

**Merilna tehnika: Izpeljava in določitev občutljivosti  
merilnika teže (DN)**

*dr. Ivan Bajsić*

**Uroš Radosavljević**

## Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod ter definicija problema</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Predpostavke k izračunu</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Wheatstonov mostiček</b>	<b>3</b>
3.1	Izpeljava matematičnega modela za mostiček . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Model merilnega lističa</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Model mehanske obremenitve</b>	<b>5</b>
5.1	Statika . . . . .	5
5.1.1	Zunanje statično ravnotežje . . . . .	5
5.1.2	Notranje obremenitve . . . . .	5
5.2	Trdnost . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Povezava enačb v celotni merilni model</b>	<b>6</b>
<b>7</b>	<b>Analiza linearnosti v Matlabu</b>	<b>7</b>
7.1	Reševanje . . . . .	7
7.2	Grafi . . . . .	8

## 1 Uvod ter definicija problema

Za domačo nalogo je potrebno izpeljati izraz za občutljivost merilnika teže. Merilnik je izveden z dvema piezouporovnim merilnima lističema, vezanima v Wheatstonov merilni mostiček - vezan polmostično. Kibernetički model je prikazan na sledeči sliki.

## 2 Predpostavke k izračunu

Za izračun, tako s področja elektrotehnike, kot tudi s področja mehanike sem predpostavil določene poenostavitve. Predpostavke so predpostavljene zaradi poenostavitve izračuna oz. zaradi možnosti analitične rešitve problema. Poleg vsake predpostavke je tudi ocena vpliva te predpostavke na točnost rešitve modela; groba predpostavka pomeni, da ta predpostavka v praksi lahko prinese bistvena odstopanja od pravih vrednosti, majhna predpostavka pa pomeni, da je njen vpliv na točnost dovolj majhna v primerjavi z grobimi predpostavkami.

1. Zanemarimo upornost žic v mostiču (srednje groba predpostavka),
2. Vsi upori v mostiču imajo enako upornost (groba predpostavka),
3. Upornosti se pri obremenjevanju lističev spreminja enako na obeh (fina predpostavka),
4. Napajanje je enosmerno brez šuma (fina predpostavka),
5. Sprememba upornosti je linearno povezana z deformacijo (fina predpostavka za majhne pomike),
6. Zaradi upornosti se ne generira toplota, ki bi vplivala na meritve (groba predpostavka),
7. Zaradi deformacije nosilca se ne generira toplota (fina predpostavka - ni dinamičnega obremenjevanja),
8. Okolica je stabilna in ne vpliva na meritev (srednje groba predpostavka),
9. Podpora je mehansko popolnoma toga (fina predpostavka),
10. Sila je točkovna (fina predpostavka),
11. Material je izotropen (fina predpostavka),
12. Geometrija se ne spreminja (je simetrična) in je popolna (srednje fina predpostavka),
13. Površinski defekti ne vplivajo na meritve (fina predpostavka),
14. Strižne deformacije so zanemarljive (tudi torzijske!) (srednje fina predpostavka),
15. Predpostavljene so majhni pomiki nosilca (srednje groba predpostavka),

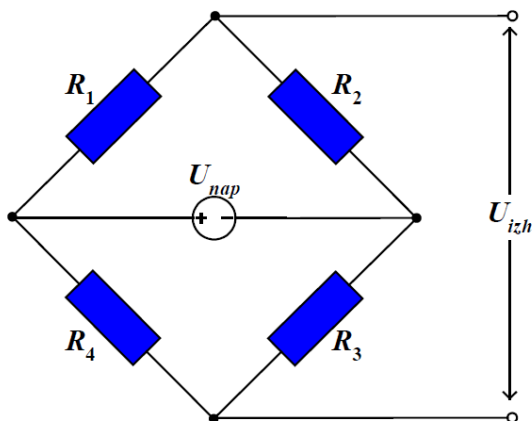
## 3 Wheatstonov mostiček

### 3.1 Izpeljava matematičnega modela za mostiček

Izhajamo iz osnovnega modela Wheatstonovega mostiča

$$\frac{U_{izh}}{U_{nap}} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (1)$$

Indeksiranje praktično nima pomena, paziti je potrebno, da sta t.i. diagonalna para vezana pravilno. Pri upogibu nosilca je prava izbira ta, da je merilni listič obremenjen natezno in merilni listič obremenjen tlačno



Slika 1: Vežalna shema Wheatstonovega mostiča

vezan eden za drugim (po indeksih, ne po električni shemi). Enako velja, če bi imeli več lističev, katerih imenska deformacija je enaka.

