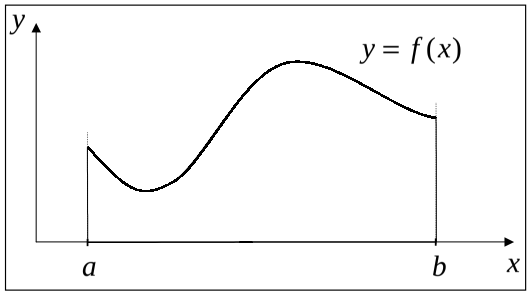
PRIMER XIII.1:

APROKSIMATIVNO REŠEVANJE PLOŠČINE LIKA KOT UVODNI KORAK V RAZUMEVANJE MKE IN MRE

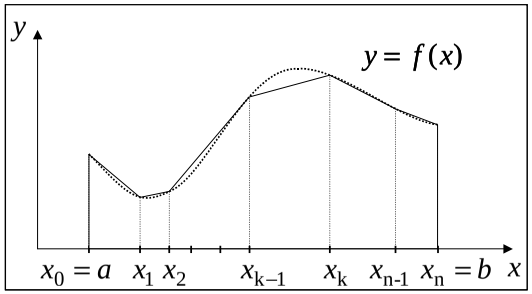
Na primeru aproksimativne rešitve ploščine lika, ki ga oklepa funkcija $y = f(x)$z abscisno osjo ter vzporednicama $x = a$ in $x = b$, bomo pokazali, da ima aproksimativno reševanje ploščine lika veliko skupnega z aproksimativnim pristopom, ki ga uporabljamo pri MKE in MRE.



Glede na to, da je ploščino p lika mogoče določiti z izračunom integrala:

$$p = \int_a^b f(x)dx$$

prav tako pa temeljita metodi MKE in MRE na integralskih formulacijah, bodo koraki, ki jih bomo uporabili pri aproksimativni rešitvi določitve ploščine lika, vsebovali tudi elemente, ki so karakteristični tudi za reševanje z MKE in MRE.



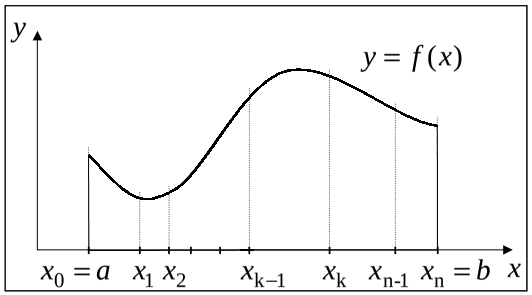
V primeru poznavanja ploščin Δp_k posameznih delov obravnavanega lika, bi iskano ploščino p izračunali kot seštevek le-teh, torej:

$$p = \sum_{k=1}^{n} \Delta p_k$$

pri čemer smo privzeli, da je takšnih delov n.

V primeru nepoznavanja takšnih delov lika, katerih ploščina Δp_k bi bila poznana, pa lahko iskano ploščino p aproksimiramo z vsoto ploščin primerno izbranih delov lika, katerih ploščino primerno ocenimo:

$$p = \sum_{k=1}^{n} \Delta p_k \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta \tilde{p}_k$$



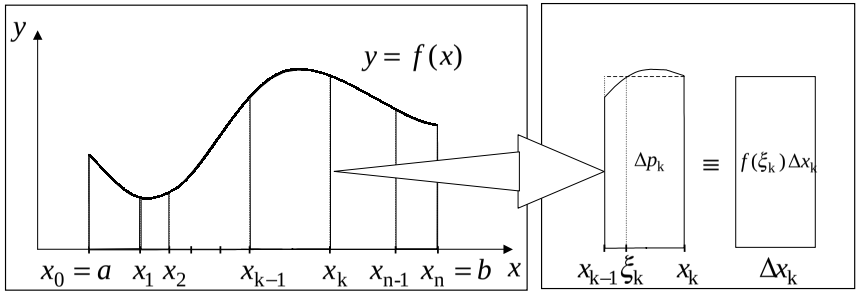
Primerno izbiro ustvarimo z razdelitvijo intervala $[a,b]$na n podintervalov $[x_{k-1}, x_k]$, širine Δx_k.

Ploščino Δp_k, ki je po velikosti enaka ploščini ekvivalentnega pravokotnika z višino $f(\xi_k)$, lahko sicer zapišemo v obliki:

$$\Delta p_k = f(\xi_k)\Delta x_k \quad ; \quad x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$$

a je žal lega točke $x = \xi_k$ le izjemoma enostavno določljiva. Zato se bo aproksimacija ploščine $\Delta \tilde{p}_k$ praviloma razlikovala od točne vrednosti Δp_k, vendar bo med njima v primeru konsistentne aproksimacije morala veljati zakonitost:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} (\Delta \tilde{p}_k - \Delta p_k) = 0$$

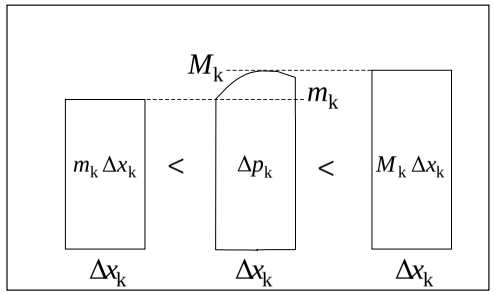


Konsistentnost aproksimacije ploščine $\Delta\tilde{p}_k$ lahko zagotovimo s spoštovanjem ocene, zasnovane na ekstremalnih vrednostih, ki jih funkcija v tem podintervalu prejme:

$$m_k \Delta x_k \le \Delta\tilde{p}_k = f(x)\Delta x_k \le M_k \Delta x_k \quad ; \quad x_{k-1} \le x \le x_k$$

pri čemer torej velja:

$$m_k = \min\{f(x)\} \quad , \quad M_k = \max\{f(x)\} \quad ; \quad x_{k-1} \le x \le x_k$$



