VSEBINA :

1. MATEMATIČNI MODEL

Glede na gibalno stanje snovnih delcev v prostoru lahko dogodke v prostoru obravnavamo na dva načina:

- GEOMETRIJSKI PROSTOR (opazovanje je vezano na časovno fiksno območje geometrijskih točk v prostoru, ne glede na to, če so te v različnih časovnih trenutkih zasedene z različnimi snovnimi delci ali ne)
- MATERIALNI PROSTOR (opazovanje je vezano na časovno fiksno območje snovnih točk v prostoru, ne glede na njihovo gibalno stanje)

Če snovne točke svojega položaja v geometrijskem prostoru ne spreminjajo s časom, sta geo. in materialni prostor identična.

Materialni prostor in čas tvorita štirirazsežen prostor.

Glede na fizikalne in geometrijske posebnosti fizikalnega problema je velikokrat mogoče matematični model zasnovati v prostoru, katerega razsežnost je manjša od razsežnosti materialnega prostora.

Redukcija prostorske razsežnosti: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^p$, $p \{1,2\}$ → npr. gibalne enačbe

Prostorska razdelitev snovi:

DISKRETNI SISTEMI: sistemi s končnim št. prostostnih stopenj.

ko so v modeliranem območju podobmočja:

- katera ne mejijo druga na drugo
- katerih medsebojna razdalja je praviloma veliko večja od največje dolžine katerega koli podobmočja
- katerih lastnosti snovi se bistveno razlikujejo od snovi v sosednjih podobmočjih

Primer: - ozvezdja z zvezdami in planeti
- kristalne kali v talini

diferencialne enačbe

Primer: zrak-morje-kopno, led-voda

KONTINUALNI SISTEMI: sistemi z neskončnim številom prostostnih stopenj → zvezno porazdeljeni sistemi,
ko je v modeliranem območju:

- snov porazdeljena zvezno po posameznih podobmočjih, z morebitno nezveznostjo le na prehodu med posameznimi podobmočji
- porazdelitev snovi po podobmočju odločilna za odziv v preostalih podobmočjih

Matematični model naj bo kolikor je mogoče enostaven. Stopnja zahtevnosti modela naj bo ravno tolikšnja, da je z njim mogoče zaobjeti vse ključne dejavnike.
Število prostostnih stopenj opredeljuje naravo sistema (diskretni, kontinualni). Prostostne stopnje definiramo kot tiste, med seboj linearno neodvisne parametre sistema, s katerimi je obnašanje sistema enolično določeno.

Funkcijska oblika matematičnega modela je odvisna od značaja osnovne fizikalne spremenljivke, prostorske razsežnosti ter časovne odvisnosti fizikalnega sistema.

Značaj osnovne fizikalne spremenljivke: skalar, vektor, tenzor
Funkcijske oblike: algebrajska enačba, diferencialna enačba, parcialna dif. enačba

2. MATEMATIČNI POPIS FIZIKALNEGA PROBLEMA

posledica — vzrok učinek

Osnovna območna enačba: $\boxed{Au = f}$, $x \in \Omega$

$\Gamma = \sum \Gamma_\alpha^G \cup \sum \Gamma_\alpha^G$

$\Gamma_\alpha^G \cap \Gamma_\alpha^G = \emptyset$

A = dif. operator

$u = u(x)$ = osna fizikalna veličina

f = učinek na območje

g_α ... učinek na ograji Γ_α^G

$Au = f$

h_α ... učinek na ograji Γ_α^H

f ... učinek na območje Ω

G_α ... operator osnovne fiz. veličine (primarna sprem.)

$x \in \Omega$ ... območje

$x \in \Gamma$ ... ograja

H_α ... operator naravne fiz. veličine (sekundarne sprem.)

$A^{(2m)}$ ... diferencialni operator $2m$-tega reda

m primarnih spremenljivk $r_i = G^{(i)}$

m sekundarnih spremenljivk $Q_i = H^{(m+i)}$

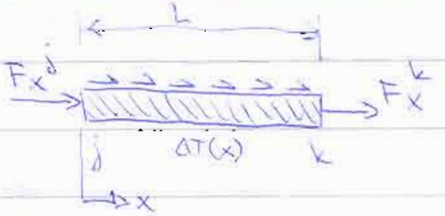
V primeru, ko gre za problem kontakta med več območji, izražajo primarne in sekundarne spremenljivke konjugiranost glede na robne pogoje.

primarna sprem. — sekundarna sprem.

