INTEGRALSKA VARIACIJSKA FORMULACIJA

Reševanje vodilne diferencialne enačbe lahko prevedemo na reševanje ustrezne integralske enačbe. Vzemimo vodilno enačbo poznane oblike:

$$Au - f = 0 \; ; \; x \in \Omega$$

katere rešitev je tudi rešitev integralske enačbe:

$$\int_{\Omega} (Au - f) v \, d\Omega = 0 \; ; \; v \in V_m \; (\text{ali } V_{2m})$$

Integralsko enačbo smo dobili tako, da smo diferencialno enačbo množili s poljubno na območju Ω diferenciabilno funkcijo $v = v(x)$, nakar smo tako ustvarjeni funkcijski produkt integrirali po celotnem območju Ω. Ker je po definiciji prvi faktor v integrandu na celotnem integracijskem območju Ω ničen, je tudi zapisani integral, ne glede na to, kakšna je funkcija $v = v(x)$, ničen.

V problemih, ki smo jih obravnavali, je bil red diferencialnega operatorja A vselej sodo število: $A = A^{(2m)}$, kar je izredno ugodno za uporabo variacijskega pristopa. Tedaj namreč lahko integralsko enačbo:

$$\int_{\Omega} \left(A^{(2m)} u - f \right) v \, d\Omega = 0$$

imenovano tudi OSNOVNA OBLIKA INTEGRALSKE FORMULACIJE , ob privzetju, da je funkcija $v = v(x)$ vsaj $m-$krat diferenciabilna $(v \in V_m)$, $m-$krat zaporedoma integriramo *per partes*, tako da dobimo:

$$\int_{\Omega} [\left(A^{(m)} u \right)\left(A^{(m)} v \right) - f v] \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(B_u^{(1)} u \right)\left(C_v^{(1)} v \right) d\Gamma$$

Posebnost te integralske oblike, imenovane tudi ŠIBKA OBLIKA INTEGRALSKE FORMULACIJE, je, da se je začetni diferencialni operator $A = A^{(2m)}$ v območnem integralu reduciral na $A = A^{(m)}$ ter da deluje enako na obe funkciji $u(x)$ in $v(x)$. Prav tako je dana integralska oblika značilna po prisotnosti integralov po območju Ω in integralov po ograji Γ tega območja.

Ob nadaljnjem privzetju, da je funkcija $v = v(x)$ še nadaljno $m-$krat diferenciabilna $(v \in V_{2m})$, lahko dani integral po območju Ω še $m-$krat zaporedoma integriramo *per partes*, tako da dobimo INVERZNO OBLIKO OSNOVNE INTEGRALSKE FORMULACIJE:

$$\int_{\Omega} [u \left(A^{(2m)} v \right) - f v] \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(B_u^{(2)} u \right)\left(C_v^{(2)} v \right) d\Gamma$$

Posebnost te integralske oblike je v tem, da se je začetni diferencialni operator v območnem integralu $A = A^{(2m)}$, ki je v osnovni obliki integralske formulacije deloval nad funkcijo $u(x)$ reduciral na enotskega, enotski operator, ki je deloval nad funkcijo $v(x)$, pa se je po $2m-$kratnem integriranju transformiral v isti diferencialni operator $A = A^{(2m)}$, ki določa vodilno diferencialno enačbo obravnavanega problema.

Prikazane tri integralske oblike dajejo osnovo trem možnostim aproksimativnega reševanja, ki jih poznamo pod imeni:

- METODA KONČNIH RAZLIK - MKR
- METODA KONČNIH ELEMENTOV - MKE
- METODA ROBNIH ELEMENTOV - MRE

PRIMER XI.1:

Z uporabo integralske variacijske formulacije določi ekvivalentne integralske oblike za rešitev upogiba nosilca!

Vodilna enačba upogiba nosilca je diferencialna enačba:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - p_z(x) = 0 \; ; \; x \in [0, L]$$

kjer je upogibek $w = w(x)$ osnovna primarna spremenljivka problema.

Diferencialni operator A je sodega reda, konkretno 4-tega reda:

$$A = \frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2}{dx^2} \right) = A^{(4)}$$

Skladno s postopkom integralske variacijske formulacije pomnožimo zgornjo enačbo s funkcijo $v = v(x)$, od katere zahtevamo, da je ustreznokrat odvedljiva, nakar tako dobljeni produkt integrirajmo po definicijskem območju $\Omega \equiv [0, L]$.

$$\int_0^L \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - p_z(x) \right] v(x) dx = 0$$

kar je že OSNOVNA OBLIKA INTEGRALSKE FORMULACIJE.