Posamezno spremembo upornosti zapišemo s pomočjo Taylorjeve vrste, pri čemer se omejimo z linearnim členom. Pri tem upornika 3 in 4 ne doživljata sprememb, saj sta pasivna. Vsi upori imajo enako imensko upornost  $R$ .

$$R_1 = R + dR_1 \quad (2)$$

$$R_2 = R + dR_2 \quad (3)$$

$$R_3 = R \quad (4)$$

$$R_4 = R \quad (5)$$

Zgoraj zapisane enačbe uvrstimo v enačbo 1 ter izpeljemo.

$$\frac{U_{izh}}{U_{nap}} = \frac{dR_1 - dR_2}{2(2R + dR_1 + dR_2)} \quad (6)$$

Imenovalc enačbe 6 je možno še poenostaviti ob sledečem premisleku; imenska upornost lističev  $R$  je ranga 100 do 300  $\Omega$ , če tej vrednosti prištejemo spremembo upornosti nekaj desetink  $\Omega$ , potem je iz praktičnega vidika možno da spremembo upornosti v imenovalcu preprosto odstranimo. Tako ostane

$$\frac{U_{izh}}{U_{nap}} = \frac{dR_1 - dR_2}{4R} \quad (7)$$

## 4 Model merilnega lističa

Iz definicije lahko izhajamo, da je merilni listič linearno zaznavalo, katerega model je

$$\frac{dR}{R} = K \frac{du}{dx} \quad (8)$$

Tukaj so do sedaj neuporabljene oznake  $K$  občutljivost merilnega lističa (tudi Gauge factor)  $u$  je absolutni pomik v smeri  $x$  in  $x$  dimenzijo prostora po katerem upoštevamo raztezek. Vodilo naj bo, da ta os sovpada z osjo glavnih normalnih deformacij. V tej enačbi smo predpostavili ta temperaturnih vplivov ni. Vkolikor bi jih upoštevali bi se enačba preoblikovala v  $\frac{dR}{R} = K\left(\frac{du}{dx} - \alpha\Delta T\right)$ .

Odvod pomika je po definiciji majhnih pomikov (iz enačbe deformacij) enak specifični deformaciji  $\varepsilon$ . Enačbo lahko razvijemo v obliko

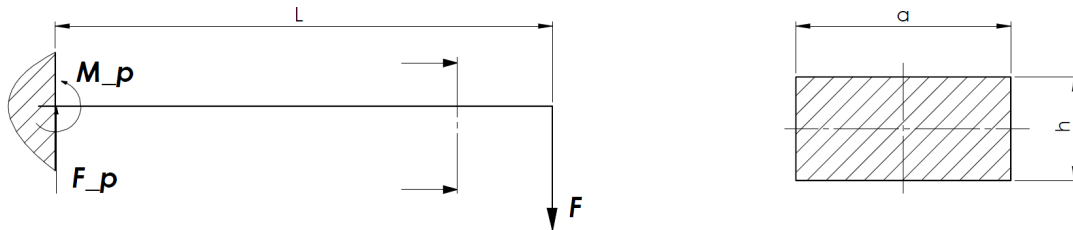
$$dR = RK\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{dR}{RK} \quad (9)$$

## 5 Model mehanske obremenitve

### 5.1 Statika

#### 5.1.1 Zunanje statično ravnotežje

Momentu, ki ga na nosilec izvaja sila  $F$  mora v podpori nasprotovati sila in moment v podpori. Izrazimo jih iz Newtonovih zakonov. Čeprav sta moment in sila vektorski veličini ju zaradi enodimenzijskega problema obravnavamo skalarno.



