnašanja.

Diferencialno enačbo problema izpeljemo na osnovi obravnave diferencialnega elementa.



Za dano obremenitveno stanje elementa je značilno naslednje napetostno stanje:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0$$

pri čemer velja za preostali napetosti, da se vzdolž osi ne spreminjata. Torej:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}(y,z) \quad , \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}(y,z)$$

Diferencialno enačbo problema izpeljemo na osnovi zahtevane izpolnitve ravnotežnega stanja napetosti v vsaki točki obremenjenega elementa:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

Sistem ravnotežnih enačb se zaradi lastnosti napetostnega stanja v danem primeru prevede na eno samo enačbo:

$$\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} = 0$$

Izpolnitev te diferencialne enačbe omogoča naslednja funkcijska odvisnost obeh koordinatnih napetosti:

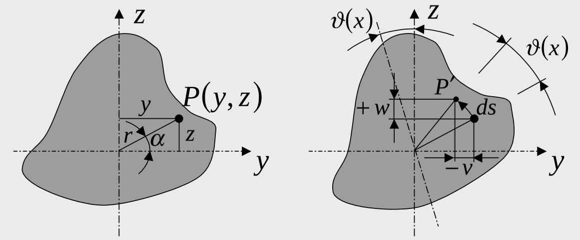
$$\sigma_{yx} = -\beta\frac{\partial U}{\partial z} \quad , \quad \sigma_{zx} = +\beta\frac{\partial U}{\partial y}$$

pri čemer smo z $=U(y,z)$ označili neko, za zdaj še nepoznano funkcijo spremenljivk y in z.

Konstitucijsko obnašanje podaja splošni Hookeov zakon:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right] = 0 \quad , \quad 2\varepsilon_{yz} = \frac{1}{G}\sigma_{yz} = 0$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\right)\right] = 0 \quad , \quad 2\varepsilon_{zx} = \frac{1}{G}\sigma_{zx} = +\frac{\beta}{G}\frac{\partial U}{\partial y}$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right] = 0 \quad , \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy} = -\frac{\beta}{G}\frac{\partial U}{\partial z}$$

deformacijska konsistentnost:



$$-v = r\vartheta(x)\sin\alpha = \vartheta(x)z$$

$$w = r\vartheta(x)\cos\alpha = \vartheta(x)y$$

Za polje vektorja premika $\hat{u} = (u, v, w)$ velja naslednja funkcijska odvisnost:

$$u = (\hat{u})_x = \varphi(y,z) \quad , \quad v = (\hat{u})_y = -\vartheta(x)z \quad , \quad w = (\hat{u})_z = +\vartheta(x)y$$

pri čemer popisuje $\varphi(y,z)$ izbočitev prečnega prereza v vzdolžni smeri, $\vartheta(x)$ pa relativni zasuk prereza na oddaljenosti x od začetka elementa:

$$\vartheta(x) = \frac{x}{L}\vartheta_0$$

glede na začetni prerez pri $x = 0$.

Tako definirano deformacijsko stanje mora zagotavljati enolično polje premikov $\hat{u} = (u, v, w)$, kar dosežemo z izpolnitvijo kompatibilnostnih enačb, t.j. diferencialnih odvisnosti med komponentami vektorja premikov. Od šestih kompatibilnostnih enačb so štiri identično izpolnjene, preostali dve:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}\right)$$

pa določata odvisnost, ki jo mora izpolnjevati neznana funkcija (y,z). Iz zgornjih enačb sledita funkcijski zahtevi:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = g_1(y) \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = g_2(z)$$

kar je očitno izpolnjeno le v primeru, ko funkcija (y,z) izpolnjuje diferencialno enačbo:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = C$$

Z nadaljnjo analizo, kar pa presega okvir tega predmeta, lahko pokažemo še, da sta velikosti konstante C in koeficienta β:

$$C = 1 \quad , \quad \beta = \frac{2M_t}{I_t}$$

pri čemer je torzijski vztrajnostni moment polnega prereza dan s formulo:

$$I_t = -4\int_A U(y,z)\,dA$$

S tem sta koordinatni napetosti v posameznih točkah prečnega prereza:

$$\sigma_{yx} = -\frac{2M_t}{I_t}\frac{\partial U}{\partial z} \quad , \quad \sigma_{zx} = +\frac{2M_t}{I_t}\frac{\partial U}{\partial y}$$

Vodilna enačba problema neovirane torzije je torej:

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 1 \ , \ \{y,z\} \in \mathscr{D}_{y,z} = \Omega}$$

s Prandtlovo napetostno funkcijo (y,z) kot osnovno spremenljivko problema.