Dvakratno zaporedno integriranje integranda, ki vsebuje diferencialni operator, da:

$$\int_0^L \frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v\, dx = \left[\frac{d}{dx}\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v \right]_0^L - \int_0^L \frac{d}{dx}\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \frac{dv}{dx} dx =$$

$$= \left[\frac{d}{dx}\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v \right]_0^L - \left[\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \frac{dv}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \frac{d^2 v}{dx^2} dx$$

ŠIBKA OBLIKA INTEGRALSKE FORMULACIJE je tako:

$$\int_0^L \left[\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \frac{d^2 v}{dx^2} - p_z\, v \right] dx = -\left[\frac{d}{dx}\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v \right]_0^L + \left[\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \frac{dv}{dx} \right]_0^L$$

Nadaljnje dvakratno zaporedno integriranje preostalega območnega integrala z integrandom v diferencialni obliki da:

$$\int_0^L \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \left[\frac{dw}{dx}\left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right]_0^L - \int_0^L \frac{dw}{dx} \frac{d}{dx}\left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{dw}{dx}\left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right]_0^L - \left[w \frac{d}{dx}\left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right]_0^L + \int_0^L w \frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx$$

kar da ob upoštevanju še preostalih deležev, prisotnih v integralski enačbi šibke oblike integralske formulacije:

$$\int_0^L \left[w \frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - p_z\, v \right] dx = -\left[\frac{d}{dx}\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v \right]_0^L +$$

$$+ \left[\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \frac{dv}{dx} \right]_0^L - \left[\frac{dw}{dx}\left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right]_0^L + \left[w \frac{d}{dx}\left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right]_0^L$$

kar predstavlja INVERZNO OBLIKO OSNOVNE INTEGRALSKE FORMULACIJE.

Spomnimo se nadalje še zveze med osnovno primarno spremenljivko $w = w(x)$ ter preostalimi veličinami:

$$\varphi = \frac{dw}{dx}\ ,\ M = -EI\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right),\ T = -\frac{d}{dx}\left[EI\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]$$

ki jih označimo z indeksom w, s čemer poudarimo, da so te veličine osnovane na upogibku $w = w(x)$, torej:

$$\frac{dw}{dx} = \varphi_w\ ,\ -EI\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) = M_w\ ,\ -\frac{d}{dx}\left[EI\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right] = T_w$$

S pozornim pogledom na zgradbo dobljenih integralskih oblik namreč ugotovimo, da se v integralih po ograji Γ, katero v našem enodimenzijskem primeru tvorita le krajiščni točki $x = 0$ in $x = L$, pojavljajo povsem enaki diferencialni izrazi tudi z ozirom na funkcijo $v = v(x)$. Funkcijo $v = v(x)$ lahko povsem dopustno smatramo za rešitev nekega upogibnega problema, ki za veličine problema daje:

$$\frac{dv}{dx} = \varphi_v\ ,\ -EI\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) = M_v\ ,\ -\frac{d}{dx}\left[EI\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right] = T_v$$

Šibko obliko integralske formulacije lahko tedaj zapišemo kot:

$$\int_0^L \left[\left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \frac{d^2 v}{dx^2} - p_z\, v \right] dx = \left[T_w\, v \right]_0^L - \left[M_w\, \varphi_v \right]_0^L$$

inverzno obliko osnovne integralske formulacije pa kot:

$$\int_0^L \left[w \frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - p_z\, v \right] dx = \left[T_w\, v\right]_0^L - \left[M_w\, \varphi_v\right]_0^L + \left[\varphi_w M_v\right]_0^L - \left[w T_v\right]_0^L$$

Zapisane kombinacije produktov na krajiščih so predvsem zanimive z enega vidika. Funkcijske vrednosti v teh produktih so robne vrednosti fizikalnih veličin našega problema, izražene v odvisnosti od upogibka $w = w(x)$. Kot vemo so zaradi konjugiranosti primarnih in sekundarnih veličin na istem robu poznane le ene ali druge, kar upoštevamo z vključitvijo robnih pogojev.