ZNANA $\longleftrightarrow$ NEZNANA

NEZNANA $\longleftrightarrow$ ZNANA

3. STATIKA ENOOSNIH NOSILNIH ELEMENTOV



Vodilne enačbe problema izhajajo iz

a) Statičnega ravnotežja vseh elementov

$$\boxed{dN = -n(x)\,dx}$$

b) Deformacijske konsistentnosti

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \varepsilon}$$

c) konstitucijskega obnašanja

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon^{\sigma} + \varepsilon^{T}} \longrightarrow \varepsilon^{\sigma} = \frac{\sigma}{E}$$

$$\hookrightarrow \varepsilon^{T} = \alpha \Delta T$$

Vodilna enačba : $\boxed{\frac{d}{dx}\left[E\cdot A\cdot\left(\frac{du}{dx} - \alpha\cdot\Delta T\right)\right] = -n(x) \quad , \quad x \in [\emptyset, L]}$

Rešitev mora zadoščati robnim pogojem:

ko $x = x_j = \emptyset \rightarrow u_\emptyset = u_j$

$$N_\emptyset = E\cdot A\cdot\left(\frac{du}{dx} - \alpha\Delta T\right)_{x=\emptyset} = -F_x^j$$

ko $x = x_k = L$

$$\searrow u_L = u_k$$

$$N_L = E\cdot A\cdot\left(\frac{du}{dx} - \alpha\Delta T\right)_{x=L} = F_x^k$$

Rešitev mora zadoščati pogojem konsistentnega prehoda, ki opredeljujejo obnašanje primarne $u(x)$ in sekundarne $N(x)$ spremenljivke ob prehodu iz enega podintervala v drugega.

$$u_k(b_k) = u_{k+1}(a_{k+1}) \rightarrow g_k(b_k) = g_{k+1}(a_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Odvisnost med primarno in sekundarno spremenljivko:

$$\left(E\cdot A\frac{du}{dx}\right)_k\Big|_{x=b_k} - \left(E\cdot A\frac{du}{dx}\right)_{k+1}\Big|_{x=a_{k+1}} =$$

$$= F_{k,k+1} + \left(E\cdot A\,\alpha\Delta T\right)_k\Big|_{x=b_k} - \left(E\cdot A\,\alpha\Delta T\right)_{k+1}\Big|_{x=a_{k+1}}$$

Osno obremenjen nosilec:

- 2 robna pogoja (na vsakem robu enega)
- pogoji konsistentnega prehoda (za vsak stik med dvema poljema sta dva pogoja)
- lastna teža $\rightarrow n(x) = \rho\cdot g\cdot A$
- splošna enačba

$$\frac{d}{dx}\left[E\cdot A\left(\frac{du}{dx} - \alpha\Delta T\right)\right] = -n(x)$$

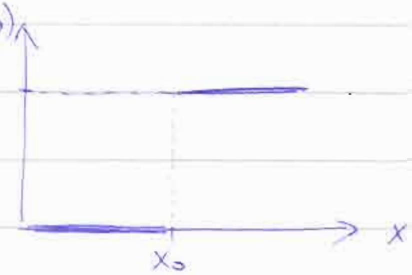
! A je lahko $A(x)$

če ni spremembe temp. je člen enak nič.

4. POPIS NEZVEZNOSTI HEAVISIDE (KORAČNA FUNKCIJA)

[Uporablja se za popis nezveznosti na meji $x = x_0$ med dvema podintervaloma.]

$$H(x-x_0) = \begin{cases} 1 \;\ldots\; x > x_0 \\ \emptyset \;\ldots\; x < x_0 \end{cases}$$



Lastnosti te funkcije:

$$\left[H(x-x_0)\right]\Big|_{b_{k-1}}^{a_k} = 1 \quad \wedge \quad a_k = b_{k-1} = x_0$$

Funkcijski produkt:

$$G_p(x, x_0) = H(x-x_0)\cdot(x-x_0)^p = \begin{cases} (x-x_0)^p \;\ldots\; x > x_0 \\ \emptyset \;\ldots\; x < x_0 \end{cases}, \quad p \in \mathbb{N}$$

Odvodi:

$$\left[\frac{d^r}{dx^r}\left(G_p(x,x_0)\right)\right]_{b_{k-1}=x_0}^{a_k=x_0} = \begin{cases} p! \;\ldots\; r = p \\ \emptyset \;\ldots\; \emptyset \leq r \leq p \end{cases} \quad \wedge \quad r > p$$

Rešitev, ki vsebuje vse s problemom povezane nezveznosti ter funkcijske spremembe $= \tilde{v}(x)$