Parcialna diferencialna enačba drugega reda, ki jo imenujemo tudi Poissonova, v celoti opredeljuje spreminjanje Prandtlove funkcije (y,z) ter koordinatnih napetosti σ_{xy} in σ_{xz} v točkah prečnega prereza.

Fizikalne spremenljivke problema:

- napetostna funkcija (y,z) $\rightarrow$ PRIMARNA SPREMENLJIVKA
- napetosti $\sigma_{xy}(y,z), \sigma_{xz}(y,z)$ $\rightarrow$ SEKUNDARNA SPREMENLJIVKA

Napetosti σ_{xy}, σ_{xz} se izražata v odvisnosti od primarne spremenljivke (y,z) na sledeči način:

$$\sigma_{yx} = -\frac{2M_t}{I_t}\frac{\partial U}{\partial z} \quad , \quad \sigma_{zx} = +\frac{2M_t}{I_t}\frac{\partial U}{\partial y}$$

Rešitev problema podaja sicer vodilna enačba:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=1\ ,\ \ \{y,z\}\in \mathscr{D}_{y,z}=\Omega$$

ki pa opredeljuje le zakonitost spreminjanja primarne spremenljivke v območju Ω .

Da bo rešitev vodilne enačbe konsistentna tudi s predpisanimi lastnostmi na meji območja Ω ,

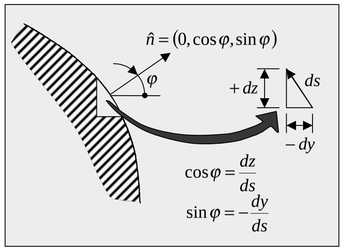
MORA REŠITEV (y,z) ZADOSTITI ROBNIM POGOJEM NA OGRAJI Γ.

ROBNI POGOJI so definirani z znanimi velikostmi primarne ali sekundarne spremenljivke na ograji Γ območja Ω :

$$\{y,z\}\in\Gamma_1: \qquad U(y,z)=0$$
$$\{y,z\}\in\Gamma_2: \qquad \frac{\partial U}{\partial n}(y,z)=0$$

Oba pogoja sta fizikalno pogojena. Prvi pogoj izraža stanje neobremenjenosti plašča prizmatičnega elementa:

$$\hat{p}_{\text{plašč}}=\hat{0}$$



$$\left(\hat{p}_{\text{plašč}}\right)_x=\sigma_{xx}n_x+\sigma_{yx}n_y+\sigma_{zx}n_z=$$
$$=\sigma_{yx}\cos\varphi+\sigma_{zx}\sin\varphi=$$
$$=-\beta\left(\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)=$$
$$=-\beta\frac{dU}{ds}=0$$

$$\frac{dU}{ds}=0\ \Rightarrow\ U=U(s)=konst \quad ...\{y,z\}\in \text{plašč}$$

Brez izgube splošnosti lahko postavimo:

$$=0 \quad ...\{y,z\}\in \text{plašč}$$

Drugi pogoj izraža morebitno poznano stanje napetosti na ograji območja. Takoj pa lahko ugotovimo, da glede na odvisnost:

$$\sigma_{nx}=\sigma_{xn}=-\frac{2M_t}{I_t}\frac{\partial U}{\partial s}$$

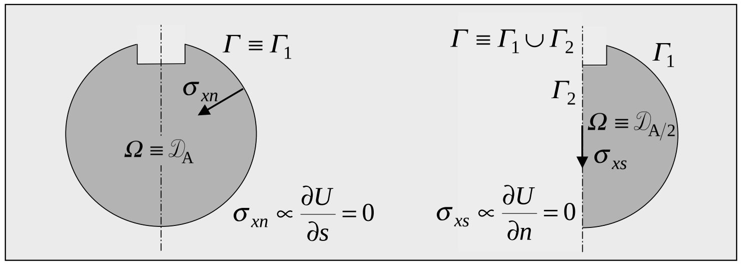
izraža pogoj $=0$ v bistvu poznavanje napetostne komponente $\sigma_{xn}=0$ na ograji Γ. Vendar se ta pogoj izraža kot robni pogoj nad primarno spremenljivko.

