REŠEVANJE ROBNEGA PROBLEMA Z INTEGRALSKO VARIACIJSKO FORMULACIJO

Robni problem je definiran z vodilno diferencialno enačbo ter pripadajočimi robnimi pogoji:

območna enačba:

$$Au - f = 0 \; ; \; x \in \Omega$$

enačbe robnih pogojev:

$$G_\alpha u = g_\alpha \quad ; \; x \in \Gamma_\alpha^G$$

$$H_\alpha u = h_\alpha \quad ; \; x \in \Gamma_\alpha^H$$

Da bi bila rešitev diferencialne enačbe $u(x)$ tudi rešitev s predpisanimi robnimi pogoji definiranega robnega problema, je potrebno integralsko enačbo:

$$\int_\Omega (Au - f)\, v \, d\Omega = 0 \; ; \; v \in V_m \; (\text{ali } V_{2m})$$

ki sicer zagotavlja izpolnitev vodilne diferencialne enačbe, nadgraditi z naborom funkcij točno opredeljenih lastnosti.

Spoznali smo tri integralske oblike, ki jih simbolično zapišimo na naslednji način:

OSNOVNA OBLIKA INTEGRALSKE FORMULACIJE:

$$J_{(2m)}(u,v) = \int_\Omega \left(A^{(2m)}u - f\right) v \, d\Omega = 0$$

ŠIBKA OBLIKA INTEGRALSKE FORMULACIJE:

$$J_{(m)}(u,v) = \int_\Omega \left[\left(A^{(m)}u\right)\left(A^{(m)}v\right) - fv\right] d\Omega - \int_\Gamma \left(B_u^{(1)}u\right)\left(C_v^{(1)}v\right) d\Gamma = 0$$

INVERZNA OBLIKA OSNOVNE INTEGRALSKE FORMULACIJE:

$$J_{(0)}(u,v) = \int_\Omega \left[u\left(A^{(2m)}v\right) - fv\right] d\Omega - \int_\Gamma \left(B_u^{(2)}u\right)\left(C_v^{(2)}v\right) d\Gamma = 0$$

Uporaba katerekoli izmed teh integralskih oblik kot osnove za rešitev robnega problema zahteva specifičen pristop pri vključitvi robnih pogojev, kar si oglejmo v nadaljevanju.

Podrobnejša analiza integralske formulacije bi pokazala (glej primer prevedbe problema upogiba na integralsko enačbo!), da je zgradba diferencialnih operatorjev, ki se v enačbah integralske formulacije pojavljajo, v neposredni povezavi z operatorji, ki definirajo fizikalne spremenljivke (tako primarne kot sekundarne). Velja namreč:

$$B_u^{(1)} \in \{H_\alpha\} \; , \quad C_v^{(1)} \in \{G_\alpha\}$$

$$B_u^{(2)} \in \{G_\alpha, H_\alpha\} \; , \quad C_v^{(2)} \in \{G_\alpha, H_\alpha\}$$

Da je temu res tako, se spomnimo enačb integralskih formulacij v primeru upogiba, kjer smo v primeru šibke oblike dobili:

$$\int_0^L \left[\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)\frac{d^2v}{dx^2} - p_z v\right] dx - \left[T_w v\right]_0^L + \left[M_w \varphi_v\right]_0^L = 0$$

v primeru inverzne oblike pa:

$$\int_0^L \left[w\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) - p_z v\right] dx - \left[T_w v\right]_0^L + \left[M_w \varphi_v\right]_0^L - \left[\varphi_w M_v\right]_0^L + \left[wT_v\right]_0^L = 0$$

Iz pozornega pogleda na zgradbo integralske enačbe v primeru inverzne oblike integralske formulacije ugotovimo, da nudi ta formulacija MOŽNOST IZPOLNITVE tako BISTVENIH (poznane primarne spremenljivke) kot NARAVNIH ROBNIH POGOJEV (poznane sekundarne spremenljivke) neposredno že z izpolnitvijo integralske enačbe.

Iz zgradbe integralske enačbe v primeru šibke oblike integralske formulacije pa je razvidno, da pogojuje izpolnitev integralske enačbe zgolj IZPOLNITEV NARAVNIH ROBNIH POGOJEV (poznane sekundarne spremenljivke).

Končno ugotovimo, da izpolnitev integralske enačbe v primeru osnovne integralske formulacije sama po sebi NE ZAGOTAVLJA IZPOLNITVE NOBENEGA ROBNEGA POGOJA.

Zgornje ugotovitve je potrebno upoštevati pri aproksimativnem reševanju robnega problema. Glede na lastnosti uporabljene integralske formulacije bo morala izbrana funkcijska oblika zagotoviti *a priori* izpolnitev tistih robnih pogojev, katerih izpolnitev integralska formulacija neposredno ne omogoča.