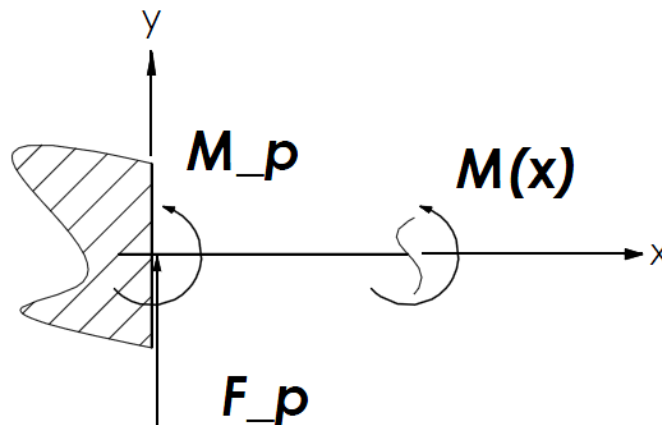
Slika 2: Zunanje ravnotežje nosilca in geometrija

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F + F_p = 0 \Rightarrow F_p = F \quad (10)$$

$$\sum M_p = 0 \Rightarrow M_p - F \cdot l = 0 \Rightarrow M_p = F \cdot l \quad (11)$$

#### 5.1.2 Notranje obremenitve

Nosilec na sliki 2 virtualno prerežemo in prerezan kos nadomestimo z ekvivalentnimi notranjimi obremenitvami, to je predstavljeno na sliki 3.



Slika 3: Prerez nosilca za ugotovitev notranjih sil

Ker potrebujemo samo notranji moment (sledi iz predpostavk v poglavju 2) obravnavamo samo njega. Enačba spreminjanja notranjega momenta glede na referenčni koordinatni sistem je

$$\sum M_p = 0 \Rightarrow M(x) + M_p - F \cdot x = 0 \Rightarrow M(x) = Fx - M_p \quad (12)$$

## 5.2 Trdnost

Iz napetostnega tenzorja pri upogibu enkrat simetričnega prereza je moč izpeljati napetost na posameznem "vlaknu".

$$\sigma = \frac{M(x) \cdot y}{I_x} \quad (13)$$

Kjer je  $y$  oddaljenost posameznega vlakna od nevtralne (težične) osi prereza v smeri  $y$ ,  $I_x$  pa vztrajnostni moment oz. drugi moment prereza, definiran kot  $I_x = \int_A y^2 dA$ . Izpeljemo lahko, da je za pravokotni prerez, vztrajnostni moment  $\frac{ah^3}{12}$  (glej sliko 2).

Enačbo 13 lahko še preoblikujemo tako da rečemo, da je  $y$  enak polovici višine prereza, tam se namreč pojavljajo napetosti katerim so izpostavljeni merilni lističi, hkrati pa so to napetosti ki so največje. Tako lahko vztrajnostni moment nadomestimo z odpornostnim momentom  $W_x$ , ki za pravokoten prerez znaša  $\frac{ah^2}{6}$ .

$$\sigma = \frac{M(x)}{\pm W_x} \quad (14)$$

Znak  $\pm$  pomeni za naš primer največjo natezno in največjo tlačno napetost v vlaknu, ki sta po vrednosti enaki, po predznaku pa nasprotni, saj je nosilec dvakrat simetričen. V to enačbo lahko umestimo do sedaj izpeljane enačbe iz statike.

$$\sigma = \frac{Fx - M_p}{W_x} = \frac{F(x-l)}{\pm W_x} \quad (15)$$

S to enačbo preko Hookovega zakona za izotropna telesa izpeljemo deformacijo

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F(x-l)}{\pm EW_x} \quad (16)$$

Zapišemo lahko ločeno

$$\varepsilon_{zg} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F(x-l)}{EW_x} \quad (17)$$

