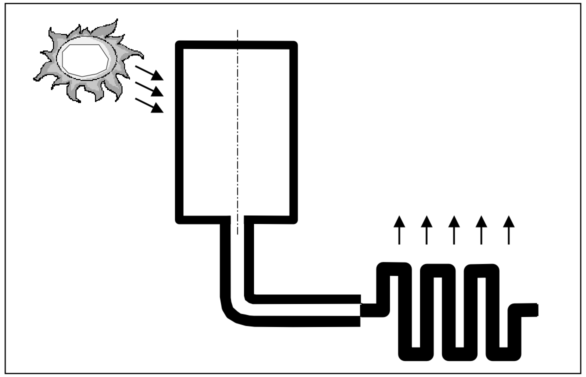
PREVOD TOPLOTE

OBRAVNAVAJ PREVOD TOPLOTE V IZOTROPNEM IN HOMOGENEM TRDNEM MEDIJU, KATEREGA TERMALNO POLJE SE PROSTORSKO IN ČASOVNO SPREMINJA. NA ENERGIJSKO STANJE V MEDIJU VPLIVA IZMENJAVA TOPLOTE NA MEJAH MEDIJA Z OKOLICO TER MOREBITNA GENERACIJA TOPLOTE V OBMOČJU MEDIJA.



TOPLOTNI TOK

Termalno stanje v trdnem mediju naj definira temperaturno polje $T = T(x,y,z,t)$, ki se v splošnem s časom spreminja. Množica točk (x,y,z) z enako temperaturo določa časovno spremenljivo izotermalno ploskev:

$$T(x,y,z,t) = \text{konst.}$$

V opazovanem trenutku $t=\tau$ naj bo v točki $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}(x_0,y_0,z_0)$ temperatura T_0 :

$$T(x_0,y_0,z_0,\tau) = T_0$$

Točke $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x_0+dx, y_0+dy, z_0+dz)$ v neposredni okolici točke P_0, ki ležijo na isti izotermalni ploskvi, izkazujejo lastnost:

$$\frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz = 0$$

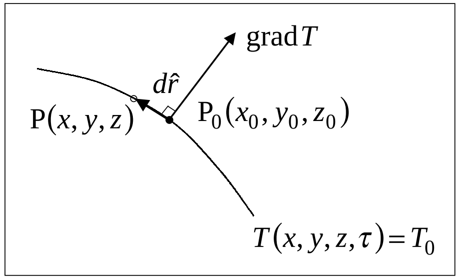
pri čemer se odvodi nanašajo na točko $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}(x_0,y_0,z_0)$.

Enačbo lahko še zapišemo kot skalarni produkt:

$$\mathrm{grad}\,T . d\hat{r} = 0$$

kjer sta:

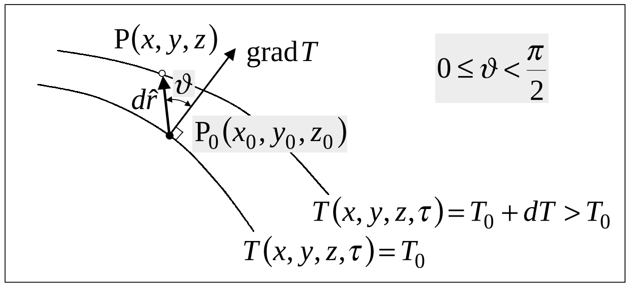
$$\mathrm{grad}\,T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{e}_z = \hat{\nabla} T \quad , \quad d\hat{r} = dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y + dz\,\hat{e}_z$$



Očitno je vektor $\mathrm{grad}\,T$ v točki P_0 usmerjen pravokotno na izotermalno ploskev $T(x_0,y_0,z_0,\tau) = T_0$ v smeri naraščajoče temperature $T(x,y,z,\tau) = T_0 + dT$, $dT > 0$, saj velja:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz = \mathrm{grad}\,T . d\hat{r} > 0$$