Pri $k = 2$: ▷ če je dif. en. 2. reda : $m = 1$, če je 4. reda : $m = 2$

$$\tilde{v}(x) = \sum_{k=2}^{n} \tilde{v}_k(x) = \sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j^{(k)} \cdot G_{j+m-1}(x, x_k) + \sum_{j=\emptyset}^{\infty} \alpha_j^{(k)} \cdot G_{2m+j}(x, x_k)\right);$$

$$x \in [\emptyset, L] \wedge x_k = a_k = b_{k-1}$$

▷ če se geom. sprem. ne menja : $\beta = \emptyset$

$\beta_j^{(k)}$ ... velikosti koef. so določene iz p.k.p. na mejah med posameznimi podintervali

$\alpha_j^{(k)}$ ... velikosti koef. so določene s spremembo v funkcijskem predpisu obremenitvene dif. enačbe

▷ če je obt. enaka med dvema poljema enaka : $\alpha = \emptyset$

5. METODA KONČNIH RAZLIK

To je aproksimativna metoda, ki temelji na interpolacijskem pristopu. Sistem enačb, potreben za določitev neznanih koeficientov v_k, pa temelji na pretvorbi diferencialnih operatorjev v diferenčni shemi.

Ključne zahteve za rešitev:

- izpolnitev robnih pogojev
- izpolnitev pogojev konsistentnega prehoda
- izpolnitev območne enačbe problema

Metoda končnih razlik se razvije iz Taylorjeve vrste.

TRANSFORMACIJA DIFERENCIALNIH ZVEZ V DIFERENČNE:

$v(x)$ v okolici točke $x = x_0$ je zvezna in zvezno odvedljiva.

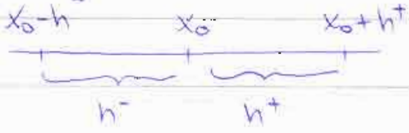
Taylorjeva vrsta:

$$v(x_0+h) = v(x_0) + \frac{h}{1!}\frac{dv}{dx}(x_0) + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2v}{dx^2}(x_0) + \dots$$

Možno je izraziti funkcijsko vrednost v neposredni okolici točke $x = x_0$:

$$x = x_0 + h^+ > x_0$$

$$x = x_0 - h^- < x_0$$



Oznake:

$$v(x_0) = v_0$$

$$\frac{d^r v}{dx^r}(x_0) = \frac{d^r v_0}{dx^r}$$

$$v(x_0+h^+) = v^+$$

$$v(x_0-h^-) = v^-$$

Funkcijske vrednosti $v(x)$ v točki:

$$x = x_0 + h^+ \rightarrow v^+ = v_0 + \frac{h^+}{1!}\frac{dv_0}{dx} + \frac{h^{+2}}{2!}\frac{d^2v_0}{dx^2} + \dots$$

$$x = x_0 - h^- \rightarrow v^- = v_0 - \frac{h^-}{1!}\frac{dv_0}{dx} + \frac{h^{-2}}{2!}\frac{d^2v_0}{dx^2} - \dots$$

Sedaj lahko izrazimo odvod v točki $x = x_0$:

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{1}{h^+ + h^-}\left[\frac{h^-}{h^+}(v^+ - v_0) - \frac{h^+}{h^-}(v^- - v_0)\right] - \frac{h^{+2}\cdot h^- + h^{-2}\cdot h^+}{6(h^+ + h^-)}\cdot\frac{d^3v_0}{dx^3} + \dots$$

Če izberem take, da velja $h^3 \ll h < 1$ lahko aproksimiram odvod v točki $x = x_0$ s funkcijskima vrednostima v sosednjih točkah:

$$\frac{dv_0}{dx} \approx \frac{1}{h^+ + h^-}\left[\frac{h^-}{h^+}(v^+ - v_0) - \frac{h^+}{h^-}(v^- - v_0)\right]$$

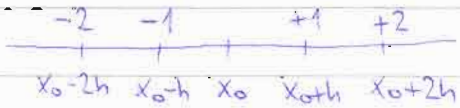
Aproksimacija 2 odvoda:

$$\frac{d^2v_0}{dx^2} \approx \frac{2}{h^+ + h^-}\left[\frac{1}{h^+}(v^+ - v_0) + \frac{1}{h^-}(v^- - v_0)\right]$$

Če sta točki $x = x_0$ enako oddaljeni ($h = h^+ = h^-$) sta aproksimaciji podani s centralnima razlikama:

$$\boxed{\frac{dv_0}{dx} \approx \frac{v_+ - v_-}{2h}} \quad \text{in} \quad \boxed{\frac{d^2v_0}{dx^2} \approx \frac{v_+ - 2v_0 + v_-}{h^2}}$$