Morebitnega robnega pogoja, ki bi zajel poznano vrednost sekundarne spremenljivke na ograji, ki vključuje celotni prečni prerez A, torej ni, saj se ta prevede na robni pogoj za primarno spremenljivko . Pač pa se pri obravnavi simetričnih prerezov izkaže kot računsko ugodno obravnavati problem na simetrijsko karakterističnem delu prereza. V točkah simetrijskih ravnin izkazuje napetostno stanje lastnost:

$$\sigma_{sx}=\sigma_{xs}=-\frac{2M_t}{I_t}\frac{\partial U}{\partial n}=0$$

torej:

$$\frac{\partial U}{\partial n}=0 \quad ...\{y,z\}\in \text{simetrijska ravnina}$$



POVZETEK:

VODILNA OBMOČNA ENAČBA:

$$\Delta U=1\ ,\ \ \{y,z\}\in\mathscr{D}_{y,z}=\Omega$$

ROBNI POGOJI:

$$(y,z)=0 \quad ...\ \{y,z\}\in\Gamma_1$$
$$\frac{\partial U}{\partial n}(y,z)=0 \quad ...\ \{y,z\}\in\Gamma_2$$

VAŽNO !

Primarna in sekundarna spremenljivka (y,z) in $\sigma_{xs}(y,z)$, ki sta s fizikalnega stališča:

- primarna spremenljivka
  $\equiv$ NAPETOSTNA FUNKCIJA
- sekundarna spremenljivka
  $\equiv$ KOORDINATNA NAPETOST

sta glede na robne pogoje vselej

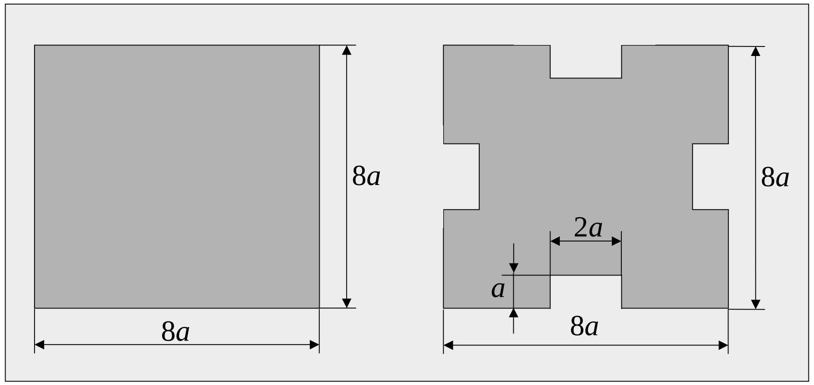
KONJUGIRANI VELIČINI:

$$(y,z) \leftrightarrow \sigma_{xs}(y,z) \propto \frac{\partial U}{\partial n}(y,z)$$

To pomeni, da je na robu ena izmed njiju po velikosti znana, druga pa neznana.

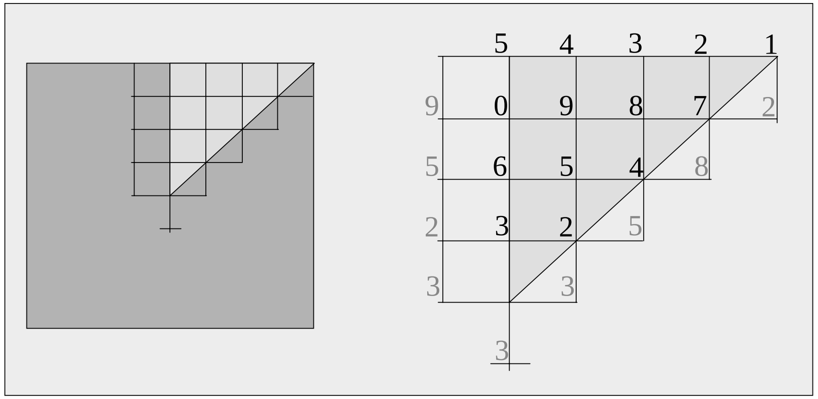
PRIMER IX:

Analiziraj vpliv utorov na spremembo napetostnega stanja v gredi kvadratnega prereza s stranico $8a$. Globina utora je a, širina pa $2a$. Aproksimativna rešitev problema naj bo dobljena z metodo končnih razlik (MKR).