Privzemimo, da iščemo rešitev problema v obliki aproksimativne rešitve $\hat{u} = \hat{u}(x)$, pri čemer naj bo ta zapisana kot funkcijska vrsta:

$$\hat{u} = \hat{u}(x) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}} a_{\mathrm{k}} \Phi_{\mathrm{k}}(x)$$

ki je grajena na množici diskretnih vrednosti $\{a_{\mathrm{k}}\}$ ter množici interpolacijskih funkcij $\{\Phi_{\mathrm{k}}\}$.

V primeru uporabe inverzne integralske formulacije nimamo z vidika robnih pogojev nikakršnih *a priori* zahtev nad funkcijami $\{\Phi_{\mathrm{k}}\}$.

Nasprotno pa je v primeru uporabe šibke oblike integralske formulacije potrebno zagotoviti *a priori* izpolnitev bistvenih robnih pogojev, v primeru osnovne integralske formulacije pa izpolnitev vseh robnih pogojev.

Prav z vidika robnih vrednosti aproksimacijskih funkcij ter njenih odvodov velja aproksimativno rešitev $\hat{u} = \hat{u}(x)$ zapisati nekoliko drugače:

$$\hat{u} = \hat{u}(x) = \Psi_0(x) + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} c_{\mathrm{k}} \Psi_{\mathrm{k}}(x)$$

kjer smo s preimenovanjem tako koeficientov $a_{\mathrm{k}} \to c_{\mathrm{k}}$ kot aproksimacijskih funkcij $\Phi_{\mathrm{k}} \to \Psi_{\mathrm{k}}$ želeli poudariti različnost v lastnostih aproksimirane rešitve.

Pri tem zahtevamo, da izpolnjuje funkcija $\Psi_0(x)$ vse tiste robne pogoje, ki jih uporabljena integralska formulacija ne izpolnjuje, medtem ko naj preostala množica funkcij $\Psi_{\mathrm{k}}(x)$ izpolnjuje homogeno obliko taistih pogojev.

Tako bomo v primeru osnovne integralske formulacije zahtevali:

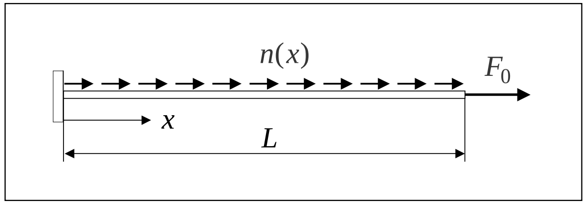
$$\begin{aligned} &G_\alpha \Psi_0(x) = g_\alpha \ \wedge \ G_\alpha \Psi_{\mathrm{k}}(x) = 0 \quad ; \ x \in \Gamma_\alpha^G \\ &H_\alpha \Psi_0(x) = h_\alpha \ \wedge \ H_\alpha \Psi_{\mathrm{k}}(x) = 0 \quad ; \ x \in \Gamma_\alpha^H \quad ; \ \mathrm{k} = 1,2,\ldots,\mathrm{N} \end{aligned}$$

v primeru šibke integralske formulacije pa:

$$G_\alpha \Psi_0(x) = g_\alpha \ \wedge \ G_\alpha \Psi_{\mathrm{k}}(x) = 0 \quad ; \ x \in \Gamma_\alpha^G \quad ; \ \mathrm{k} = 1,2,\ldots,\mathrm{N}$$

PRIMER XII.1:

Za primera uporabe osnovne in šibke oblike integralske variacijske formulacije določi funkcijsko obliko aproksimativne rešitve za primarno spremenljivko $u(x)$ definiranega robnega problema $(AE = \text{konst})$:



Robna pogoja obravnavanega problema sta:

Bistveni robni pogoj:

$$u(0) = \delta_0 = 0$$

Naravni robni pogoj:

$$\left(EA \frac{du}{dx}\right)_{x=L} = F_0$$

Določimo najprej osnovno obliko integralske variacijske formulacije, pri čemer izhajamo iz območne diferencialne enačbe problema:

$$\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) + n(x) = 0 \ , \quad x \in [0, L]$$

Osnovno obliko integralske formulacije podaja integralska enačba:

$$J_{(2m)}(u,v) = \int_0^L \left[\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) + n(x)\right] v \, dx = 0$$

Z nadaljnjo integracijo *per partes* dobimo integralsko enačbo, s katero je izražena šibka oblika integralske formulacije:

$$J_{(m)}(u,v) = \int_0^L \left[\left(EA\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx} - n(x)v\right] dx - N_u(L)v(L) + N_u(0)v(0) = 0$$

kjer je sekundarna spremenljivka:

$$N(x) = EA\frac{du}{dx}$$

Obravnavajmo najprej funkcijsko obliko aproksimativne rešitve $\hat{u} = \hat{u}(x)$, ki bi bila primerna za uporabo osnovne oblike integralske variacijske formulacije!