Da ima tako zasnovana aproksimacija zahtevano lastnost:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} (\Delta\tilde{p}_k - \Delta p_k) = 0$$

sledi iz lastnosti ocenjenih soodvisnosti v primeru limitnega prehoda $\Delta x_k \to 0$:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} (m_k \Delta x_k) = \Delta\tilde{p}_k = f(x)\Delta x_k = \lim_{\Delta x_k \to 0} (M_k \Delta x_k) \quad ; \quad x_{k-1} \le x \le x_k$$

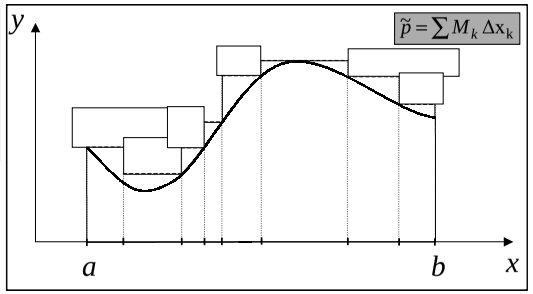
Iz analize je torej moč razbrati, da lahko natančnost aproksimativne rešitve $\Delta\tilde{p}_k$ oz. njeno odstopanje od ekzaktne rešitve Δp_k prilagajamo z izbiro velikosti širine podintervala Δx_k .

Seveda pa na samo kvaliteto aproksimacije bistveno vpliva tudi ocena približka, ki jo podaja računska formula za izvrednotenje ploščine. Glede na stopnjo poznavanja funkcijskega obnašanja, bi lahko uporabili formule:

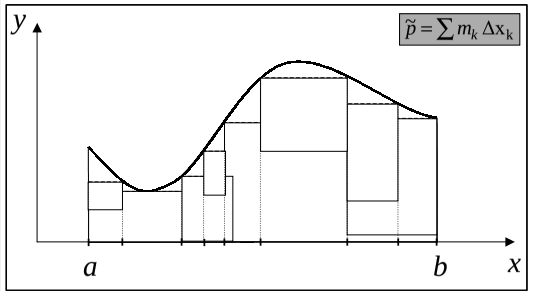
$$\Delta\tilde{p}_k \in \left\{ m_k \Delta x_k, M_k \Delta x_k, \left(\frac{m_k + M_k}{2}\right)\Delta x_k, f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)\Delta x_k, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\Delta x_k, \ldots \right\}$$

Ugotovitve, ki smo jih izvedli za aproksimacijo ploščine lika, ki je pripadel podintervalu Δx_k, veljajo tudi za aproksimacijo celotne ploščine:

$$p \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta\tilde{p}_k$$



pri čemer velja še posebej poudariti, da je natančnost aproksimacije celotne ploščine lika pogojena z natančnostjo aproksimacij posameznih ploščin podintervalov. Le-to pa uravnavamo s pravilno izbiro širine podintervalov ter uporabljenih funkcijskih predpisov.



V splošnem bi sicer lahko vztrajali na tem, da gredo širine vseh podintervalov proti 0, po drugi strani pa vemo, da je lik, ki ga omejuje daljica, nesmotrno deliti na manjše podintervale, saj izračun njegove ploščine ni podvržen aproksimacijski napaki.

KAKŠNE ZNAČILNOSTI APROKSIMATIVNEGA REŠEVANJA LAHKO RAZBEREMO IZ OBRAVNAVE DANEGA PRIMERA ?

PROSTORSKA DISKRETIZACIJA –
Razdelitev definicijskega intervala na podintervale Δx_k

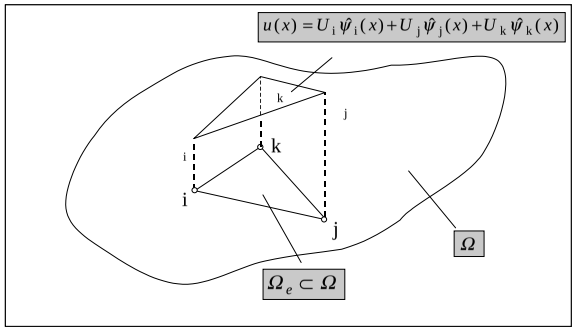
IZBIRA APROKSIMACIJSKEGA ZAKONA na območju podintervala –
Izbira formule za aproksimativni izračun ploščine $\Delta\tilde{p}_k$

IZRAČUN PLOŠČINE NA OBMOČJU PODINTERVALA –
Izračun ploščine $\Delta\tilde{p}_k$ v skladu z izbranim aproksimacijskim zakonom

IZRAČUN CELOTNE PLOŠČINE Z UPOŠTEVANJEM PRISPEVKOV VSEH PODINTERVALOV $\equiv$ REŠITEV –
Izračun ploščine $\tilde{p} = \sum_{k=1}^{n} \Delta\tilde{p}_k$ z upoštevanjem prispevkov vseh podintervalov.

METODA KONČNIH ELEMENTOV

Osnovni gradnik pri MKE je t.i. *končni element*, ki zaseda podobmočje Ω_e v celotnem območju Ω. Na območju končnega elementa izvedemo osnovno aproksimacijo primarnih spremenljivk problema v odvisnosti od končnega nabora diskretnih vrednosti primarne spremenljivke v karakterističnih točkah končnega elementa, imenovanih *vozlišča*.



Na osnovi izbrane aproksimacije:

$$\hat{u} = u_e(x) = \sum_{k=1}^{N_e} U_k^e \hat{\psi}_k^e(x) \; ; \; x \in \Omega_e$$

izpeljemo v nadaljevanju, v skladu z Galerkinovo metodo, aplicirano na šibki obliki integralske formulacije, osnovne zakonitosti, ki veljajo med vrednostmi primarnih ter sekundarnih spremenljivk v vozliščih končnega elementa.