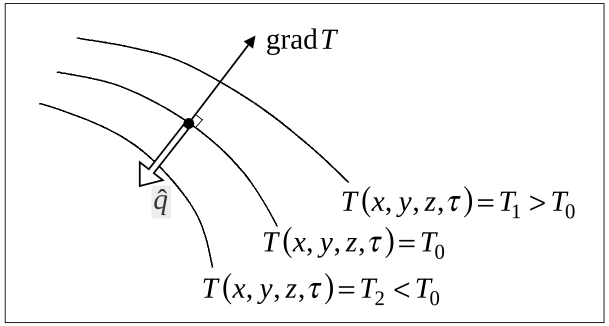
kar pomeni, da oklepata vektorja $\mathrm{grad}\,T$ ter $d\hat{r}$, to je vektor, ki povezuje točko P_0 na izotermalni ploskvi $T(x,y,z,\tau) = T_0$ s točko $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x,y,z)$ na izotermalni ploskvi $T(x,y,z,\tau) = T_0 + dT$, oster kot.



Med izotermalnima ploskvama $T(x,y,z,\tau)=T_0$ in $T(x,y,z,\tau)=T_0+dT$, $dT \neq 0$ pride do prenosa energije v obliki *toplotnega toka*, t.j. količine toplote, ki v časovni enoti prehaja skozi enoto površine izotermalne ploskve. Toplotni tok $\hat{q}$ je določen z vektorjem:

$$\hat{q} = -k\left(\operatorname{grad} T\right)$$

kjer je k snovna lastnost, imenovana *toplotna prevodnost*. Iz enačbe sledi, da je toplotni tok usmerjen v smeri padajoče temperature.



S transformacijo koordinatnega sistema (x,y,z) v točki $P_0=P(x_0,y_0,z_0)$ izotermalne ploskve $T(x,y,z,\tau)=T_0$ v koordinatni sistem z enotskim vektorjem $\hat{e}_s$ koordinate s tako, da smer naraščajoče koordinate s sovpada s smerjo naraščajoče temperature lahko vektor $\operatorname{grad} T$ zapišemo še v obliki:

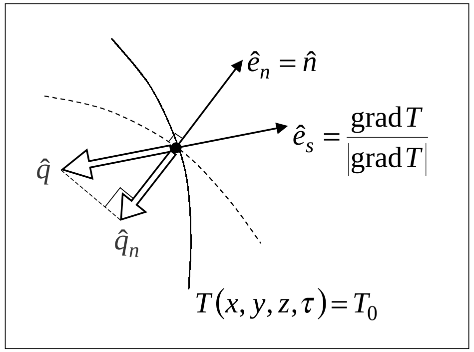
$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{e}_z = \frac{\partial T}{\partial s}\hat{e}_s$$

Toplotni tok $\hat{q}$, ki prehaja v točki $P_0=P(x_0,y_0,z_0)$ skozi elementarno ploskvico na izotermalni ploskvi, tedaj zapišemo še v obliki:

$$\hat{q} = -k\frac{\partial T}{\partial s}\hat{e}_s$$

Toplotni tok $\hat{q}_n$, ki prehaja v točki $P_0=P(x_0,y_0,z_0)$ skozi elementarno ploskvico, katere normala $\hat{e}_n=\hat{n}$ ne sovpada z vektorjem $\hat{e}_s$ na izotermalni ploskvi, pa je:

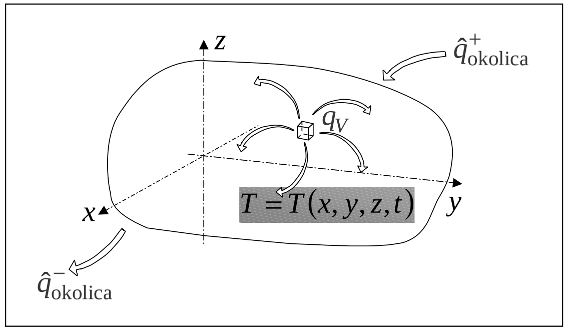
$$\hat{q}_n = -k\frac{\partial T}{\partial n}\hat{n}$$