1. UGOTOVITEV:

Glede na red diferencialnega operatorja v integralski enačbi:

$$J_{(2m)}(u,v) = \int_0^L \left[\frac{d}{dx}\left(EA \frac{du}{dx} \right) + n(x) \right] v\, dx = 0$$

je najnižja stopnja potenčne vrste, s katero bi lahko aproksimirali iskano rešitev, N=2, torej:

$$\hat{u} = \hat{u}(x) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}} a_{\mathrm{k}} x^{\mathrm{k}} \;\; ; \quad \Phi_{\mathrm{k}}(x) = x^{\mathrm{k}} \;\; , \quad \mathrm{N} \geq 2$$

2. UGOTOVITEV:

Ker robne vrednosti fizikalnih spremenljivk problema niso zajete v integralski enačbi, mora funkcijska oblika izbrane aproksimacije zadostiti vsem robnim pogojem problema. Zato zapišemo aproksimativno rešitev $\hat{u} = \hat{u}(x)$ v obliki vrste:

$$\hat{u} = \hat{u}(x) = \Psi_0(x) + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} c_{\mathrm{k}} \Psi_{\mathrm{k}}(x)$$

pri čemer imajo aproksimacijske funkcije $\Psi_0(x)$ in $\Psi_{\mathrm{k}}(x)$ naslednje lastnosti:

$$\begin{aligned} &\Psi_0(0) = \delta_0 && \wedge \quad \Psi_{\mathrm{k}}(0) = 0 \\ &(EA)\big|_{x=L} \frac{d\Psi_0}{dx}(L) = F_0 && \wedge \quad (EA)\big|_{x=L} \frac{d\Psi_{\mathrm{k}}}{dx}(L) = 0 \quad ; \\ & && \qquad \mathrm{k} = 1,2,\ldots,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Če ostajamo v krogu potenčnih aproksimacij, so aproksimacijske funkcije z opisanimi lastnostmi:

$$\begin{aligned} &\Psi_0(x) = \delta_0 + \frac{F_0}{EA} x \\ &\Psi_1(x) = x^2 - 2Lx \\ &\Psi_2(x) = x^3 - 3L^2 x \\ &\Psi_3(x) = x^4 - 4L^3 x \;\; \Rightarrow \;\; \Psi_{\mathrm{k}}(x) = x^{\mathrm{k}+1} - (\mathrm{k}+1) L^{\mathrm{k}} x \;\; ; \;\; \mathrm{k} \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

Obravnavajmo še funkcijsko obliko aproksimativne rešitve $\hat{u} = \hat{u}(x)$, ki bi bila primerna za uporabo šibke oblike integralske variacijske formulacije!

1. UGOTOVITEV:

Glede na red diferencialnega operatorja, ki deluje nad rešitvijo $u(x)$ v integralski enačbi:

$$J_{(m)}(u,v) = \int_0^L \left[\left(EA \frac{du}{dx} \right) \frac{dv}{dx} - n(x) v \right] dx - N_u(L) v(L) + N_u(0) v(0) = 0$$

lahko zaključimo, da je najnižja stopnja potenčne vrste, s katero bi lahko aproksimirali iskano rešitev, N=1, torej:

$$\hat{u} = \hat{u}(x) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}} a_{\mathrm{k}} x^{\mathrm{k}} \;\; ; \quad \Phi_{\mathrm{k}}(x) = x^{\mathrm{k}} \;\; , \quad \mathrm{N} \geq 1$$

2. UGOTOVITEV:

Ker so v integralski enačbi zajete le robne vrednosti sekundarne spremenljivke problema, mora funkcijska oblika izbrane aproksimacije zadostiti bistvenim robnim pogojem problema. Zato zapišemo aproksimativno rešitev $\hat{u}=\hat{u}(x)$ v obliki vrste:

$$\hat{u}=\hat{u}(x)=\Psi_0(x)+\sum_{k=1}^{N} c_k \Psi_k(x)$$

pri čemer imajo aproksimacijske funkcije $\Psi_0(x)$ in $\Psi_k(x)$ naslednje lastnosti:

$$\Psi_0(0)=\delta_0 \quad \wedge \quad \Psi_k(0)=0 \quad ; \quad k=1,2,\ldots,N$$

V krogu potenčnih aproksimacij so aproksimacijske funkcije opisanih lastnosti:

$$\Psi_0(x)=\delta_0$$
$$\Psi_1(x)=x \quad , \quad \Psi_2(x)=x^2 \quad , \quad \Psi_3(x)=x^3 \quad \Rightarrow \quad \Psi_k(x)=x^k \quad ; \quad k\in \mathcal{N}$$