APROKSIMACIJA ODVODOV NA OSNOVI CENTRALNIH RAZLIK:



$$\frac{dv_0}{dx} \approx \frac{v_+ - v_-}{2h} \quad \text{in} \quad \frac{d^2v_0}{dx^2} \approx \frac{v_+ - 2v_0 + v_-}{h^2}$$

Da bi lahko reševali tudi upogibno obremenjen nosilec, zapišemo še 3. in 4. odvod:

$$\frac{d^3 v_0}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 v_0}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{v_+ - 2v_0 + v_-}{h^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{d^3 v_0}{dx^3} \approx \frac{(v_{+2} - v_{-2}) - 2(v_{+1} - v_{-1})}{2h^3}} = D^3 v_0$$

$$\frac{d^4 v_0}{dx^4} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2 v_0}{dx^2}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{v_+ - 2v_0 + v_-}{h^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{d^4 v_0}{dx^4} \approx \frac{6v_0 - 4(v_{+1} + v_{-1}) + (v_{+2} + v_{-2})}{h^4}} = D^4 v_0$$

APROKSIMACIJA ODVODOV NA OSNOVI LEVIH OZ. DESNIH RAZLIK:

Uporabimo jo, ko ne moremo uporabiti centralnih razlik, ker se točke na robu nahajajo le na levi oz. desni strani.

desne razlike: $\emptyset$, $+1$, $+2$ — x_0, x_0+h, x_0+2h ...

leve razlike: -2, -1, $\emptyset$ — ... x_0-2h, x_0-h, x_0

Aproksimacije:

$$v_{\pm 1} = v_0 \pm \frac{h}{1!}\frac{dv_0}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2 v_0}{dx^2} \pm \dots$$

$$v_{\pm 4} = v_0 \pm \frac{4h}{1!}\frac{dv_0}{dx} + \frac{(4h)^2}{2!}\frac{d^2 v_0}{dx^2} \pm \dots$$

Za delitev $h^3 \ll h < 1$ sledijo odvodi:

$$\boxed{\frac{dv_0}{dx} \approx \mp \frac{1}{2h}\left[3v_0 - 4v_{\pm 1} + v_{\pm 2}\right]} = D^1_{\pm} v_0$$

$$\boxed{\frac{d^2 v_0}{dx^2} \approx \mp \frac{1}{h^2}\left[2v_0 - 5v_{\pm 1} + 4v_{\pm 2} - v_{\pm 3}\right]} = D^2_{\pm} v_0$$

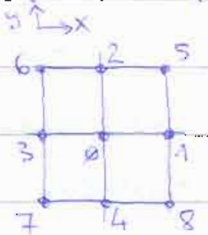
$$\boxed{\frac{d^3 v_0}{dx^3} \approx \mp \frac{1}{2h^3}\left[5v_0 - 18v_{\pm 1} + 24v_{\pm 2} - 14v_{\pm 3} + 3v_{\pm 4}\right]} = D^3_{\pm} v_0$$

IZBOLJŠANJE REŠITVE:

- poskušamo se izogniti fizikalno spornim funkcijskim vrednostim v zunanjih robnih točkah (poslužimo se lahko uporabe levih oz. desnih razlik)
- izpolnitev območne diferencialne enačbe v diskretni obliki naj bo enakomerno po območju.

APROKSIMACIJA PARCIALNIH ODVODOV:

Uporabimo jo v primeru večrazsežnostnega prostora ali pa v primeru časovne odvisnosti.



$$\boxed{\frac{\partial v_0}{\partial x} = \frac{v_1 - v_3}{2h}}$$

$$\boxed{\frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{v_2 - v_4}{2h}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = \frac{v_1 - 2v_0 + v_3}{h^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \frac{v_2 - 2v_0 + v_4}{h^2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} = \frac{v_5 - v_6 + v_8 - v_7}{4h^2}$$

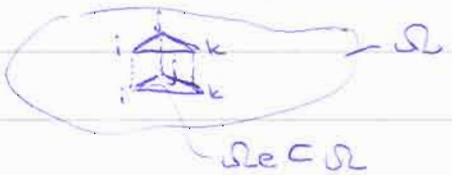
diferencialni operator:

$$\Delta v_0 = \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 4v_0}{h^2}$$

Uporabimo npr. pri izračunu It ali prevoda toplote.