Primer a:

Skladno z MKR iščemo diskretno rešitev v točkah ortogonalne ekvidistantne mreže z delitvijo $h = a$. Ker gre za fizikalni problem, katerega odziv je glede na simetrično obliko definicijskega območja prav tako simetričen, je analizo smotrno izvesti na najmanjšem možnem podobmočju, ki še zagotavlja pravilno obravnavo problema:



Vodilna enačba problema je Poissonova diferencialna enačba:

$$\Delta U = 1 \ , \ \{y,z\} \in \Omega_{A/8}$$

ob predpisanih robnih pogojih:

$$= 0 \quad \ldots \ \{y,z\} \in \Gamma_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \ \ldots \ \{y,z\} \in \Gamma_2$$

pri čemer pripada del ograje Γ_1 točkam plašča, del ograje Γ_2 pa točkam na simetrijskih ravninah.

Neznanke skladno z MKR diskretiziranega problema so torej funkcijske vrednosti osnovne spremenljivke $_k$ v petnajstih točkah diskretiziranega karakterističnega podobmočja. Število potrebnih enačb dobimo na že ustaljeni način, to je s pretvorbo diferencialnih zvez v diferenčne ter njihovo uporabo v vodilni enačbi in enačbah robnih pogojev.

Pri tvorbi sistema potrebnih enačb se na simetrijskih ograjah lahko odločamo za izpolnitev robnega pogoja ali vodilne diferencialne enačbe. S privzetjem a priori simetrične rešitve je poznano tudi stanje funkcijskih vrednosti v vseh, preko simetrijskih ravnin zrcaljenih točkah. Zato bomo v točkah na simetrijskih ravninah zahtevali izpolnitev vodilne diferencialne enačbe.

Ker gre za povsem regularno mrežo, velja za diferenčni ekvivalent Poissonovi diferencialni enačbi, aplicirani v točki P_0 s standardno okolico točk P_1, P_2, P_3, P_4:

$$\Delta v_0 = \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \approx \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 4v_0}{h^2} = 1$$

V konkretnem primeru nadomestimo spremenljivko v z napetostno funkcijo ,
za delitev pa postavimo $h = a$.

Glede na poznani robni pogoj nad primarno spremenljivko na delu ograje, ki pripada plašču grednega elementa, velja:

$${}_{11} = U_{12} = U_{13} = U_{14} = U_{15} = 0$$

Sistem enačb s preostalimi neznanimi funkcijskimi vrednostmi ${}_k ; k = 1,2,...,10$ prejme v matrični obliki naslednjo obliko:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} a^2$$

Rešitev sistema enačb je:

$${}_1 = -2534\lambda \ , \quad U_2 = -2271\lambda$$
$${}_3 = -2398\lambda \ , \quad U_4 = -1555\lambda$$
$${}_5 = -1872\lambda \ , \quad U_6 = -1972\lambda$$
$${}_7 = -619\lambda \ , \quad U_8 = -966\lambda$$
$${}_9 = -1146\lambda \ , \quad U_{10} = -1202\lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{544} a^2$$

Da bi lahko primerjali napetostno stanje v gredi brez in v gredi z utorom, je dovolj primerjati odvod napetostne funkcije na mestu, kjer je ta največji. Gre za odvod v smeri pravokotno na rob v točki 15:

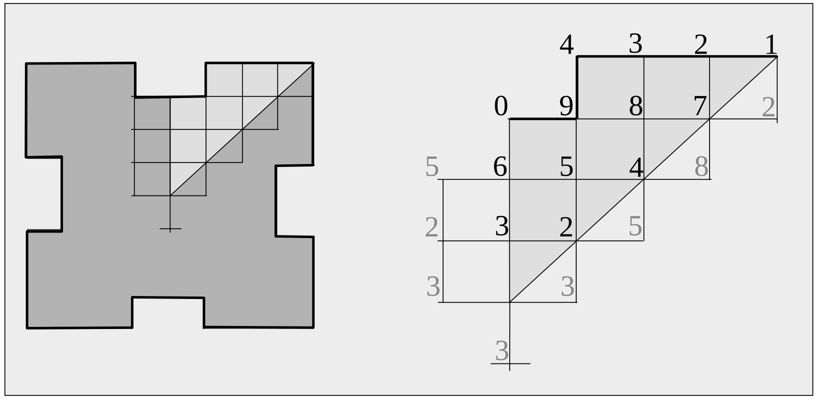
$$\frac{\partial U_{15}}{\partial n} = \frac{\partial U_{15}}{\partial z} \approx \frac{3U_{15} - 4U_{10} + U_6}{2a}$$