APROKSIMATIVNO REŠEVANJE Z INTEGRALSKO VARIACIJSKO FORMULACIJO

Ne glede na obliko uporabljene integralske formulacije je mogoče trditi, da aproksimirana rešitev $\hat{u}=\hat{u}(x)$:

$$\hat{u}=\hat{u}(x)=\Psi_0(x)+\sum_{k=1}^{N} c_k \Psi_k(x)$$

z vsemi predpisanimi lastnostmi, ki naj jih glede na integralsko formulacijo imajo aproksimacijske funkcije $\Psi_0(x)$ in $\Psi_k(x)$, v splošnem ne izpolnjuje integralske identitete:

$$J_{(r)}(u,v)=0 \quad ; \quad r\in\{2m,m,0\}$$

Vrednost integralskega izraza je v primeru aproksimativne rešitve z N neznanimi koeficienti c_k odvisna tako od števila koeficientov kot od njihove velikosti, prav tako pa tudi od izbrane funkcije $v(x)$:

$$J_{(r)}(\hat{u},v)=J_{(r)}(c_k,N,v)\neq 0 \quad ; \quad r\in\{2m,m,0\}$$

Po drugi strani pa je tudi res, da še vedno obravnavamo problem z N zaenkrat še neznanimi koeficienti c_k, katerih velikost je še potrebno določiti. Ponovno smo pred že poznanim vprašanjem: "Kako in na kakšni fizikalni osnovi opredeliti sistem N enačb, iz katerega bo mogoče izračunati neznane koeficiente?"

Zadostno fizikalno osnovo dajejo prav vse obravnavane integralske oblike ter v smislu zadostitve robnim pogojem specificirane aproksimacijske funkcije. Ob znani integralski obliki ter privzeti aproksimacijski obliki rešitve $\hat{u}=\hat{u}(x)$ je vrednost konkretnega integralskega izraza odvisna samo še od izbrane funkcije $v(x)$. Z različnimi izbirami le-te ter s pogojevanjem, da tako izvrednoteni izraz identično izpolnjuje integralsko identiteto, lahko pridemo do poljubnega števila enačb. Da bi bil postopek določanja koeficientov c_k konsistenten in bi z večanjem števila koeficientov enolično vodil k ekzaktni rešitvi, mora množica za tvorbo enačb uporabljenih funkcij $v_k(x)$ izpolnjevati pogoj kompletnosti in linearne neodvisnosti.

Nekaj takšnih množic je mogoče zapisati že na osnovi poznanih razvrstitev:

$$v_k(x)\in\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,\ldots\} \qquad \text{ali}$$
$$v_k(x)\in\{1,\sin x,\sin(2x),\sin(3x),\sin(4x),\sin(5x),\ldots\}$$

Iskani sistem enačb lahko vsaj formalno zapišemo v obliki:

$$J_{(r)}(\hat{u},v)=J_{(r)}(c_k,v_i)=0 \quad ; \quad i=1,2,\ldots,N$$

iz katerega sledi izvrednotenje neznanih koeficientov c_k.

Opisano metodologijo aproksimativnega reševanja na osnovi integralskih enačb imenujemo s skupnim imenom METODE UTEŽNEGA OSTANKA.

Z ozirom na obliko uporabljenih funkcij $v_k(x)$ govorimo o:

MOMENTNI METODI, kjer izberemo:

$$v_k(x)\in\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,\ldots\}$$

GALERKINOVI METODI, kjer izberemo:

$$v_k(x)\in\{\Psi_1(x),\Psi_2(x),\Psi_3(x),\Psi_4(x),\Psi_5(x),\ldots\}$$

kjer so funkcije $\Psi_k(x)$ aproksimacijske funkcije, s katerimi aproksimiramo iskano rešitev problema. Te imajo vse predhodno zahtevane lastnosti, ki izhajajo iz uporabljene integralske formulacije ter oblike robnih pogojev.

Predvsem Galerkinova metoda $v_k(x) \equiv \Psi_k(x)$ ima nekaj posebnosti, ki jih lahko pri numeričnem reševanju na osnovi uporabe šibke oblike integralske formulacije s pridom izkoristimo.

V ta namen si oglejmo obliko integralske enačbe za obravnavani primer XII.1:

$$J_{(m)}(u,v) = \int_0^L \left[\left(EA \frac{du}{dx} \right) \frac{dv}{dx} - n(x)v \right] dx - N_u(L)v(L) + N_u(0)v(0) = 0$$

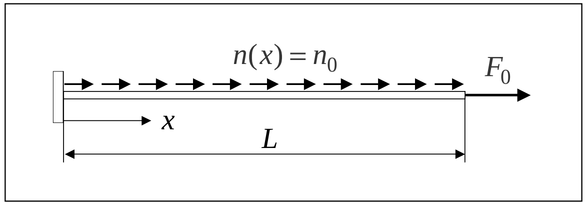
pri čemer je glede na predpisane robne pogoje $N_u(L) = F_0$, medtem ko je $N_u(0)$ neznana osna sila na mestu vpetja, po velikosti sicer enaka reakcijski sili.