6. METODA KONČNIH ELEMENTOV

Osnovni gradnik je t.i. končni element, ki zavzema območje Ω_e na celotnem območju Ω. Na območju Ω_e izvedemo osnovno aproksimacijo primarnih spremenljivk problema v odvisnosti od končnega nabora diskretnih vrednosti primarne spremenljivke v karakterističnih točkah, imenovanih vozlišča.



$$U_e(x) = \sum_{k=1}^{N_e} a_k \phi_k(x) \quad , \quad x \in \Omega_e$$

Šibka oblika integralske formulacije:

$$\int_{\Omega_e} \left[(A_u^{(m)} U_e)(A_v^{(m)} v_k) - f v_k \right] d\Omega = \int_{\Gamma_e} (B_u^{(1)} U_e)(C_v^{(1)} v_k)\, d\Gamma \quad , \quad k = 1, 2, \dots, N_e$$

Aproksimiramo U_e in izberemo nabor funkcij $v_k(x)$:

$$v_k = \psi_k^e(x) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, N_e$$

Dobimo sistem enačb:

$$\int_{\Omega_e} \left[(A_u^{(m)} U_e)(A_v^{(m)} \psi_k^e) - f \psi_k^e \right] d\Omega = \int_{\Gamma_e} \left[(B_u^{(1)} U_e)(C_v^{(1)} \psi_k^e) \right] d\Gamma \quad , \quad k = 1, 2, \dots, N_e$$

To lahko zapišemo v matrični obliki, kot enačbo končnega elementa:

$$K_e U_e = F_e \quad , \quad K_e = [K_{ij}^e] \quad , \quad K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} [A_v^{(m)} \psi_j^e][A_v^{(m)} \psi_i^e]\, d\Omega$$

$$U_e = [U_i^e] \quad , \quad F_e = [F_i^e] \quad , \quad F_i^e = \int_{\Gamma_e} (B_u^{(1)} U_e)(C_v^{(1)} \psi_i^e)\, d\Gamma + \int_{\Omega_e} f \psi_i^e \, d\Omega$$

V vektorju $\boxed{K_e}$ se nahajajo vozliščne vrednosti primarne sprem.

V vektorju $\boxed{F_e}$ se nahajajo vozliščne vrednosti sekundarne sprem.

7. RAZLIKE ⇒ METODA KONČNIH RAZLIK IN METODA KONČNIH ELEMENTOV

METODA KONČNIH RAZLIK:

Osnovno obliko integralske formulacije zapišemo z aproksimirano rešitvijo $u(x)$:

$$\int_{\Omega} \left(A^{(2m)} u - f \right) v_k \, d\Omega = \emptyset \quad , \quad k = \emptyset, 1, 2, \dots, N$$

Nabor funkcij v_k naj izpolnjuje pogoj:

$$v_k = \delta(x_k) \Rightarrow \delta(x_k) \Rightarrow \begin{cases} \delta(x_k) = \emptyset \quad \dots \quad x \neq x_k \\ \int_{\Omega} \delta(x_k) \, d\Omega = 1 \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} F(x) \, \delta(x_k) \, dx = F(x_k)$$

Sistem preide v sistem algebrajskih enačb:

$$\left(\tilde{A}^{(2m)} u - f \right) \Big|_{x = x_k} = \emptyset \quad , \quad k = \emptyset, 1, 2, \dots, N$$

Sistem v matrični obliki: $\boxed{K^{MKR} u = F^{MKR}}$

METODA KONČNIH ELEMENTOV:

Šibko obliko integralske formulacije zapišemo z aproksimirano rešitvijo $u(x)$:

$$\int_{\Omega} \left[(A^{(m)} u)(A^{(m)} v_k) - f v_k \right] d\Omega = \int_{\Gamma} \left[(B^{(1)} u)(G^{(1)} v_k) \right] d\Gamma \quad , \quad k = \emptyset, 1, 2, \dots, N$$

Osnovna aproksimacija na območju Ω_e:

$$U_e(x) = \sum_{k=\emptyset}^{N_e} a_k^e \, \emptyset_k^e(x) \quad , \quad x \in \Omega_e$$

$$v_k = \emptyset_k^e \quad , \quad k = 1, 2, \dots, N_e$$

Integriramo preko vseh podobmočij in zapišemo rezultirajoči sistem enačb v matrični obliki: $\boxed{K^{MKE} U = F^{MKE}}$

→ definirajo kaj poznamo in kaj iščemo

8. FIZIKALNE SPREMENLJIVKE PROBLEMA

UPOGIB NOSILCA:

- upogibek $u(x)$ → osnovna primarna spremenljivka
- naklon $\varphi(x)$ → druga primarna spremenljivka
- moment $M(x)$ → prva sekundarna spremenljivka
- prečna sila $T(x)$ → druga sekundarna spremenljivka

UPOGIB PLOŠČE:

- upogibek $u(x,y)$ → osnovna primarna spremenljivka
- naklon $\varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y)$ → druga primarna spremenljivka
- moment $m_x(x,y), m_y(x,y)$ → prva sekundarna spremenljivka
- prečna sila $q_x(x,y), q_y(x,y)$ → druga sekundarna spremenljivka

NATEG NOSILCA:

- raztezek $u(x)$ → primarna spremenljivka
- notranja sila $N(x)$ → sekundarna spremenljivka

9. APROKSIMATIVNO REŠEVANJE

Aproksimativna rešitev v obliki potenčne vrste:

$$\boxed{u_N(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k \quad , \quad x \in [0, L]}$$

Umin mora zadoščati minimalnim pogojem konsistentne rešitve.

$$\boxed{u_N(x) = w(x) \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot x^k \quad , \quad x \in [0, L]}$$

izpolnjuje homogene robne pogoje + $w(x) = 0$, ko $\lambda(x) \neq 0$

Homogenost robnih pogojev se izraža v tem, da so na robu poznane veličine po velikosti nične.

$$\boxed{u_N(x) = \lambda(x) + w(x) \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot x^k \quad , \quad x \in [0, L]}$$

izpolnjuje homogene in nehomogene robne pogoje

Nehomogenost robnih pogojev se izraža v tem, da so na robu poznane veličine po velikosti različne od nič.

Zahteve za rešitev so izpolnitve:

- robnih pogojev
- pogojev konsistentnega prehoda
- območne enačbe problema

primer: $w(x)$ in $\lambda(x)$, Heaviside f-ja

FUNKCIJSKI PRISTOP: $\boxed{u_N(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot \psi_k(x) \quad , \quad x \in [0, L]}$

Funkcije $\psi_k(x)$ so poznane in zvezno odvedljive, nabor funkcij pa mora izkazovati določene lastnosti, ki omogočajo eksaktno rešitev, či je ta na intervalu $[0, L]$ zvezna in zvezno odvedljiva.

Pri izbiri funkcijske oblike in tvorbe aproksimativne rešitve $u(x)$ je smotrno upoštevati naravo problema:

- simetričnost oz. antisimetričnost problema se izkazuje tudi v funkcijskih rešitvah, ki to lastnost ohranjajo
- ustrezna izbira koor. izhodišča poenostavi reševanje
- aproksimacijske funkcije, ki avtomatsko izpolnjujejo robne pogoje močno olajšajo reševanje

$w(x)$
$\lambda(x)$

- rešitve, ki izkazujejo določeno stopnjo nezveznosti ni mogoče dobro aproksimirati s potencialnimi aproksimativnimi funkcijami

primer metoda končnih razlik

INTERPOLACIJSKI PRISTOP:

Aproksimativna rešitev je zasnovana na končni množici $\{c_k\}$ diskretnih parametrov, ki aproksimirajo vrednosti primarnih spremenljivk v končno mnogih izbranih točkah območja $x = x_k$.
Najprej pa je potrebno določiti velikost neznanih koeficientov c_k.

aproks. rešitev: $v_N(x) = f(x \times \{c_k, k = 0,1,2,\dots,N\})$, $x \in [0, L]$
koeficiente c_k fizikalno opredelimo kot kot aproksimativne vrednosti osnovne primarne spremenljivke $v(x)$ v izbranih točkah $x = x_k$, torej:

$c_k \approx v_k \approx v(x_k)$, $x_k \in [0, L]$, $k = 0,1,2,\dots,N$

kot osnovo za konstrukcijo sistema $N+1$ enačb s koeficienti c_k kot neznankami uporabimo najprej enačbe robnih pogojev, pogojev konsistentnega prehoda in diferencialne enačbe problema.

10. INTEGRALSKA VARIACIJSKA FORMULACIJA

→ metoda končnih razlik

Osnovna obl. integralske formulacije: $\boxed{V_{(2m)}(u,v)=\int_\Omega (A^{(2m)}u-f)v\,d\Omega=\emptyset}$

Šibka obl. int. formulacije: → metoda končnih elementov

$$\boxed{U_{(m)}(u,v)=\int_\Omega\left[(A^{(m)}u)(A^{(m)}v)-fv\right]d\Omega-\int_\Gamma(B^{(1)}u)(C^{(1)}v)\,d\Gamma=\emptyset}$$

Inverzna obl. int. formulacije: → metoda robnih elementov

$$\boxed{U_{(0)}(u,v)=\int_\Omega\left[u(A^{(2m)}v)-fv\right]d\Omega-\int_\Gamma(B^{(2)}u)(C^{(2)}v)\,d\Gamma=\emptyset}$$

Inverzna oblika izpolnjuje bistvene (primarne) spremenljivke ter naravne robne pogoje (sekundarna sprem.).
Šibka oblika pa izpolnjuje le naravne robne pogoje.