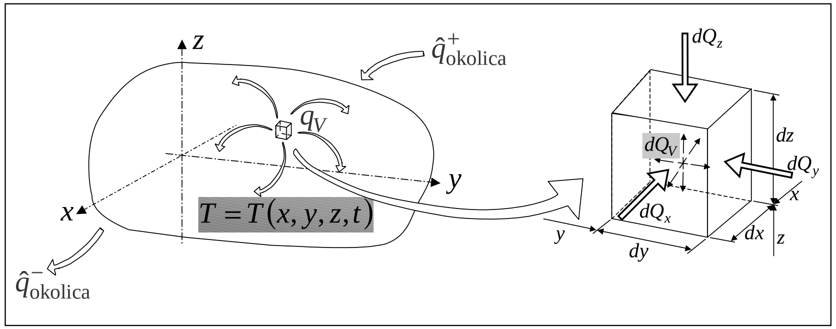
Količini toplote dQ_s in dQ_n, ki v času dt preideta v točki $P_0=P(x_0,y_0,z_0)$ izotermalne ploskve $T(x,y,z,\tau)=T_0$ skozi ploskvici dA_s in dA_n, katerih normali sta definirana z vektorjema $\hat{e}_s$ in $\hat{n}$, sta naslednjih velikosti:

$$dQ_s = -k\frac{\partial T}{\partial s}dA_s\,dt \quad , \quad dQ_n = -k\frac{\partial T}{\partial n}dA_n\,dt$$

Analizirajmo sedaj prevod toplote v homogenem in izotropnem trdnem telesu, ki ni v termičnem ravnotežju. Začetno temperaturno stanje $T(x,y,z,0)=T_0(x,y,z)$ v času $t=0$, t.j. ob pričetku opazovanja, se zaradi termičnega neravnotežja s časom spreminja $T=T(x,y,z,t)$, $t>0$. Na temperaturno stanje v telesu vpliva izmenjava toplote z okolico na mejah telesa ter morebitno generiranje toplote (izvor +, ponor -) v območju telesa. Snovna lastnost, ki uravnava hitrost prevoda toplote v snovi, je toplotna prevodnost k .



Diferencialno enačbo problema prevoda toplote izpeljemo na osnovi obravnave energijske bilance na diferencialnem volumskem elementu.



V časovnem intervalu dt v diferencialnem elementu $dV = dx\,dy\,dz$ akumulirana notranja energija dU je enaka v elementu generirani toploti dQ_V ter toploti, ki je prešla ploskve elementa:

$$dQ_A + dQ_V = dU$$

Akumulirana notranja energija dU se izkazuje v spremembi temperaturnega stanja dT, njena velikost pa je:

$$dU = m\,c\,dT = \rho\,c\,dT\,(dx\,dy\,dz)$$

kjer sta snovni lastnosti ρ in c *specifična gostota* ter *specifična toplota*.

V elementu generirana toplota dQ_V v časovnem intervalu dt je velikosti:

$$dQ_V = q_V\,(dx\,dy\,dz)\,dt$$

kjer je $q_V = q_V(x,y,z,t)$ prostorsko porazdeljeno polje toplotnih izvorov.

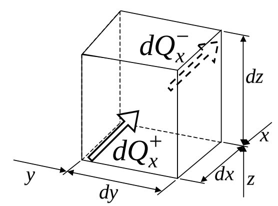
Toplota dQ_A, ki se v časovnem intervalu dt na osnovi prevoda toplote preko ploskev elementa akumulira v elementu, je velikosti:

$$dQ_A = dQ_x + dQ_y + dQ_z$$

z velikostjo toplote dQ_i, prenešene preko ploskev v i-ti koordinatni smeri:

$$dQ_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)(dx\,dy\,dz)\,dt \quad ; \; i = \{x, y, z\}$$

Analizirajmo prispevek prevoda toplote preko ploskev volumskega elementa v x–smeri v energijski bilanci!



$$dQ_x^- = -k\frac{\partial T}{\partial x}\,dA_x\,dt$$

$$dQ_x^+ = -\left[-k\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right] dA_x\,dt$$
$$= -\left[dQ_x^- + d\left(dQ_x^-\right)\right]$$