Izpolnitev šibke oblike integralske formulacije na območju končnega elementa:

$$\int_{\Omega_e} [\left(A_u^{(m)} u_e\right)\left(A_v^{(m)} v_k\right) - f v_k] d\Omega = \int_{\Gamma_e} \left(B_u^{(1)} u_e\right)\left(C_v^{(1)} v_k\right) d\Gamma \quad ; \; k = 1,2,\ldots,N_e$$

vodi ob privzeti aproksimaciji $u_e(x)$ ter izbranem naboru funkcij $v_k(x)$:

$$v_k = \hat{\psi}_k^e(x) \; ; \; k = 1,2,\ldots,N_e$$

do sistema enačb :

$$\int_{\Omega_e} [\left(A_u^{(m)} u_e\right)\left(A_v^{(m)} \hat{\psi}_k^e\right) - f \hat{\psi}_k^e] d\Omega = \int_{\Gamma_e} \left(B_u^{(1)} u_e\right)\left(C_v^{(1)} \hat{\psi}_k^e\right) d\Gamma \quad ; \quad k = 1,2,\ldots,N_e$$

ki ga lahko simbolično zapišemo v matrični obliki kot ENAČBO KONČNEGA ELEMENTA:

$$K_e U_e = F_e$$

kjer so posamezne matrike definirane kot sledi:

$$K_e = \left[K_{ij}^e\right] \; , \; K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \left(A_u^{(m)} \hat{\psi}_j^e\right)\left(A_v^{(m)} \hat{\psi}_i^e\right) d\Omega$$

$$U_e = \left\{U_i^e\right\}$$

$$F_e = \left\{F_i^e\right\} \; , \; F_i^e = \int_{\Gamma_e} \left(B_u^{(1)} u_e\right)\left(C_v^{(1)} \hat{\psi}_i^e\right) d\Gamma + \int_{\Omega_e} f \hat{\psi}_i^e \, d\Omega$$

V vektorju $_e$ se nahajajo vozliščne vrednosti primarne spremenljivke, medtem ko se v vektorju F_e nahajajo vozliščne vrednosti sekundarne spremenljivke.

Iz predhodnih analiz fizikalnih problemov, ki so bili definirani preko več območij, vemo, da izkazujejo primarne kot sekundarne spremenljivke ob prehodu iz enega podobmočja v drugo določene lastnosti, ki smo jih sicer poimenovali lastnosti konsistentnega prehoda. Skladno s tem prehajajo primarne spremenljivke zvezno, sekundarne pa v skladu z morebitnimi s prehodom pogojenimi spremembami v parametrih sistema.

Vozliščne vrednosti primarne spremenljivke $_e$ na končnem elementu Ω_e so v bistvu podmnožica množice vseh vozliščnih vrednosti primarne spremenljivke na celotnem območju Ω :

$$U_e \subset U \quad , \quad U = \bigcup_{\cup e} (U_e)$$

ENAČBO KONČNEGA ELEMENTA lahko tedaj izrazimo v odvisnosti od vseh primarnih spremenljivk:

$$K_e U_e = F_e \quad \rightarrow \quad K_e^* U = F_e^*$$

kjer sta matrika K_e^* in vektor F_e^* ustrezno z ničlami razširjena matrika K_e in vektor F_e.

Algebrajsko seštetje enačb končnega elementa za celotno množico elementov $\cup_e$ da rezultirajoči sistem enačb, ki je splošne oblike:

$$\mathcal{K}U = \mathcal{F}$$

pri čemer sta:

$$\mathcal{K} = \sum_{\cup e} K_e^* \quad , \quad \mathcal{F} = \sum_{\cup e} F_e^*$$

Z upoštevanjem robnih pogojev problema je enačbo problema $\mathcal{K}U = \mathcal{F}$ mogoče enolično rešiti ter s tem določiti neznane vozliščne vrednosti primarne spremenljivke.

ANALOGIJA MED POSTOPKOM, UPORABLJENIM PRI REŠEVANJU PLOŠČINE LIKA, IN POSTOPKOM, UPORABLJENIM V MKE

PROSTORSKA DISKRETIZACIJA –
Razdelitev definicijskega intervala na podintervale Δx_k

Razdelitev definicijskega območja na podobmočja – končne elemente Ω_e

IZBIRA APROKSIMACIJSKEGA ZAKONA na območju podintervala –
Izbira formule za aproksimativni izračun ploščine $\Delta\tilde{p}_k$

Izbira funkcijske aproksimacije primarnih fizikalnih spremenljivk $\hat{u}_e(x)$ na območju končnega elementa Ω_e

IZRAČUN PLOŠČINE NA OBMOČJU PODINTERVALA –
Izračun ploščine $\Delta\tilde{p}_k$ v skladu z izbranim aproksimacijskim zakonom

Formiranje enačbe končnega elementa $K_e U_e = F_e$ na osnovi Galerkinove obravnave šibke oblike variacijske integralske formulacije.

IZRAČUN CELOTNE PLOŠČINE Z UPOŠTEVANJEM PRISPEVKOV VSEH PODINTERVALOV –
Izračun ploščine $\tilde{p} = \sum_{k=1}^{n} \Delta\tilde{p}_k$ z upoštevanjem prispevkov vseh podintervalov.

Formiranje enačbe problema $\sum_{\cup e}(K_e U_e) = \sum_{\cup e} F_e$

REŠITEV –
Izvrednotenje ploščine po izbrani formuli.

Rešitev sistema enačb $\sum_{\cup e}(K_e U_e) = \sum_{\cup e} F_e$ ob upoštevanju robnih pogojev problema.

PRIMER XIII.2:

Veliko enodimenzionalnih fizikalnih problemov popisuje diferencialna enačba drugega reda:

$$\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = -f \quad , \quad x \in [0, L]$$

s pripadajočimi bistvenimi in naravnimi pogoji, ki predpisujejo vrednosti primarnih in sekundarnih spremenljivk na ograji, t.j. v krajiščih $x = 0$ in $x = L$. Pri tem se primarna in sekundarna spremenljivka izraža kot:

PRIMARNA SPREMENLJIVKA $\rightarrow$ $u(x)$

SEKUNDARNA SPREMENLJIVKA $\rightarrow$ $a\dfrac{du}{dx} = P(x)$

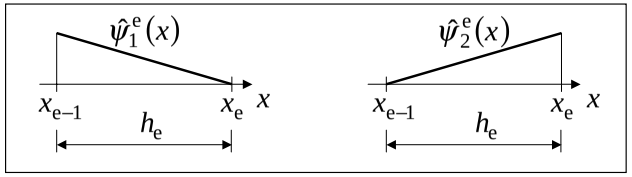
Izpeljimo enačbo končnega elementa ob predpostavljeni linearni aproksimaciji osnovne spremenljivke $u(x)$.