Vendar pa lahko ugotovimo, da ta nova neznanka ne razširja števila potrebnih enačb. Zaradi lastnosti, ki naj jih izkazujejo aproksimacijske funkcije $\Psi_k(x)$ v primeru uporabe šibke oblike integralske formulacije, velja namreč, da so vrednosti teh funkcij na mestu predpisanih bistvenih robnih pogojev nične. V našem primeru torej:

$$v_k(0) \equiv \Psi_k(0) = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, ..., N$$

PRIMER XII.2:

Za obravnavani primer XII.1, pri čemer privzemimo, da je vzdolž elementa porazdeljena obtežba $n(x)$ konstantna, poiščimo aproksimativno rešitev na osnovi uporabe šibke oblike integralske variacijske formulacije ter analizirajmo vpliv stopnje aproksimacijskega polinoma na natančnost aproksimativne rešitve.



V konkretnem računskem primeru privzemimo še konstantnost dilatacijske togosti $(AE = \text{konst})$ ter soodvisnost med točkovno silo F_0 in kontinuirno porazdeljeno obtežbo n_0:

$$F_0 = n_0 L$$

PRIMER XII.2.1: ekzaktna rešitev

Robna pogoja obravnavanega problema, ki jo mora rešitev $u(x)$ izpolnjevati v krajiščih elementa, sta:

Bistveni robni pogoj:

$$u(0) = \delta_0 = 0$$

Naravni robni pogoj:

$$\left(EA \frac{du}{dx} \right)_{x=L} = F_0$$

Dvakratna integracija diferencialne enačbe problema:

$$\frac{d}{dx}\left(EA \frac{du}{dx} \right) = -n_0 \quad , \quad x \in [0, L]$$

da ob upoštevanju robnih pogojev naslednjo funkcijsko obliko za osnovno spremenljivko – pomik $u(x)$:

$$u(x) = \frac{F_0 L}{2EA}\left[4\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right], \quad x \in [0, L]$$

PRIMER XII.2.2a: aproksimativna rešitev z N=1

Funkcijsko obliko aproksimativne rešitve $\hat{u} = \hat{u}(x)$, ki bi bila primerna za uporabo šibke oblike integralske variacijske formulacije, določa kar zgradba podintegralske funkcije (red diferencialnih operatorjev) v:

$$J_{(m)}(u,v) = \int_0^L \left[\left(EA \frac{du}{dx} \right) \frac{dv}{dx} - n(x)v \right] dx - N_u(L)v(L) + N_u(0)v(0) = 0$$

Najnižja stopnja polinomske aproksimacije je linearna funkcija z N=1, torej:

$$\hat{u}_{\mathrm{N=1}} = \hat{u}_{\mathrm{N=1}}(x) = a_0 + a_1 x$$

Ker so v integralski enačbi zajete le robne vrednosti sekundarne spremenljivke problema, mora funkcijska oblika izbrane aproksimacije zadostiti bistvenim robnim pogojem problema. Zato zapišemo aproksimativno rešitev $\hat{u} = \hat{u}(x)$ v obliki vrste:

$$\hat{u}_{\mathrm{N=1}}(x) = \Psi_0(x) + c_1 \Psi_1(x)$$

z zahtevanimi lastnostmi aproksimacijskih funkcij $\Psi_0(x)$ in $\Psi_1(x)$:

$$\Psi_0(0)=\delta_0 \qquad \wedge \qquad \Psi_1(0)=0$$

V nasprotju z že obravnavanimi oblikami:

$$\Psi_0(x)=\delta_0 \quad , \quad \Psi_1(x)=x$$

ki izkazujejo zahtevano lastnost, se v nadaljevanju preusmerimo na tisto podmnožico $\{\hat{\psi}_k(x)\}$ množice $\{\Psi_k(x)\}$, za katero bo aproksimativna rešitev:

$$\hat{u}_N(x)=c_0\hat{\psi}_0(x)+\sum_{k=1}^{N} c_k\hat{\psi}_k(x)$$

izkazovala lastnost:

$$\hat{u}_N(x_i)=c_0\hat{\psi}_0(x_i)+\sum_{k=1}^{N} c_k\hat{\psi}_k(x_i)=c_i \quad \Rightarrow \quad c_i=U_i=\hat{u}(x_i)$$

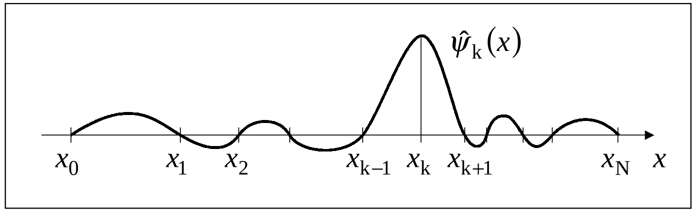
$$i=0,1,2,\ldots,N$$

kar pa je mogoče le v primeru, ko funkcije $\hat{\psi}_0(x)$ in $\hat{\psi}_k(x)$ izpolnjujejo pogoj:

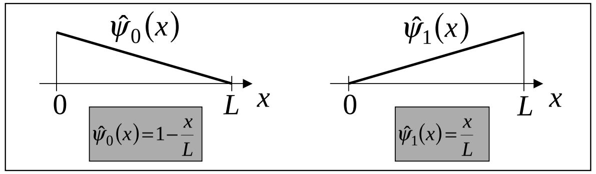
$$\hat{\psi}_k(x_i)=\delta_{ki}=\begin{cases}1 & \ldots\ i=k\\ 0 & \ldots\ i\neq k\end{cases}$$

Za primer polinomske aproksimacije N-te stopnje, zasnovane na množici (N+1) funkcijskih vrednosti v točkah $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$ definicijskega intervala, podajajo funkcijsko obliko funkcij $\hat{\psi}_k(x)$ Lagrangevi interpolacijski polinomi:

$$\hat{\psi}_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_N)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_N)}$$



Za obravnavani primer linearne polinomske aproksimacije, ki jo zasnujemo na krajiščnih vrednostih pri $x=0$ in $x=L$, dobimo:



S tem je aproksimativna rešitev $\hat{u}(x)$:

$$\hat{u}_{N=1}(x)=c_0\left(1-\frac{x}{L}\right)+c_1\left(\frac{x}{L}\right)$$

Glede na predpisane robne pogoje seveda velja:

$$c_0=\delta_0=0$$

z eno samo preostalo neznanko, t.j. koeficientom $c_1=U_1=\hat{u}(L)$.

Da bi določili vrednost neznanega koeficienta c_1, tvorimo enačbo skladno z Galerkinovim postopkom, pri čemer postavimo $v_k(x)\equiv\hat{\psi}_k(x)$:

$$J_{(r)}(\hat{u}_N, v)=J_{(r)}(c_k, v_i)=0 \quad ; \quad i=1,2,\ldots,N$$

oz. v konkretnem primeru z eno samo neznanko:

$$J_{(m)}(\hat{u}_{N=1}, v_1\equiv\hat{\psi}_1)=\int_0^L\left[\left(EA\frac{d}{dx}(c_0\hat{\psi}_0+c_1\hat{\psi}_1)\right)\frac{d\hat{\psi}_1}{dx}-n(x)\hat{\psi}_1\right]dx-$$
$$-N_u(L)\hat{\psi}_1(L)+N_u(0)\hat{\psi}_1(0)=0$$

Upoštevajoč znane vrednosti za $c_0, n(x), N_u(L), \hat{\psi}_1(0), \hat{\psi}_1(L), \hat{\psi}_0(x), \hat{\psi}_1(x)$ sledi aproksimacijska rešitev:

$$\hat{u}_{N=1}(x)=\frac{3F_0L}{2EA}\left(\frac{x}{L}\right), \quad x\in[0,L]$$

kar seveda odstopa od ekzaktne rešitve.

PRIMER XII.2.2b: aproksimativna rešitev z N=2

Povečajmo stopnjo polinomske aproksimacije na N=2, torej:

$$\hat{u}_{\mathrm{N=2}} = \hat{u}_{\mathrm{N=2}}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Upoštevajoč specifičnosti vpeljanih aproksimacijskih funkcij $\hat{\psi}_{\mathrm{k}}(x)$ ter izpolnjevanje bistvenih robnih pogojev problema preide dana kvadratična aproksimacija v:

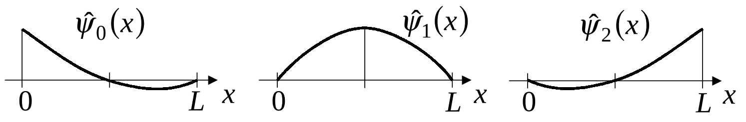
$$\hat{u}_{\mathrm{N=2}}(x) = c_0\hat{\psi}_0(x) + c_1\hat{\psi}_1(x) + c_2\hat{\psi}_2(x)$$

Za obravnavani primer kvadratične polinomske aproksimacije, ki jo zasnujemo na dveh krajiščnih vrednostih pri $x=0$ in $x=L$ ter vrednosti v sredini elementa pri $x=0.5L$, dobimo:

$$\hat{\psi}_0(x) = \left(1-\frac{x}{L}\right)\left(1-\frac{2x}{L}\right), \quad \hat{\psi}_1(x) = 4\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right), \quad \hat{\psi}_2(x) = \frac{x}{L}\left(\frac{2x}{L}-1\right)$$

ki izpolnjujejo zahtevane pogoje:

$$\hat{\psi}_{\mathrm{k}}(x_{\mathrm{i}}) = \delta_{\mathrm{ki}}$$



$\hat{\psi}_0(x) = \left(1-\frac{x}{L}\right)\left(1-\frac{2x}{L}\right)$ $\quad$ $\hat{\psi}_1(x) = 4\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)$ $\quad$ $\hat{\psi}_2(x) = \frac{x}{L}\left(\frac{2x}{L}-1\right)$

S tem je aproksimativna rešitev $\hat{u}(x)$:

$$\hat{u}_{\mathrm{N=2}}(x) = c_0\left[\left(1-\frac{x}{L}\right)\left(1-\frac{2x}{L}\right)\right] + c_1\left[4\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right] + c_2\left[\frac{x}{L}\left(\frac{2x}{L}-1\right)\right]$$

Glede na predpisane robne pogoje ponovno velja $c_0 = \delta_0 = 0$, medtem ko sta koeficienta $c_1 = U_1 = \hat{u}(0.5L)$ in $c_2 = U_2 = \hat{u}(L)$ neznanki.