Glede na gradient termalnega polja vstopa/izstopa v volumski element na mestu $x = x_0$ skozi ploskev $dA_x = dy\,dz$ toplota dQ_x^-, na mestu $x = x_0 + dx$ pa skozi enako veliko ploskev izstopa/vstopa toplota dQ_x^+, katerih velikosti v splošnem zaradi prostorskega spreminjanja temperaturnega stanja nista enaki:

$$dQ_x^- = \pm\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dA_x\,dt \quad , \quad dQ_x^+ = \mp\left[-k\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]dA_x\,dt$$

Toplota dQ_x, ki se akumulira v volumskem elementu, je velikosti:

$$dQ_x = dQ_x^+ + dQ_x^-$$

kar da:

$$dQ_x = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]dA_x\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)(dx\,dy\,dz)\,dt$$

Toplota dQ_A, ki se v časovnem intervalu dt na osnovi prevoda toplote preko ploskev elementa akumulira v elementu, je tedaj velikosti:

$$dQ_A = dQ_x + dQ_y + dQ_z =$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right](dx\,dy\,dz)\,dt$$

Enačbo energijske bilance:

$$dQ_A + dQ_V = dU$$

zapišemo v odvisnosti od osnovne fizikalne spremenljivke problema, t.j. temperature $T = T(x,y,z,t)$:

$$\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]+q_V(x,y,z,t)\right\}(dx\,dy\,dz)\,dt = (\rho\, c\, dT)(dx\,dy\,dz)$$

oziroma po ureditvi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q_V(x,y,z,t)=\rho\, c\frac{\partial T}{\partial t}$$

kar je vodilna enačba prevoda toplote v trdninah.

Vodilna enačba problema prevoda toplote v trdnini je torej:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q_V(x,y,z,t)=\rho\, c\frac{\partial T}{\partial t}\ , \quad \{x,y,z\}\in \mathscr{D}_{x,y,z}=\Omega}$$

s temperaturo $T(x,y,z,t)$ kot osnovno spremenljivko problema.

Parcialna diferencialna enačba drugega reda v celoti opredeljuje prostorsko in časovno spreminjanje temperature $T(x,y,z,t)$ in toplotnega toka $\hat{q}=\hat{q}(x,y,z,t)$.

Glede na to, da se fizikalne veličine problema s časom spreminjajo, je dani problem časovno odvisen, torej *NESTACIONAREN*.

Zaradi vključitve vloge časa kot bistvenega parametra rešitve, bo njegovo reševanje zahtevalo poseben pristop.

Fizikalni spremenljivki problema:

- temperatura $T(x,y,z,t)$ $\rightarrow$ PRIMARNA SPREMENLJIVKA
- toplotni tok $\hat{q}(x,y,z,t)$ $\rightarrow$ SEKUNDARNA SPREMENLJIVKA

pri čemer se toplotni tok $\hat{q}=\hat{q}(x,y,z,t)$ izraža v odvisnosti od primarne spremenljivke $T(x,y,z,t)$ na sledeči način:

$$\hat{q}=-k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{e}_x+\frac{\partial T}{\partial y}\hat{e}_y+\frac{\partial T}{\partial z}\hat{e}_z\right)=-k\,(\mathrm{grad}\,T)$$

njegova komponenta $\hat{q}_n$ v smeri $\hat{e}_n=\hat{n}$ pa kot:

$$\hat{q}_n=-k\frac{\partial T}{\partial n}\hat{n}$$

V nadaljevanju obravnavajmo najprej primer stacionarnega prevoda toplote v ravnini, pri čemer naj bo toplotna prevodnost k konstantna. V takšnem primeru izkazuje temperaturno polje lastnost:

$$T=T(x,y)$$

zaradi česar preide vodilna enačba problema prevoda toplote v trdnini v obliko:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=-\frac{1}{k}q_V(x,y)\ ,\quad \{x,y\}\in\mathscr{D}_{x,y}=\Omega$$

kar je prav tako že poznana Poissonova diferencialna enačba (torzija!), a tokrat z nekonstantno desno stranjo.