Sledi, da izpolnitev osnovne int. formulacije ne zagotavlja izpolnitve nobenega robnega pogoja! Če je potrebno upoštevati pri aproksimativnem reševanju robne pogoje, izberemo tako funkcijsko obliko, ki zagotovi izpolnitev robnih pogojev, ki jih osnovna integralska formulacija ne izpolnjuje.

$$u(x)=\sum_{k=0}^{N} a_k\,\phi_k(x)$$

Zaradi robnih vrednosti aproksimativne funkcije in njenih odvodov zapišemo: $\boxed{u(x)=\varphi_0(x)+\sum_{k=0}^{N} c_k\,\varphi_k(x)}$

izpolnjuje vse tiste r.p., ki jih osnovna integralska formulacija ne

izpolnjuje homogeno obliko teistih pogojev

11. METODA ROBNIH ELEMENTOV

Inverzno obliko integralske formulacije zapišemo ~~...~~ z aproksimiramo rešitvijo $u(x)$:

$$\int_{\Omega} \left[u(A^{(2m)} v_k) - f v_k \right] d\Omega = \int_{\Gamma} \left[(B_i^{(2)} u)(G_i^{(2)} v_k) \right] d\Gamma \ , \ k = 1, 2, \ldots, N$$

Pogoj:

$$A^{(2m)} v_k = \delta(x_k)$$

Integral preide v: $\int_{\Omega} u(A^{(2m)} v_k) d\Omega = \int_{\Omega} u \, \delta(x_k) d\Omega = c_k u_k$

c_k je odvisen od lege točke $x = x_k$, glede na ograjo Γ:

$$c_k = \begin{cases} 1 \ldots\ldots x_k \in \Omega \\ a; \ \emptyset < a < 1 \ldots x_k \in \Gamma \end{cases}$$

Inverzna oblika se lahko integrira le po ograji v sestavnih delih Γ_e:

$$u_e(x) = \sum_{k=\emptyset}^{N_e} a_k^e \, \emptyset_k^e(x) \ , \quad x \in \Gamma_e$$

Rezultirajoči sistem enačb v matrični obliki:

$$\boxed{K^{MRE} U = F^{MRE}}$$

12. UPOGIBNO OBREMENJEN NOSILEC

Osnovna enačba : $\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\left[E \cdot I\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha \, \Delta t\right)\right] = p(x)}$

Če ni spremembe temperature : $\frac{d^2}{dx^2}\left[E \cdot I \, \frac{d^2w}{dx^2}\right] = p(x)$

Potrebujem :

- 4 robni pogoji (na vsakem robu dva)
- pogoji konsistentnega prehoda (za vsak stik med dvema poljema po štirje p.k.p.)

Odvodi :

$w' = \frac{dw}{dx} = -\operatorname{tg}\varphi$ ... zasuk

$w'' = \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot I}$ ... moment

$w''' = \frac{d^3w}{dx^3} = -\frac{T}{E \cdot I}$ ... prečna sila

$w^{IV} = \frac{d^4w}{dx^4} = \frac{p(x)}{E \cdot I}$ ... kontinuirana obremenitev

13. PREVOD TOPLOTE Z VOLUMSKO GENERACIJO TOPLOTE

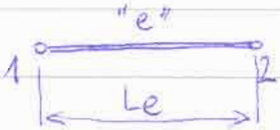
Splošna dif. enačba:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q_v(x,y,z)=\rho\cdot c\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

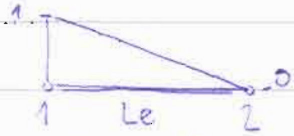
Stacionaren prevod v enodimenzionalnem primeru:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q_v(x)=0}$$

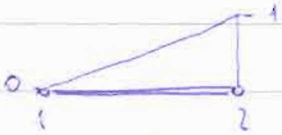
Linearna aproksimacija osnovne spremenljivke za končni element "e":



$$T(x)=T_1\cdot\psi_1(x)+T_2\cdot\psi_2(x)$$



$$\psi_1=1-\frac{x}{Le}$$

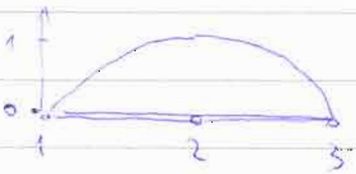


$$\psi_2=\frac{x}{Le}$$

Parabolična aproksimacija osnovne spremenljivke za končni element "e":