Pri aproksimativnem reševanju obravnavanih problemov z integralskimi metodami bo posebno vlogo igrala tudi izbira funkcije $v = v(x)$ ter njeno obnašanje na ograji.

APROKSIMATIVNO NUMERIČNO REŠEVANJE

Reševanje katerekoli oblike integralske enačbe zahteva funkcijsko aproksimacijo iskane osnovne primarne spremenljivke $u = u(x)$, saj v nasprotnem primeru ni mogoče izvrednotiti danih integralov. Glede na to, da je funkcija $v = v(x)$ poljubna funkcija, ki je le dovolj odvedljiva, naj bi z izbiro te funkcije ne imeli prevelikih preglavic.

Rešitev problema iščemo v obliki aproksimacije $\hat{u} = \hat{u}(x)$:

$$\hat{u} = \hat{u}(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \Phi_k(x)$$

ki je grajena na množici diskretnih vrednosti $\{a_k\}$ ter množici interpolacijskih funkcij $\{\Phi_k\}$. Pri tem zahtevamo, da slednje izpolnjujejo pogoj:

$$\Phi_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \ldots\ x_i = x_k \\ 0 & \ldots\ x_i \neq x_k \end{cases}$$

kjer je δ_{ik} Kronecker-jev delta tenzor.

S tem dobijo koeficienti $\{a_k\}$ tudi fizikalno ozadje, saj velja:

$$a_i = \sum_{k=0}^{N} a_k \Phi_k(x_i) = \hat{u}(x_i)$$

Omenjene tri aproksimativne metode (MKR, MKE, MRE) dobimo z aplikacijo posebne izbire funkcije $v = v(x)$ na ustrezni integralski obliki variacijske formulacije:

MKR:
OSNOVNA OBLIKA INTEGRALSKE FORMULACIJE
$v(x) \in \{\delta(x_i)\}$ nabor Dirac-ove funkcije v posameznih točkah

MKE:
ŠIBKA OBLIKA INTEGRALSKE FORMULACIJE
$v(x) \in \{\Phi_k(x)\}$ nabor interpolacijskih funkcij za aproksimacijo

MRE:
INVERZNA OBLIKA OSNOVNE INTEGRALSKE FORMULACIJE
$v(x) \in \{Av = \delta(x_i)\}$ nabor osnovnih rešitev v posameznih točkah

METODA KONČNIH RAZLIK

Osnovno obliko integralske formulacije zapišimo z aproksimirano rešitvijo $\hat{u}(x)$:

$$\int_\Omega \left(A^{(2m)} \hat{u} - f \right) v_k \, d\Omega = 0 \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots,N$$

Nabor funkcij $v_k(x)$ naj izpolnjuje pogoj:

$$v_k = \delta(x_k)$$

kjer je $\delta(x_k)$ Dirac-ova funkcija z lastnostjo:

$$\delta(x_k) \Rightarrow \begin{cases} \delta(x_k) = 0 & \ldots\ x \neq x_k \\ \int_\Omega \delta(x_k)\, dx = 1 & \end{cases}$$

$$\int_\Omega F(x)\delta(x_k)\, dx = F(x_k)$$

Z izbranim naborom funkcij $v_k(x)$ preide sistem integralskih enačb v sistem algebrajskih enačb

$$\left(A^{(2m)}\hat{u} - f\right)\Big|_{x=x_k} = 0 \;\; ; \;\; k = 0,1,2,...,N$$

kar predstavlja vrednost vodilne diferencialne enačbe v izbranih točkah $x = x_k$. Glede na to, da ekzaktne rešitve ne poznamo, je potrebno diferencialne operatorje $A^{(2m)}$ nadomestiti z diferenčnimi operatorji $\tilde{A}^{(2m)}$, nakar dobimo sistem diferenčnih enačb:

$$\left(\tilde{A}^{(2m)}\hat{u} - f\right)\Big|_{x=x_k} = 0 \;\; ; \;\; k = 0,1,2,...,N$$