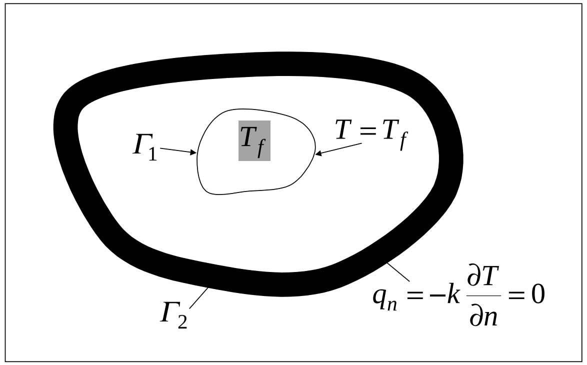
Da bo rešitev vodilne enačbe konsistentna tudi s predpisanimi lastnostmi na meji območja Ω,

MORA REŠITEV $T(x,y)$ ZADOSTITI ROBNIM POGOJEM NA OGRAJI Γ.

ROBNI POGOJI so definirani z znanimi velikostmi primarne ali sekundarne spremenljivke na ograji Γ območja Ω :

$$\{x,y\}\in\Gamma_1: \qquad T(x,y)=g(x,y)$$

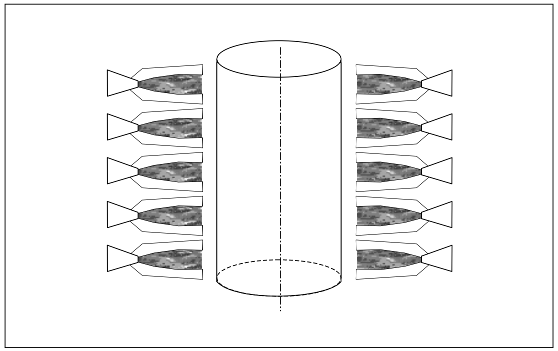
$$\{x,y\}\in\Gamma_2: \qquad q_n=-k\frac{\partial T}{\partial n}(x,y)=h(x,y)$$



Temperatura na površini obravnavanega telesa $T(x,y)$ je odvisna od fenomenološkega načina prenosa toplote med okolico in obravnavanim trdnim telesom. Funkcija poznanega prenosa toplote $h(x,y)$ na ograji Γ_2 prejme za posamezne načine prenosa toplote obliko:

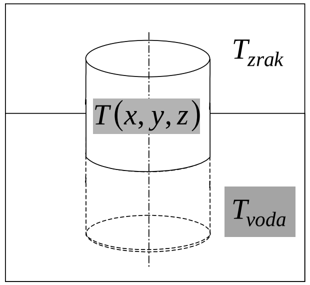
Vsiljeni znani toplotni tok jakosti $\Phi(x,y)$:

$$h(x,y)=-\Phi(x,y)$$



Konvektivni tok obtekajočega fluida s temperaturo $T_f(x,y)$ ter *prestopnostnim koeficientom* konvekcijskega prenosa $h_f(x,y)$:

$$h(x,y)=h_f(x,y)\,[T(x,y)-T_f(x,y)]$$



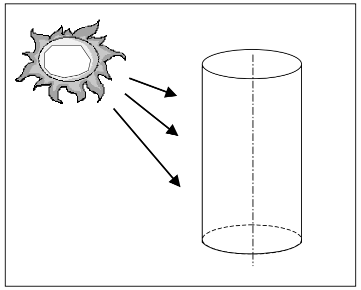
Sevalni tok oddaljenega telesa s temperaturo $T_r(x,y)$ ter *prestopnostnim koeficientom* sevalnega prenosa $h_r(x,y)$:

$$h(x,y)=h_r(x,y)[T(x,y)-T_r(x,y)]$$

pri čemer določimo koeficient $h_r(x,y)$ v skladu s Stefan-Boltzmannovim zakonom:

$$h_r(x,y)=\sigma\ [T^2(x,y)+T_r^2](T(x,y)+T_r)$$

kjer je še σ Stefan-Boltzmannova konstanta.



Posebno pozornost velja posvetiti obnašanju rešitve $T(x,y)$ na prehodu med posameznimi podobmočji Ω_1 in Ω_2 v primeru kontakta dveh trdnih teles različnih snovnih lastnosti. Na skupni meji $\Gamma_{1,2}$ med obema podobmočjema morajo biti izpolnjeni POGOJI KONSISTENTNOSTI PREHODA, ki opredeljujejo obnašanje primarne in sekundarne spremenljivke problema ob prehodu iz enega podobmočja v drugega.