$$T(x)=T_1\cdot\psi_1(x)+T_2\cdot\psi_2(x)+T_3\cdot\psi_3(x)$$

$$\psi_1(x)=\frac{2(x-L/2)(x-L)}{L^2}$$

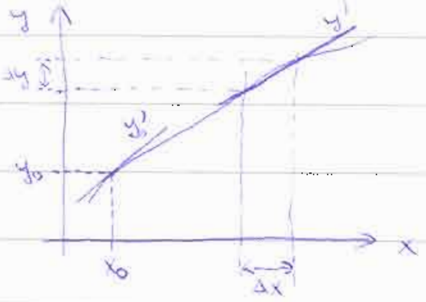


$$\psi_2(x)=-\frac{4x(x-L)}{L^2}$$

$$\psi_3(x)=\frac{2x(x-L/2)}{L^2}$$

14. NUMERIČNO REŠEVANJE DIFERENCIALNIH ENAČB

Eulerjeva metoda (metoda korak za korakom):

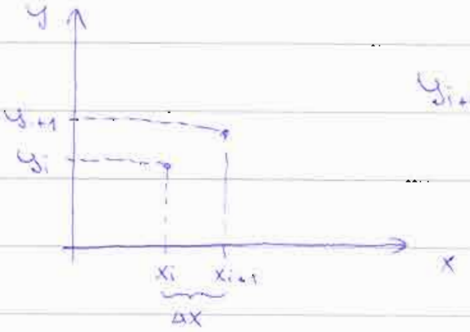


$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

iščemo $y(x)$

$y' = \frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$

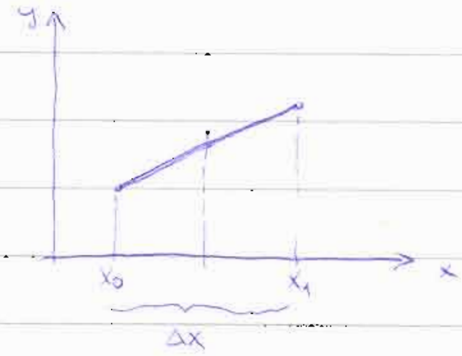
Taylorjeva metoda:



$$y_{i+1} = y_i(x_i) + y_i'(x_i)\Delta x + y_i''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2} + \dots + y_i^{(n)}(x_i)\frac{\Delta x^n}{n!} + \dots$$

(neskončna vrsta)

Runge-Kutta metoda:



$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

1.) $\Delta y_1 = \Delta x \cdot f(x_0, y_0)$

2.) $\Delta y_2 = \Delta x \cdot f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_1}{2}\right)$

3.) $\Delta y_3 = \Delta x \cdot f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_2}{2}\right)$

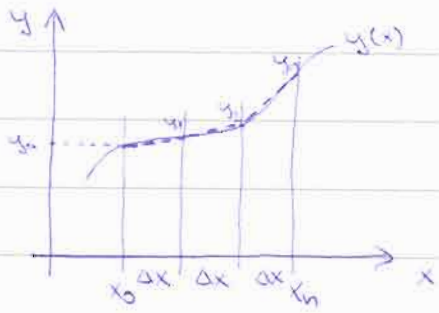
4.) $\Delta y_4 = \Delta x \cdot f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y_3\right)$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(\Delta y_1 + 2\Delta y_2 + 2\Delta y_3 + \Delta y_4)$$

Ta metoda omogoča tudi reševanje sistema diferencialnih enačb.

15. NUMERIČNO INTEGRIRANJE !

Trapezna metoda:



$$I = \int_{x_0}^{x_n} y(x)\,dx$$

$$I_{TM} = \frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + \frac{y_2+y_n}{2}\Delta x =$$

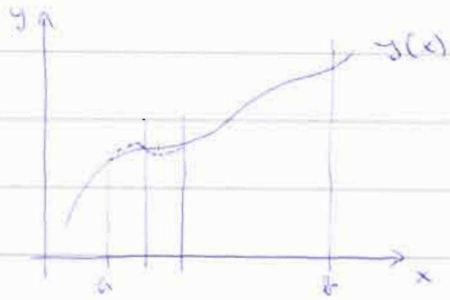
$$= \Delta x\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \frac{y_n}{2}\right] =$$

$$= \Delta x\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + y_n\right]$$

$\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n}$, imamo $n+1$ točk

$$I = \int_a^b y(x)\,dx \approx I_{TM} = \frac{b-a}{2n}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right]$$

Simpsonova metoda:



funkcijo aproksimiramo z kvadratno parabolo, imamo $2n+1$ točk

$$I_{SM} = \frac{b-a}{2n}\cdot\frac{1}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{2n-3} + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right]$$