Obravnavamo podinterval $\Omega_e = [x_{e-1}, x_e]$ dolžine h_e, v katerem aproksimiramo potek primarne spremenljivke linearno:

$$\hat{u} = u_e(x) = \sum_{k=1}^{2} U_k^e \hat{\psi}_k^e(x) \; ; \; x \in \Omega_e = [x_{e-1}, x_e]$$

z $_1^e, U_2^e$ kot vozliščnima vrednostima primarne spremenljivke v krajiščih ter *oblikovnima* (aproksimacijskima) funkcijama $\hat{\psi}_1^e(x), \hat{\psi}_2^e(x)$:

$$\hat{\psi}_1^e(x) = 1 - \frac{x - x_{e-1}}{h_e} \quad , \quad \hat{\psi}_2^e(x) = \frac{x - x_{e-1}}{h_e} \quad ; \quad x \in [x_{e-1}, x_e]$$



Enačba končnega elementa sledi iz sistema enačb, dobljenega na osnovi šibke oblike variacijske formulacije ter ob uporabi Galerkinovega pristopa:

$$J_{(m)}\left(u_e, \hat{\psi}_1^e\right) = \int_{x_{e-1}}^{x_e} \left[\left(a \frac{d}{dx}\left(U_1^e \hat{\psi}_1^e + U_2^e \hat{\psi}_2^e\right)\right) \frac{d\hat{\psi}_1^e}{dx} - f(x)\hat{\psi}_1^e \right] dx - \\ - P^e(x_e)\hat{\psi}_1^e(x_e) + P^e(x_{e-1})\hat{\psi}_1^e(x_{e-1}) = 0$$

$$J_{(m)}\left(u_e, \hat{\psi}_2^e\right) = \int_{x_{e-1}}^{x_e} \left[\left(a \frac{d}{dx}\left(U_1^e \hat{\psi}_1^e + U_2^e \hat{\psi}_2^e\right)\right) \frac{d\hat{\psi}_2^e}{dx} - f(x)\hat{\psi}_2^e \right] dx - \\ - P^e(x_e)\hat{\psi}_2^e(x_e) + P^e(x_{e-1})\hat{\psi}_2^e(x_{e-1}) = 0$$

kar da:

$$K_e U_e = F_e \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{Bmatrix}$$

pri čemer so matrični koeficienti $K_{11}^e, K_{12}^e, F_1^e, K_{21}^e, K_{22}^e, F_2^e$:

$$K_{11}^e = \int_{x_{e-1}}^{x_e} \left[\left(a \frac{d\hat{\psi}_1^e}{dx} \right) \frac{d\hat{\psi}_1^e}{dx} \right] dx \quad , \quad K_{21}^e = \int_{x_{e-1}}^{x_e} \left[\left(a \frac{d\hat{\psi}_1^e}{dx} \right) \frac{d\hat{\psi}_2^e}{dx} \right] dx$$

$$K_{12}^e = \int_{x_{e-1}}^{x_e} \left[\left(a \frac{d\hat{\psi}_2^e}{dx} \right) \frac{d\hat{\psi}_1^e}{dx} \right] dx \quad , \quad K_{22}^e = \int_{x_{e-1}}^{x_e} \left[\left(a \frac{d\hat{\psi}_2^e}{dx} \right) \frac{d\hat{\psi}_2^e}{dx} \right] dx$$

$$F_1^e = \int_{x_{e-1}}^{x_e} f(x)\hat{\psi}_1^e \, dx - P_1^e \quad , \quad F_2^e = \int_{x_{e-1}}^{x_e} f(x)\hat{\psi}_2^e \, dx + P_2^e$$

Analogno oznakam vozliščnih vrednosti primarne spremenljivke $_1^e, U_2^e$ smo vpeljali oznaki P_1^e, P_2^e za vozliščni vrednosti sekundarne spremenljivke $P(x)$:

$$P_1^e = P^e(x_{e-1}) = \left(a \frac{du}{dx} \right)_{x = x_{e-1}} \quad , \quad P_2^e = P^e(x_e) = \left(a \frac{du}{dx} \right)_{x = x_e}$$

Če nadalje predpostavimo, da se parameter $a = a_e$ vzdolž elementa ne spreminja, sledi:

$$K_{11}^e = \frac{a_e}{h_e} \quad , \quad K_{21}^e = K_{12}^e = -\frac{a_e}{h_e} \quad , \quad K_{22}^e = \frac{a_e}{h_e}$$

$$F_1^e = f_1^e - P_1^e \quad , \quad F_2^e = f_2^e + P_2^e$$

pri čemer sta f_1^e, f_2^e povsem določena s funkcijo $f(x)$ ter oblikovnima funkcijama $\hat{\psi}_1^e(x), \hat{\psi}_2^e(x)$:

$$f_1^e = \int_{x_{e-1}}^{x_e} f(x)\hat{\psi}_1^e \, dx \quad , \quad f_2^e = \int_{x_{e-1}}^{x_e} f(x)\hat{\psi}_2^e \, dx$$

Eksplicitno zapišemo enačbo končnega elementa kot:

$$\frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{x_{e-1}}^{x_e} f(x)\hat{\psi}_1^e \, dx \\ \int_{x_{e-1}}^{x_e} f(x)\hat{\psi}_2^e \, dx \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P_1^e \\ P_2^e \end{Bmatrix}$$

Posamezni deli enačbe končnega elementa za obravnavano diferencialno enačbo in linearno aproksimacijo primarne spremenljivke so:

Enačba končnega elementa:	$K_e U_e = F_e$
Vektor vozliščnih vrednosti primarne spremenljivke:	$U_e = \{U_1^e \quad U_2^e\}^T$
Vektor vozliščnih vrednosti obremenitev:	$F_e = \{F_1^e \quad F_2^e\}^T \quad ; \quad F_e = f_e + P_e$
Togostna matrika elementa:	$K_e = \frac{a_e}{h_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
Vektor vozliščnih vrednosti sekundarne spremenljivke:	$P_e = \{-P_1^e \quad P_2^e\}^T$
Vektor vozliščnih vrednosti območne obremenitve:	$f_e = \left\{ \int_{x_{e-1}}^{x_e} f(x)\hat{\psi}_1^e\,dx \quad \int_{x_{e-1}}^{x_e} f(x)\hat{\psi}_2^e\,dx \right\}^T$