Fizikalna konsistentnost problema se v obravnavanem primeru, če predpostavimo idealni termični kontakt med telesoma, na prehodu med podobmočjema izkazuje z:

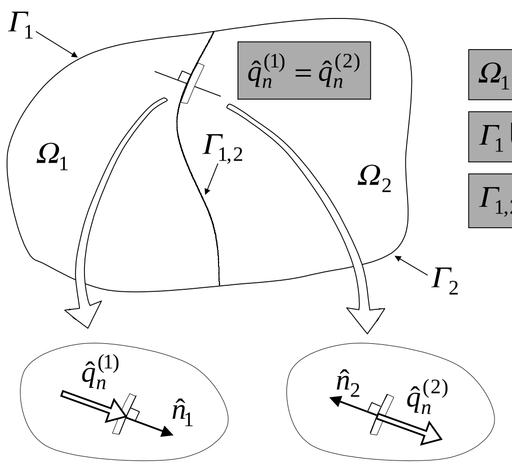
- zveznostjo primarne spremenljivke $T(x,y)$:

$$T_1(x,y)=T_2(x,y) \quad ; \{x,y\}\in \Gamma_{1,2}$$

ter:

- zveznostjo toplotnega toka $\hat{q}_n(x,y)$:

$$k_1\frac{\partial T_1}{\partial n_1}(x,y)=-k_2\frac{\partial T_2}{\partial n_2}(x,y) \quad ; \{x,y\}\in \Gamma_{1,2}$$



$$\hat{q}_n^{(1)}=\hat{q}_n^{(2)}$$

$$\Omega_1\bigcup\Omega_2=\Omega$$

$$\Gamma_1\bigcup\Gamma_2=\Gamma$$

$$\Gamma_{1,2}=\Omega_1\bigcap\Omega_2$$

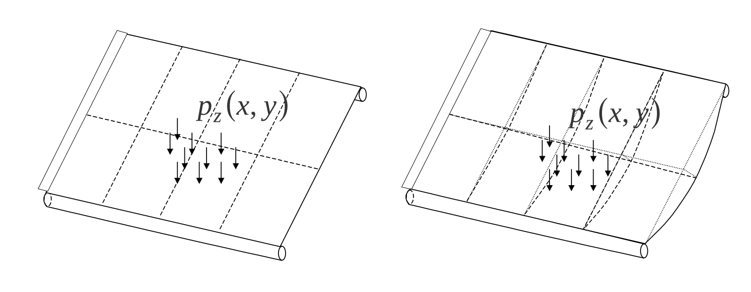
$$\hat{n}_2=-\hat{n}_1$$

$$\hat{q}_n^{(1)}=-k_1\frac{\partial T_1}{\partial n_1}\hat{n}_1$$

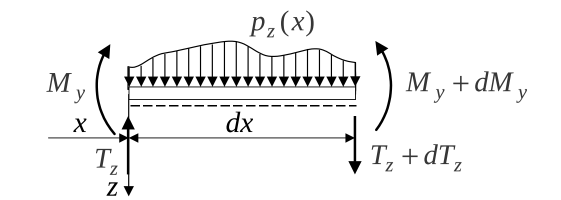
$$\hat{q}_n^{(2)}=-k_2\frac{\partial T_2}{\partial n_2}\hat{n}_2$$

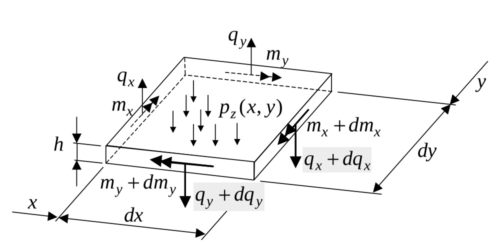
UPOGIB TANKIH PLOŠČ

PLOSKOVNI ELEMENTI, OBREMENJENI UPOGIBNO Z ZVEZNO PORAZDELJENO PREČNO OBTEŽBO



Na osnovi analogije z upogibom enoosnih elementov analizirajmo raven ploskovni element konstantne debeline h iz elastičnega materiala z modulom elastičnosti E in Poissonovim koeficientom ν, ki je obremenjen upogibno z zvezno porazdeljeno prečno obremenitvijo $p_z(x,y)$.