Sistem dveh enačb dobimo skladno z Galerkinovim postopkom:

$$J_{(m)}\left(\hat{u}_{\mathrm{N=2}}, v_1 \equiv \hat{\psi}_1\right) = \int_0^L \left[\left(EA\frac{d}{dx}\left(c_0\hat{\psi}_0 + c_1\hat{\psi}_1 + c_2\hat{\psi}_2\right)\right)\frac{d\hat{\psi}_1}{dx} - n(x)\hat{\psi}_1\right]dx - $$
$$- N_u(L)\hat{\psi}_1(L) + N_u(0)\hat{\psi}_1(0) = 0$$
$$J_{(m)}\left(\hat{u}_{\mathrm{N=2}}, v_2 \equiv \hat{\psi}_2\right) = \int_0^L \left[\left(EA\frac{d}{dx}\left(c_0\hat{\psi}_0 + c_1\hat{\psi}_1 + c_2\hat{\psi}_2\right)\right)\frac{d\hat{\psi}_2}{dx} - n(x)\hat{\psi}_2\right]dx - $$
$$- N_u(L)\hat{\psi}_2(L) + N_u(0)\hat{\psi}_2(0) = 0$$

Ob upoštevanju znanih vrednosti za $c_0, n(x), N_u(L), \hat{\psi}_1(0), \hat{\psi}_1(L), \hat{\psi}_2(0), \hat{\psi}_2(L)$, $\hat{\psi}_0(x), \hat{\psi}_1(x), \hat{\psi}_2(x)$ sledi aproksimacijska rešitev:

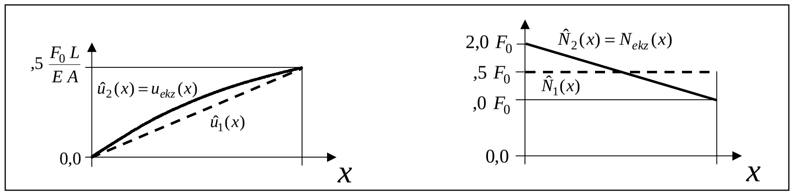
$$\hat{u}_{\mathrm{N=2}}(x) = \frac{F_0 L}{2EA}\left[4\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right], \quad x \in [0, L]$$

kar je identično ekzaktni rešitvi.

Vpliv stopnje aproksimacijskega polinoma na natančnost rešitve je prikazan tabelarično v tabeli:

x	$u(x)$	$\hat{u}_{\mathrm{N=1}}(x)$	$\hat{u}_{\mathrm{N=2}}(x)$	$N(x)$	$\hat{N}_{\mathrm{N=1}}(x)$	$\hat{N}_{\mathrm{N=2}}(x)$
0	0,000 $\frac{F_0 L}{E A}$	0,000 $\frac{F_0 L}{E A}$	0,000 $\frac{F_0 L}{E A}$	2,0 F_0	,5 F_0	2,0 F_0
$\frac{L}{2}$	0,875 $\frac{F_0 L}{E A}$	0,750 $\frac{F_0 L}{E A}$	0,875 $\frac{F_0 L}{E A}$	,5 F_0	,5 F_0	,5 F_0
L	,500 $\frac{F_0 L}{E A}$	,500 $\frac{F_0 L}{E A}$	,500 $\frac{F_0 L}{E A}$	,0 F_0	,5 F_0	,0 F_0

grafično pa v diagramu:



Povrnimo se ponovno k primeru, ko smo spreminjanje osnovne spremenljivke $u(x)$ aproksimirali s polinomom prve stopnje $\hat{u}(x)=\hat{u}_{\mathrm{N=1}}(x)$. Rezultirajočo enačbo:

$$J_{(m)}(\hat{u},\hat{\psi}_1)=\int_0^L\left[\left(EA\frac{d}{dx}(c_0\hat{\psi}_0+c_1\hat{\psi}_1)\right)\frac{d\hat{\psi}_1}{dx}-n(x)\hat{\psi}_1\right]dx-$$
$$-N_u(L)\hat{\psi}_1(L)+N_u(0)\hat{\psi}_1(0)=0$$

zapišimo v matrični obliki z jasno opredeljeno soodvisnostjo med koeficienti c_{k} , ki so glede na dogovorjeno izbiro aproksimacijskih funkcij $\hat{\psi}_{\mathrm{k}}(x)$ kar diskretne vrednosti primarne spremenljivke v obeh krajiščih elementa, in diskretnimi vrednostmi sekundarne spremenljivke, prav tako v krajiščih:

$$\begin{bmatrix} K_{10} & K_{11} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix}=\{F_1\}$$

pri čemer so matrični koeficienti K_{10}, K_{11}, F_1 povsem določeni.