Z izpeljano enačbo končnega elementa rešujemo probleme, katerih vodilna območna enačba je diferencialna enačba:

$$\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = -f \quad , \quad x \in [0, L]$$

Dva pomembna tehniška problema, ki ju obravnavamo v tem kontekstu, sta:

STATIKA ENOOSNEGA ELEMENTA

$u \rightarrow$ primarna spr.
pomik - u

$a\frac{du}{dx} \rightarrow$ sekundarna spr.
osna sila - N

$a = EA$

$f(x) = n(x)$

STACIONARNI PREVOD TOPLOTE V ENOOSNEM ELEMENTU

$u \rightarrow$ primarna spr.
temperatura - T

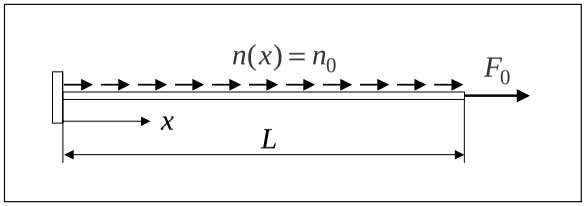
$-a\frac{du}{dx} \rightarrow$ sekundarna spr.
toplotni tok - q

$a = k$

$f(x) = q_V(x)$

PRIMER XIII.3:

Izpeljano enačbo končnega elementa bomo uporabili pri analizi že obravnavanega primera XII.2.



Privzeli bomo, da je mogoče z enim samim končnim elementom z linearno aproksimacijo osnovne spremenljivke zadovoljivo popisati obravnavani problem. Tedaj velja splošna enačba:

$$\frac{a_e}{h_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{x_{e-1}}^{x_e} f(x)\hat{\psi}_1^e\,dx \\ \int_{x_{e-1}}^{x_e} f(x)\hat{\psi}_2^e\,dx \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P_1^e \\ P_2^e \end{Bmatrix}$$

Priredimo najprej splošne parametre obravnavanemu statičnemu problemu:

$$a_e = EA \quad , \quad h_e = L \quad , \quad x_{e-1} = 0 \quad , \quad x_e = L \quad , \quad f(x) = n_0$$

$$\hat{\psi}_1^e(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad , \quad \hat{\psi}_2^e(x) = \frac{x}{L}$$

$$P_1^e = \left(EA\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = N(0) \quad , \quad P_2^e = \left(EA\frac{du}{dx}\right)_{x=L} = N(L)$$

nakar še izvrednotimo vozliščne prispevke po elementu porazdeljene obtežbe:

$$f_1^e = \int_0^L n_0\hat{\psi}_1^e\,dx = \frac{n_0 L}{2} \quad , \quad f_2^e = \int_0^L n_0\hat{\psi}_2^e\,dx = \frac{n_0 L}{2}$$

Enačba končnega elementa je tedaj:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \end{Bmatrix} = \frac{n_0 L}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P_1^e \\ P_2^e \end{Bmatrix}$$

V matrični enačbi elementa se pojavljajo štiri vozliščne vrednosti: dve za primarno spremenljivko $_1^{\mathrm{e}}, U_2^{\mathrm{e}}$ ter dve za sekundarno spremenljivko $P_1^{\mathrm{e}}, P_2^{\mathrm{e}}$, oboje kot robne vrednosti našega problema. Glede na konjugiranost primarnih in sekundarnih spremenljivk sta dve veličini na robu poznani, dve pa neznani. Za obravnavani primer je poznano:

$$_1^{\mathrm{e}} = 0 \quad , \quad P_2^{\mathrm{e}} = F_0$$

Preostali dve veličini $P_1^{\mathrm{e}}, U_2^{\mathrm{e}}$ sta neznani in ju je mogoče določiti iz enačbe končnega elementa, ki predstavlja sistem dveh linearnih enačb:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1^{\mathrm{e}} \\ U_2^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix} = \frac{n_0 L}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P_1^{\mathrm{e}} \\ P_2^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix}$$

Najprej iz druge enačbe, ki vsebuje eno samo neznanko $_2^{\mathrm{e}}$, določimo velikost lete, nakar iz prve določimo še preostalo neznanko P_1^{e}. Ob upoštevanju zveze med kontinuirno in točkovno obtežbo dobimo:

$$_2^{\mathrm{e}} = \frac{3F_0 L}{2EA} \quad , \quad P_1^{\mathrm{e}} = 2F_0$$

Glede na izračunano vrednost premika prostega konca $_2^{\mathrm{e}}$ je spreminjanje pomika $\hat{u}(x)$ vzdolž elementa dano s funkcijskim predpisom:

$$\hat{u}(x) = \frac{3F_0 L}{2EA}\left(\frac{x}{L}\right) \quad , \quad x \in [0, L]$$

kar seveda ni ekzaktna rešitev. Posledično tudi spreminjanje osne sile $\hat{N}(x)$ odstopa od ekzaktnega:

$$\hat{N}(x) = EA\frac{d\hat{u}(x)}{dx} = \frac{3F_0}{2} \quad , \quad x \in [0, L]$$

Je pa zanimivo, da je P_1^{e}, ki je v bistvu enaka osni sili na mestu vpetja, po velikosti pravilno določena. Po drugi strani pa je v danem primeru P_1^{e} tudi reakcijska sila v podpori, katere velikosti ne dobimo na osnovi odvajanja aproksimacijske rešitve $\hat{u}(x)$, marveč neposredno iz enačbe končnega elementa, ki jo lahko razumemo tudi kot enačbo statičnega ravnotežja zunanjih sil, vključno z reakcijskimi silami.