Pri upogibu enoosnega elementa smo ugotovili, da je mogoče problem prevesti na iskanje ene deformacijske veličine – upogibka $w(x)$. Ugotovili smo, da poznavanje t.i. osnovne primarne spremenljivke $w(x)$ omogoča enolično določitev vseh preostalih primarnih in sekundarnih spremenljivk.

Analogno velja za upogib ploskovnega elementa, da je s poznavanjem osnovne primarne spremenljivke – upogibka $w(x,y)$ omogočena enolična določitev vseh preostalih primarnih in sekundarnih spremenljivk.

Fizikalne spremenljivke problema upogiba nosilca:
- upogibek $w(x)$ $\rightarrow$ OSNOVNA PRIMARNA SPREMENLJIVKA
- naklon $\varphi(x)$ $\rightarrow$ DRUGA PRIMARNA SPREMENLJIVKA
- moment $M(x)$ $\rightarrow$ PRVA SEKUNDARNA SPREMENLJIVKA
- prečna sila $T(x)$ $\rightarrow$ DRUGA SEKUNDARNA SPREMENLJIVKA

Fizikalne spremenljivke problema upogiba plošče:
- upogibek $w(x,y)$ $\rightarrow$ OSNOVNA PRIM. SPREM.
- naklona $\varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y)$ $\rightarrow$ DRUGA PRIM. SPREM.
- momenta $m_x(x,y), m_y(x,y)$ $\rightarrow$ PRVA SEKUND. SPREM.
- prečni sili $q_x(x,y), q_y(x,y)$ $\rightarrow$ DRUGA SEKUND. SPREM.

V odvisnosti od osnovne primarne spremenljivke $w(x)$ pri upogibu nosilca oz. $w(x,y)$ pri upogibu plošče izrazimo vse preostale veličine problema:

naklon upogibnice $\varphi(x)$:

$$\varphi = \frac{dw}{dx}$$

naklona plošče $\varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y)$:

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x}\ ,\ \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

upogibni moment $M(x)$:

$$M = -EI\,\frac{d^2 w}{dx^2}$$

upogibna momenta $m_x(x,y), m_y(x,y)$:

$$m_x = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\ m_y = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

prečna sila $T(x)$:

$$T = -\frac{d}{dx}\left[EI\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)\right]$$

prečni sili $q_x(x,y), q_y(x,y)$:

$$q_x = -\frac{\partial}{\partial x}(K\,\Delta w)\ ,\ q_y = -\frac{\partial}{\partial y}(K\,\Delta w)$$

pri čemer je ekvivalent upogibni togosti EI pri enoosnem elementu upogibna togost plošče K, ki je definirana kot:

$$K = \frac{E\,h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$$

Analogno vodilni enačbi problema upogiba nosilca:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI\,\frac{d^2 w}{dx^2}\right] = p_z(x)\ ;\ \ x \in [0, L]$$

z upogibkom $w(x)$ kot osnovno spremenljivko problema, dobimo v primeru upogiba plošče konstantne upogibne togosti K z upogibkom $w(x,y)$ kot osnovno spremenljivko:

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{K}\,p_z(x,y)\ ;\ \ \{x,y\} \in \mathscr{D}_{x,y} = \Omega$$

Robni pogoji so v primeru upogiba plošč povsem analogni robnim pogojem pri upogibu enoosnega nosilnega elementa.

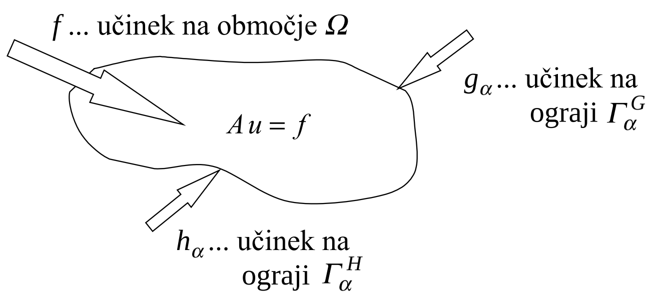
Velja še poudariti, da se statične veličine $m_x(x,y), m_y(x,y), q_x(x,y), q_y(x,y)$ kot napetostne rezultante nanašajo na enotsko dolžino plošče.