Če še nabor točk $x = x_k$ izvedemo na regularni ekvidistantni mreži, dobimo klasično, že nam poznano, MKR, do katere pa smo tokrat prišli na nekoliko drugačen način. Rezultirajoči sistem enačb za diskretno množico neznank $\{a_k\} = \{\hat{u}_k\}$ lahko zapišemo še v matrični obliki:

$$K^{\text{MKR}}\, U = F^{\text{MKR}}$$

METODA KONČNIH ELEMENTOV

Šibko obliko integralske formulacije zapišimo z aproksimirano rešitvijo $\hat{u}(x)$:

$$\int_\Omega \left[\left(A^{(m)}\hat{u}\right)\left(A^{(m)}v_k\right) - f v_k\right] d\Omega = \int_\Gamma \left(B_u^{(1)}\hat{u}\right)\left(C_v^{(1)}v_k\right) d\Gamma \;\; ; \;\; k = 0,1,2,...,N$$

pri čemer izvedemo osnovno aproksimacijo funkcije $\hat{u}(x)$ na podobmočju Ω_e , imenovanem *končni element*, s pomočjo diskretnih funkcijskih vrednosti na tem podobmočju:

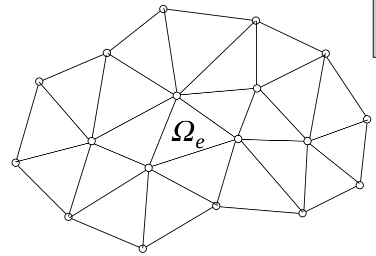
$$\hat{u} = \hat{u}_e(x) = \sum_{k=0}^{N_e} a_k^e \Phi_k^e(x) \;\; ; \;\; x \in \Omega_e$$

Nabor funkcij $v_k(x)$ na podobmočju Ω_e izpolnjuje pogoj:

$$v_k = \Phi_k^e(x) \;\; ; \;\; k = 0,1,2,...,N_e$$

Celotno integracijo po območju Ω izvedemo z integriranjem preko vseh podobmočij Ω_e , kar rezultira v sistemu enačb s koeficienti $\{a_k\} = \{\hat{u}_k\}$ kot neznankami:

$$K^{\text{MKE}}\, U = F^{\text{MKE}}$$



$$\Omega \bigcup \sum_e \Omega_e$$

METODA ROBNIH ELEMENTOV

Inverzno obliko osnovne integralske formulacije zapišimo z aproksimirano rešitvijo $\hat{u}(x)$:

$$\int_\Omega \left[\hat{u}\left(A^{(2m)}v_k\right) - f v_k\right] d\Omega = \int_\Gamma \left(B_u^{(2)}\hat{u}\right)\left(C_v^{(2)}v_k\right) d\Gamma \;\; ; \;\; k = 0,1,2,...,N$$

Z inteligentno izbiro nabora funkcij $v_k(x)$ lahko obravnavo integralske enačbe zelo poenostavimo. Naj funkcije $v_k(x)$ izpolnjujejo pogoj:

$$A^{(2m)}v_k = \delta(x_k)$$

kjer je $\delta(x_k)$ Dirac-ova funkcija. Zaradi poznanih lastnosti te funkcije se območni integral z aproksimirano funkcijo $\hat{u}(x)$ prevede v:

$$\int_\Omega \hat{u}\left(A^{(2m)}v_k\right) d\Omega = \int_\Omega \hat{u}\, \delta(x_k)\, d\Omega = c_k\, \hat{u}_k$$

pri čemer je koeficient c_k odvisen od lege točke $x = x_k$ glede na ograjo Γ :

$$c_k = \begin{cases} 1 & \ldots\ x_k \in \Omega \\ a\ ;\ 0 < a < 1 & \ldots\ x_k \in \Gamma \end{cases}$$

Inverzna oblika osnovne integralske formulacije se s takšnim posegom lahko prevede le v integrale po ograji, zaradi česar je potrebno aproksimirati iskano rešitev zgolj na ograji Γ. Podobno kot pri MKE, tudi pri MRE integracijo po ograji Γ razdelimo na integracijo po njenih sestavnih delih Γ_e, imenovanih *robni elementi*, tako da je aproksimacija iskane funkcije na delu ograje Γ_e :

$$\hat{u} = \hat{u}_e(x) = \sum_{k=0}^{N_e} a_k^e \Phi_k^e(x)\ ;\ x \in \Gamma_e$$

Celotno integracijo po ograji Γ izvedemo z integriranjem po vseh delih ograje Γ_e , kar rezultira v sistemu enačb s koeficienti $\{a_k\} = \{\hat{u}_k\}$ kot neznankami:

$$K^{MRE} U = F^{MRE}$$