Na tem mestu se povrnimo k primeru XII.2.a, kjer smo osnovno enačbo oblike:

$$\begin{bmatrix} K_{10} & K_{11} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \{F_1\}$$

v primeru aproksimacijskega reševanja s šibko obliko variacijske formulacije razširili v sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} K_{00} & K_{01} \\ K_{10} & K_{11} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{Bmatrix}$$

Primerjava z enačbo končnega elementa v pravkar obravnavanem primeru:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1^{\mathrm{e}} \\ U_2^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix} = \frac{n_0 L}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P_1^{\mathrm{e}} \\ P_2^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix}$$

ter upoštevanju $c_0 = U_1^{\mathrm{e}}, c_1 = U_2^{\mathrm{e}}$ evidentno razkrije fizikalno utemeljenost ter soodvisnosti v prvi enačbi razširjenega sistema.

PRIMER XIII.4:

Za analizirani splošni enodimenzionalni problem, katerega enačbo končnega elementa popisuje matrična enačba:

$$\frac{a_{\mathrm{e}}}{h_{\mathrm{e}}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1^{\mathrm{e}} \\ U_2^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{x_{\mathrm{e-1}}}^{x_{\mathrm{e}}} f(x)\hat{\psi}_1^{\mathrm{e}}\,dx \\ \int_{x_{\mathrm{e-1}}}^{x_{\mathrm{e}}} f(x)\hat{\psi}_2^{\mathrm{e}}\,dx \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P_1^{\mathrm{e}} \\ P_2^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix}$$

razdelajmo pogoje, ki jih dva sosednja elementa izkazujeta na skupni meji.

Dva sosednja elementa sta definirana z območjema $\Omega_{\mathrm{e}} = [x_{\mathrm{e-1}}, x_{\mathrm{e}}]$ in $\Omega_{\mathrm{e+1}} = [x_{\mathrm{e}}, x_{\mathrm{e+1}}]$, ki imata skupno točko pri $x = x_{\mathrm{e}}$. Njuni enačbi sta formalno:

$$K_{\mathrm{e}} U_{\mathrm{e}} = F_{\mathrm{e}}$$
$$K_{\mathrm{e+1}} U_{\mathrm{e+1}} = F_{\mathrm{e+1}}$$

oz. strukturirano:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{\mathrm{e}} & K_{12}^{\mathrm{e}} \\ K_{21}^{\mathrm{e}} & K_{22}^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{\mathrm{e}} \\ U_2^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{\mathrm{e}} \\ F_2^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} K_{11}^{\mathrm{e+1}} & K_{12}^{\mathrm{e+1}} \\ K_{21}^{\mathrm{e+1}} & K_{22}^{\mathrm{e+1}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{\mathrm{e+1}} \\ U_2^{\mathrm{e+1}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{\mathrm{e+1}} \\ F_2^{\mathrm{e+1}} \end{Bmatrix}$$

Zaradi zveznosti primarne spremenljivke $u(x)$ velja na meji med obema elementoma:

$$U_2^{\mathrm{e}} = U_1^{\mathrm{e+1}} = U_{\mathrm{E}}$$

Nadalje seštejmo drugo enačbo iz prvega sistema - Ω_{e} ter prvo enačbo iz drugega sistema - $\Omega_{\mathrm{e+1}}$, kar da:

$$K_{21}^{\mathrm{e}} U_1^{\mathrm{e}} + \left(K_{22}^{\mathrm{e}} + K_{11}^{\mathrm{e+1}}\right) U_{\mathrm{E}} + K_{12}^{\mathrm{e+1}} U_2^{\mathrm{e+1}} = F_2^{\mathrm{e}} + F_1^{\mathrm{e+1}}$$

Desno stran enačbe zapišimo strukturirano glede na obremenitvene prispevke:

$$F_2^{\mathrm{e}} + F_1^{\mathrm{e+1}} = \int_{x_{\mathrm{e-1}}}^{x_{\mathrm{e}}} f(x) \hat{\psi}_2^{\mathrm{e}}\, dx + \int_{x_{\mathrm{e}}}^{x_{\mathrm{e+1}}} f(x) \hat{\psi}_1^{\mathrm{e+1}}\, dx + P_2^{\mathrm{e}} - P_1^{\mathrm{e+1}}$$

Medtem ko sta prva dva v integralski obliki zapisana sumanda določena na osnovi dane funkcije $f(x)$ ter oblikovnih funkcij $\hat{\psi}_1^{\mathrm{e+1}}(x), \hat{\psi}_2^{\mathrm{e}}(x)$ skriva zadnji del izredno pomembno lastnost. Velja namreč:

$$P_2^{\mathrm{e}} - P_1^{\mathrm{e+1}} = \left(a \frac{du}{dx} \right)^{\mathrm{e}} \Bigg|_{x=x_{\mathrm{e}}} - \left(a \frac{du}{dx} \right)^{\mathrm{e+1}} \Bigg|_{x=x_{\mathrm{e}}} = \left\langle a \frac{du}{dx} \right\rangle_{x=x_{\mathrm{e}}}$$

kar predstavlja nezveznost sekundarne spremenljivke na meji med elementoma pri $x = x_{\mathrm{e}}$, skladno z že obravnavanimi pogoji konsistentnosti prehoda. Ta podatek v nobenem primeru ni odvisen od stopnje aproksimacije in je izključno pogojen z naravo obravnavanega primera.

Glede na to, da se obravnavana diskusija nanaša na vozlišče, katerega primarno spremenljivko smo označili z $_{\mathrm{E}}$ vpeljimo še označbo:

$$P_2^{\mathrm{e}} - P_1^{\mathrm{e+1}} = \left\langle a \frac{du}{dx} \right\rangle_{x=x_{\mathrm{e}}} = P_{\mathrm{E}}$$

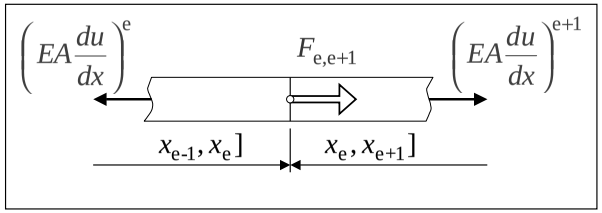
V nadaljevanju opredelimo razliko $P_2^{\mathrm{e}} - P_1^{\mathrm{e+1}}$ za analizirana tehniška problema, pri čemer izhajamo iz pogoja konsistentnosti prehoda sekundarne spremenljivke.