Koeficienti K_{10}, K_{11}, F_1 so:

$$K_{10}=\int_0^L\left[\left(EA\frac{d\hat{\psi}_0}{dx}\right)\frac{d\hat{\psi}_1}{dx}\right]dx$$
$$K_{11}=\int_0^L\left[\left(EA\frac{d\hat{\psi}_1}{dx}\right)\frac{d\hat{\psi}_1}{dx}\right]dx$$
$$F_1=\int_0^L n(x)\hat{\psi}_1\,dx+N_u(L)$$

Enačbo lahko vsaj načelno razširimo v obliko:

$$\begin{bmatrix} K_{00} & K_{01} \\ K_{10} & K_{11} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{Bmatrix}$$

pri čemer so matrični koeficienti K_{00}, K_{01}, F_0 zaenkrat nepoznani. Tudi sicer jih za rešitev obravnavanega problema ne potrebujemo. Oblika sistema enačb pa je fizikalno povsem smiselna in kot bomo dokazali pozneje tudi fizikalno utemeljena.

Tudi v primeru, ko smo spreminjanje osnovne spremenljivke $u(x)$ aproksimirali s polinomom druge stopnje $\hat{u}(x)=\hat{u}_{\mathrm{N=2}}(x)$, lahko rezultirajoči enačbi:

$$J_{(m)}(\hat{u}_{\mathrm{N=2}},\hat{\psi}_1)=\int_0^L\left[\left(EA\frac{d}{dx}(c_0\hat{\psi}_0+c_1\hat{\psi}_1+c_2\hat{\psi}_2)\right)\frac{d\hat{\psi}_1}{dx}-n(x)\hat{\psi}_1\right]dx-$$
$$-N_u(L)\hat{\psi}_1(L)+N_u(0)\hat{\psi}_1(0)=0$$
$$J_{(m)}(\hat{u}_{\mathrm{N=2}},\hat{\psi}_2)=\int_0^L\left[\left(EA\frac{d}{dx}(c_0\hat{\psi}_0+c_1\hat{\psi}_1+c_2\hat{\psi}_2)\right)\frac{d\hat{\psi}_2}{dx}-n(x)\hat{\psi}_2\right]dx-$$
$$-N_u(L)\hat{\psi}_2(L)+N_u(0)\hat{\psi}_2(0)=0$$

zapišemo v matrični obliki z jasno opredeljeno soodvisnostjo med koeficienti c_{k} , t.j. diskretnimi vrednostmi primarne spremenljivke v obeh krajiščih elementa ter na sredini elementa, in diskretnimi vrednostmi sekundarne spremenljivke, prav tako v omenjenih točkah:

$$\begin{bmatrix} K_{10} & K_{11} & K_{12} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

pri čemer so matrični koeficienti $K_{10}, K_{11}, K_{12}, F_1, K_{20}, K_{21}, K_{22}, F_2$:

$$K_{10}=\int_0^L\left[\left(EA\frac{d\hat{\psi}_0}{dx}\right)\frac{d\hat{\psi}_1}{dx}\right]dx \quad , \quad K_{20}=\int_0^L\left[\left(EA\frac{d\hat{\psi}_0}{dx}\right)\frac{d\hat{\psi}_2}{dx}\right]dx$$
$$K_{11}=\int_0^L\left[\left(EA\frac{d\hat{\psi}_1}{dx}\right)\frac{d\hat{\psi}_1}{dx}\right]dx \quad , \quad K_{21}=\int_0^L\left[\left(EA\frac{d\hat{\psi}_1}{dx}\right)\frac{d\hat{\psi}_2}{dx}\right]dx$$
$$K_{12}=\int_0^L\left[\left(EA\frac{d\hat{\psi}_2}{dx}\right)\frac{d\hat{\psi}_1}{dx}\right]dx \quad , \quad K_{22}=\int_0^L\left[\left(EA\frac{d\hat{\psi}_2}{dx}\right)\frac{d\hat{\psi}_2}{dx}\right]dx$$
$$F_1=\int_0^L n(x)\hat{\psi}_1\,dx \quad , \quad F_2=\int_0^L n(x)\hat{\psi}_2\,dx+N_u(L)$$

Tudi tokrat lahko enačbo načelno razširimo v obliko:

$$\begin{bmatrix} K_{00} & K_{01} & K_{02} \\ K_{10} & K_{11} & K_{12} \\ K_{20} & K_{21} & K_{12} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

pri čemer so matrični koeficienti $K_{00}, K_{01}, K_{02}, F_0$ zaenkrat nepoznani, a fizikalno utemeljeni.