kar da:

$$(\sigma_{xy})^a \propto \frac{\partial U_{15}}{\partial z} \approx 2.6066\, a$$

Primer b:

Glede na predhodno obravnavani primer točka 15 ni več točka območja, medtem ko točki 9 in 10 postaneta robni:



Glede na predhodno obravnavani primer upoštevamo, da sta dodatno še funkcijski vrednosti v robnih točkah 9 in 10 nični:

$$ {}_9 = U_{10} = 0 $$

Rešitev sistema enačb dobimo iz že obravnavanega sistema enačb v primeru gredi brez utorov, tako da v sistemu upoštevamo zgornji spremembi, ki nadomestita deveto in deseto enačbo omenjenega sistema:

$$
\begin{aligned}
{}_1 &= -1653\lambda\ , & U_2 &= -1381\lambda \\
{}_3 &= -1504\lambda\ , & U_4 &= -858\lambda \\
{}_5 &= -960\lambda\ , & U_6 &= -1005\lambda \\
{}_7 &= -378\lambda\ , & U_8 &= -458\lambda
\end{aligned}
$$

$$ \lambda = \frac{1}{596} a^2 $$

Odvod napetostne funkcije je največji v dnu utora, torej v točki 10. Odvod v smeri pravokotno na rob v tej točki je:

$$ \frac{\partial U_{10}}{\partial n} = \frac{\partial U_{10}}{\partial z} \approx \frac{3U_{10} - 4U_6 + U_3}{2a} $$

kar da:

$$ \left(\sigma_{xy}\right)^b \propto \frac{\partial U_{10}}{\partial z} \approx 2.1107\, a $$

Dobljeni rezultat ni izpolnil naših pričakovanj, kar kaže na to, da je bilo naše razmišljanje premočrtno in slabo. V primeru enake vrednosti funkcije v sredini prereza bi prav gotovo trdili, da je odvod edini merodajni pokazatelj spremembe napetostnega stanja, kar pa seveda ni slučaj. Dejansko na velikost napetosti vpliva še torzijski vztrajnostni moment, ki je neposredno proporcionalen volumnu, ki ga nad prerezom A opredeljuje funkcija . Glede na to, da je funkcijska vrednost v prvem primeru ${}_1^a = -4.6581 a^2$, v drugem pa ${}_1^b = -2.7735 a^2$, s tem da se je v drugem primeru zmanjšala še velikost prereza, je pričakovati, da je delež torzijskega vztrajnostnega momenta tista odločujoča veličina, ki z znatnim zmanjšanjem poveča napetostno stanje ob utoru.

Za grobo oceno izračuna torzijskega vztrajnostnega momenta služi že kar seštevek funkcijskih vrednosti ${}_k$ v vseh točkah prereza, saj odpade na vsako točko izbrane mreže enak ploščinski delež, torej:

$$
\begin{aligned}
(I_t)^a &\propto \sum U_k^a = \\
&= U_1 + 4(U_2 + U_3 + U_4 + U_6 + U_7 + U_{10}) + 8(U_5 + U_8 + U_9) = \\
&= 136.9\, a^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(I_t)^b &\propto \sum U_k^b = \\
&= U_1 + 4(U_2 + U_3 + U_4 + U_6 + U_7) + 8(U_5 + U_8) = \\
&= 56.2\, a^4
\end{aligned}
$$

Končno dobimo pričakovano oceno vpliva utora na povečanje napetostnega stanja:

$$ \left(\sigma_{xy}\right)^a \propto \frac{1}{I_t^a} \frac{\partial U_{15}}{\partial z} = 0.01904\, a^{-3} $$

$$ \left(\sigma_{xy}\right)^b \propto \frac{1}{I_t^b} \frac{\partial U_{10}}{\partial z} = 0.03756\, a^{-3} $$