STATIKA ENOOSNEGA ELEMENTA

Pogoj konsistentnosti prehoda smo v statični analizi enoosnega elementa zapisali kot:

$$\left(EA \frac{du}{dx} \right)^{\mathrm{e}} \Bigg|_{x=x_{\mathrm{e}}} - \left(EA \frac{du}{dx} \right)^{\mathrm{e+1}} \Bigg|_{x=x_{\mathrm{e}}} = F_{\mathrm{e,e+1}}$$

kjer je $F_{\mathrm{e,e+1}}$ točkovna sila na meji med elementoma.



Razliko $P_2^{\mathrm{e}} - P_1^{\mathrm{e+1}}$ tedaj zapišemo kot:

$$P_{\mathrm{E}} = P_2^{\mathrm{e}} - P_1^{\mathrm{e+1}} = F_{\mathrm{e,e+1}}$$

STACIONARNI PREVOD TOPLOTE V ENOOSNEM ELEMENTU

Pogoj konsistentnosti prehoda smo v analizi prevoda toplote, pri čemer ne upoštevamo morebitne generacije ali izgube toplote na meji med dvema elementoma, zapisali kot:

$$\left(k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1} \right) = -\left(k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n_2} \right) \quad ; \quad x \in \Gamma_{1,2}$$

Upoštevajoč enodimenzionalnost obravnavanega primera ter odvisnost:

$$\frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial n_2} = \frac{d}{dx}$$

sledi razlika $P_2^{\mathrm{e}} - P_1^{\mathrm{e+1}}$:

$$P_{\mathrm{E}} = P_2^{\mathrm{e}} - P_1^{\mathrm{e+1}} = \left(k \frac{dT}{dx} \right)^{\mathrm{e}} \Bigg|_{x=x_{\mathrm{e}}} - \left(k \frac{dT}{dx} \right)^{\mathrm{e+1}} \Bigg|_{x=x_{\mathrm{e}}} = 0$$

PRIMER XIII.5:

Za analizirani enodimenzionalni problem, definiran na intervalu $\Omega = [x_0, x_{N_e}]$ in diskretiziran na N_e končnih elementov, obravnavajmo tvorjenje sistema enačb po metodologiji MKE, pri čemer popisuje enačbo končnega elementa $\Omega_e = [x_{e-1}, x_e]$ matrična enačba:

$$\frac{a_e}{h_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{x_{e-1}}^{x_e} f(x)\hat{\psi}_1^e\, dx \\ \int_{x_{e-1}}^{x_e} f(x)\hat{\psi}_2^e\, dx \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P_1^e \\ P_2^e \end{Bmatrix}$$

Rešitev predstavlja množica vrednosti primarne spremenljivke $\hat{u}(x_k) = U_k$ v vozliščnih točkah končnih elementov.

Da bi prišli do sistema enačb, ki rešujejo obravnavani problem, postopamo na naslednji način. V skladu z diskretizacijo območja Ω na končne elemente Ω_e za vsak končni element tvorimo enačbo elementa, izraženo z *lokalnimi* primarnimi spremenljivkami $_1^e, U_2^e$ in sekundarnimi spremenljivkami P_1^e, P_2^e:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P_1^e \\ P_2^e \end{Bmatrix} \quad ; \quad e = 1,2,\ldots,N_e$$

Vozliščne vrednosti primarne spremenljivke $_e$ na končnem elementu Ω_e so v bistvu podmnožica množice vseh vozliščnih vrednosti primarne spremenljivke na celotnem območju Ω, ki jih v nadaljevanju poimenujmo *globalne* spremenljivke:

$$U_e \subset U \quad , \quad U = \bigcup_{\cup e}(U_e) = \{U_0, U_1, \ldots, U_{E-1}, U_E, U_{E+1}, \ldots, U_{N_e}\}^T$$

tako da lahko enačbo končnega elementa izrazimo v odvisnosti od vseh globalnih primarnih spremenljivk:

$$K_e U_e = F_e \quad \rightarrow \quad K_e^* U = F_e^*$$

Zgradba posameznih deležev v razširjeni enačbi končnega elementa je:

$$K_e^* = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & K_{11}^e & K_{12}^e & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & K_{21}^e & K_{22}^e & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_e^* = f_e^* + P_e^*$$

$$f_e^* = \{0 \ \ldots \ 0 \quad f_1^e \quad f_2^e \quad 0 \ \ldots \ 0\}^T$$

$$P_e^* = \{0 \ \ldots \ 0 \quad -P_1^e \quad P_2^e \quad 0 \ \ldots \ 0\}^T$$

Algebrajsko seštetje razširjenih enačb končnega elementa, izraženih z globalnimi primarnimi spremenljivkami , za celotno množico elementov $\cup_e$ da rezultirajoči sistem enačb – ENAČBO PROBLEMA, ki jo zapišemo v splošni obliki:

$$\mathcal{K} U = \mathcal{F}$$

kjer sta:

$$\mathcal{K} = \sum_{\cup e} K_e^* \quad , \quad \mathcal{F} = \sum_{\cup e} F_e^* = \sum_{\cup e}\left(f_e^* + P_e^*\right) = \mathcal{F}_f + \mathcal{F}_P$$

Glede na oštevilčenje globalne primarne spremenljivke strukturiramo celotno matrično enačbo problema:

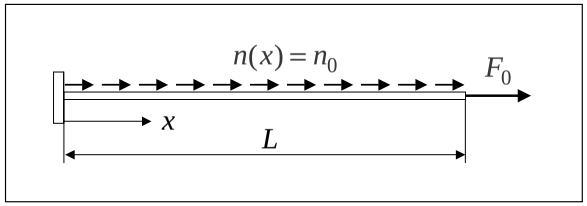
$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} K_{0\,0} & K_{0\,1} & \ldots & K_{0\,E-1} & K_{0\,E} & K_{0\,E+1} & \ldots & K_{0\,N_e} \\ K_{1\,0} & K_{1\,1} & \ldots & K_{1\,E-1} & K_{1\,E} & K_{1\,E+1} & \ldots & K_{1\,N_e} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{E-1\,0} & K_{E-1\,1} & \ldots & K_{E-1\,E-1} & K_{E-1\,E} & K_{E-1\,E+1} & \ldots & K_{E-1\,N_e} \\ K_{E\,0} & K_{E\,1} & \ldots & K_{E\,E-1} & K_{E\,E} & K_{E\,E+1} & \ldots & K_{E\,N_e} \\ K_{E+1\,0} & K_{E+1\,1} & \ldots & K_{E+1\,E-1} & K_{E+1\,E} & K_{E+1\,E+1} & \ldots & K_{E+1\,N_e} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{N_e\,0} & K_{N_e\,1} & \ldots & K_{N_e\,E-1} & K_{N_e\,E} & K_{N_e\,E+1} & \ldots & K_{N_e\,N_e} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_f = \{f_0, f_1, \ldots, f_{E-1}, f_E, f_{E+1}, \ldots, f_{N_e}\}^T$$

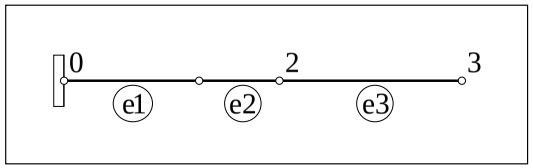
$$\mathcal{F}_P = \{P_0, P_1, \ldots, P_{E-1}, P_E, P_{E+1}, \ldots, P_{N_e}\}^T$$

PRIMER XIII.6:

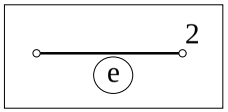
Izvedimo enačbo problema za obravnavani primer XIII.1, če razdelimo interval na $N_e = 3$ elemente.



Elemente ter vozlišča oštevilčimo kot prikazuje slika:



Enačbe posameznih končnih elementov zapišemo na osnovi lokalnih spremenljivk:



Element 1:

$$\frac{E_1A_1}{h_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P_1^1 \\ P_2^1 \end{Bmatrix}$$

Element 2:

$$\frac{E_2A_2}{h_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P_1^2 \\ P_2^2 \end{Bmatrix}$$

Element 3:

$$\frac{E_3A_3}{h_3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P_1^3 \\ P_2^3 \end{Bmatrix}$$

Glede na povezavo lokalnih spremenljivk na posameznem elementu z globalnimi spremenljivkami:

$$U_1^1 = U_0 \;,\; U_2^1 = U_1^2 = U_1 \;,\; U_2^2 = U_1^3 = U_2 \;,\; U_2^3 = U_3$$

enačbe končnih elementov razširimo:

Element 1:

$$\begin{bmatrix} \frac{E_1A_1}{h_1} & -\frac{E_1A_1}{h_1} & 0 & 0 \\ -\frac{E_1A_1}{h_1} & \frac{E_1A_1}{h_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P_1^1 \\ P_2^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Element 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_2A_2}{h_2} & -\frac{E_2A_2}{h_2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_2A_2}{h_2} & \frac{E_2A_2}{h_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -P_1^2 \\ P_2^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Element 3:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_3A_3}{h_3} & -\frac{E_3A_3}{h_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3A_3}{h_3} & \frac{E_3A_3}{h_3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^3 \\ f_2^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P_1^3 \\ P_2^3 \end{Bmatrix}$$

Da bi dobili enačbo problema, t.j. sistem enačb z diskretnimi spremenljivkami, seštejemo razširjene enačbe končnih elementov, izraženih z globalnimi primarnimi spremenljivkami. Rezultirajoča enačba:

$$\mathcal{K}U = \mathcal{F} \quad , \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_f + \mathcal{F}_P$$

je eksplicitno po posameznih sestavnih delih:

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \frac{E_1A_1}{h_1} & -\frac{E_1A_1}{h_1} & 0 & 0 \\ -\frac{E_1A_1}{h_1} & \frac{E_1A_1}{h_1}+\frac{E_2A_2}{h_2} & -\frac{E_2A_2}{h_2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_2A_2}{h_2} & \frac{E_2A_2}{h_2}+\frac{E_3A_3}{h_3} & -\frac{E_3A_3}{h_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3A_3}{h_3} & \frac{E_3A_3}{h_3} \end{bmatrix}$$

$$= \{U_0, U_1, U_2, U_3\}^T$$

$$\mathcal{F}_f = \left\{ f_1^1, f_2^1 + f_1^2, f_2^2 + f_1^3, f_2^3 \right\}^T$$

$$\mathcal{F}_P = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}^T = \left\{ -P_1^1, P_2^1 - P_1^2, P_2^2 - P_1^3, P_2^3 \right\}^T$$

Če privzamemo ekvidistantno delitev ter upoštevamo konstantnost prečnega prereza in isti material v vseh treh elementih:

$$h_e = \frac{L}{3} \quad , \quad E_eA_e = EA$$

dobimo:

$$\mathcal{K} = \frac{3EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_f &= \frac{n_0L}{6}\{1,2,2,1\}^T \\ \mathcal{F}_P &= \{P_0, 0, 0, F_0\}^T \end{aligned}$$

Sistem enačb, ki jo enačba problema opredeljuje, je oblike:

$$\frac{3EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{n_0L}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \\ F_0 \end{Bmatrix}$$

Če nadalje upoštevamo zvezo $F_0 = n_0 L$ in ugotovimo, da je zaradi načina vpetja $_0 = 0$, sledi rešitev sistema:

$$= \{U_0, U_1, U_2, U_3\}^T = \frac{1}{18}\frac{F_0 L}{E A}\{0, 11, 20, 27\}^T$$

reakcijska sila, ki jo določa P_0, pa je:

$$P_0 = -2F_0$$

Zanimiva je primerjava rezultatov tako glede na ekzaktno rešitev kot glede na rešitev z MKE, pri čemer smo celotno dolžino elementa privzeli kot en sam končni element. V rešitvi v primeru delitve na tri končne elemente izstopa predvsem aproksimacija osne sile, ki podaja, četudi po končnem elementu konstantna, bistveno ustreznejši prikaz porazdelitve osne sile vzdolž osi nosilca.