KONČNO LAHKO POVZAMEMO SKUPNE UGOTOVITVE VSEH DO SEDAJ OBRAVNAVANIH PROBLEMOV:

- trdno fizikalno ozadje in tehniška uporabnost
- skupne naravno pogojene lastnosti: primarne in sekundarne spremenljivke
- slična strukturiranost zgradbe vodilne enačbe problema
- skupno fizikalno razumevanje robnih pogojev in pogojev konsistentnega prehoda
- irelevantnost prostorske dimenzionalnosti

kar pomeni, da lahko v matematičnem pogledu obravnavane in njim slične probleme obravnavamo povsem splošno.

MATEMATIČNI POPIS FIZIKALNEGA PROBLEMA



$x \in \Omega$... območje

$x \in \Gamma$... ograja

$$\Gamma = \sum \Gamma_\alpha^G \cup \sum \Gamma_\alpha^G$$

$$\Gamma_\alpha^G \cap \Gamma_\alpha^G = 0$$

osnovna območna enačba

$$A u = f\,,\ x \in \Omega$$

A ... diferencialni operator

$u = u(x)$ ... osnovna fizikalna veličina

f ... učinek na območje

enačbe robnih pogojev

$G_\alpha u = g_\alpha,\ x \in \Gamma_\alpha^G$ ... bistveni r.p.

$H_\alpha u = h_\alpha,\ x \in \Gamma_\alpha^H$ ... naravni r.p.

G_α ... operator $\rightarrow$ osnovne fiz. veličine = primarne spremenljivke

H_α ... operator $\rightarrow$ naravne fiz. veličine = sekundarne spremenljivke

PROBLEM PREVODA TOPLOTE

območje $\Omega = \Omega^{(3D)}$, $x \in \{x, y, z\}$

primarna spremenljivka

temperatura $T = T(x,y,z,t)$

sekundarna spremenljivka

toplotni tok $(-k\,\mathrm{grad}T)$

osnovna območna enačba

$$\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}T) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - q_V$$

robni pogoji

$T = g(x),\ x \in \Gamma^G$ ...bistveni robni pogoj

$-k\dfrac{\partial T}{\partial n} = h(x), x \in \Gamma^H$ ...naravni robni pogoj

ELASTIČNI UPOGIB PLOŠČ (Kirchhoff)

območje $\Omega = \Omega^{(2D)}$, $x \in \{x, y\}$

primarna spremenljivka

upogibek $w = w(x, y)$

zasuk $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$

sekundarna spremenljivka

moment $-K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), -(1-\nu) K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

prečna sila $-K \frac{\partial}{\partial x}(\Delta w), -K \frac{\partial}{\partial y}(\Delta w)$

osnovna območna enačba

$K \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) = p(x, y)$

robni pogoji

$w = g_1(x), \quad x \in \Gamma_1^G$ ...bistveni r.p.

$\frac{\partial w}{\partial n} = g_2(x), \quad x \in \Gamma_2^G$ ...bistveni r.p.

$-K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = h_1(x), x \in \Gamma_1^H$ ...naravni r.p.

$-K \frac{\partial}{\partial n}(\Delta w) = h_2(x), \quad x \in \Gamma_2^H$ ...naravni r.p.

O LASTNOSTIH OPERATORJA A

$A = A^{(2m)}, m \in N$

$A^{(2m)}$ ... diferencialni operator $2m-$tega reda

m primarnih spremenljivk

$r_i = G^{(i)} u, i = 0,1,2,..,(m-1)$

m sekundarnih spremenljivk

$q_i = H^{(m+i)} u, i = 0,1,2,..,(m-1)$

V primeru, ko ne gre za problem kontakta med več območji, izkazujejo primarne in sekundarne spremenljivke konjugiranost glede na robne pogoje.

primarne spremenljivke		sekundarne spremenljivke
znane	<=>	neznane
neznane	<=>	znane