Kjer indeks  $zg$  pomeni zgornje vlakno. Za spodnje vlakno torej velja

$$\varepsilon_{sp} = -\varepsilon_{zg} \quad (18)$$

## 6 Povezava enačb v celotni merilni model

Vse do sedaj izpeljane enačbe sestavimo skupaj.

$$\frac{U_{izh}}{U_{nap}} = \frac{dR_1 - dR_2}{4R} \quad (19)$$

$$\varepsilon = \frac{dR}{RK} \quad (20)$$

$$\varepsilon = \frac{F(x-l)}{EW_x} \quad (21)$$

Za posamezno spremembo upornosti sledi

$$dR_1 = \frac{FRK(x-l)}{EW_x} \quad (22)$$

$$dR_2 = \frac{-FRK(x-l)}{EW_x} \quad (23)$$

Vstavimo v Wheatstonov mostič

$$\frac{U_{izh}}{U_{nap}} = \frac{FK(x-l)}{2EW_x} \quad (24)$$

Vstavimo še pripadajoče geometrijske lastnosti

$$\frac{U_{izh}}{U_{nap}} = \frac{3FK(x-l)}{Eah^2} \quad (25)$$

Tako izpeljemo še prehodno funkcijo sistema, ki je oblike

$$U_{izh} = \frac{3FK(x-l)U_{nap}}{Eah^2} \quad (26)$$

Prenosna funkcija pa v skladu s kibernetским modelom na poglavju 1, kar je hkrati občutljivost sistema

$$\frac{\partial U_{izh}}{\partial F} = OB = \frac{U_{izh}}{F} = \frac{3K(x-l)U_{nap}}{Eah^2} \quad (27)$$

Kot opazimo je model linearen, saj ob  $n$ -kratnem (majhnem) povečanju sile je izhodna napetost  $n$ -krat večja, saj je prenosna funkcija konstanta.

Iz enačbe lahko preberemo, da za visoko občutljivost mora biti material zelo deformabilen (majhen modul elastičnosti), prerez mora biti majhen (majhen odpornostni moment), sam *Gauge factor* mora biti čim večji, napajalna napetost pa mora biti tudi ustrezno visoka. Izraz v oklepaju nam pove tudi odmaknjenost od podpore - ta mora biti čim manjša.

## 7 Analiza linearnosti v Matlabu

Ker me je zanimalo dejansko kolikšno napako naredimo s tem ko zanemarimo majhne spremembe upornosti v enačbi 7 sem izdelal kratek program v programskem jeziku Matlab, ki primerja med seboj ti dve enačbi ter izriše nekaj grafov.

### 7.1 Reševanje

Sistem je zasnovan tako da je prva dimenzija matrik sprememba upornosti na lističu 1, druga dimenzija je sprememba na lističu 2. Primerja se eksaktne z lineariziranimi vrednostmi

Osnovne variable

```
mindr=0.001;% najmanjša razlika v upornosti
maxdr=2;% največja razlika v upornosti
len=50;% število delitev (ločljivost računanja)
R=100;%imenska upornost
% prealokacija spomina
eks=zeros(len,len);
apr=zeros(len,len);
```

```
% izračuni
idx1=1;
for dr1=linspace(mindr,maxdr,len)
idx2=1;
for dr2=linspace(mindr,maxdr,len)
eks(idx1,idx2)=(dr1-dr2)/(2*(2*R+dr1+dr2));% eksaktno izpeljan rezultat
apr(idx1,idx2)=(dr1-dr2)/(4*R);% aproskimacija z zanemaritvijo členov v imenovalcu
idx2=idx2+1;
end
idx1=idx1+1;
end
```

## 7.2 Grafi

```
dr1=linspace(mindr,maxdr,len);
dr2=linspace(mindr,maxdr,len);
[X,Y]=meshgrid(dr1,dr2);

figure
colormap jet
subplot(2,2,1)
mesh(X,Y,eks)
title('Eksaktne vrednosti razmerja izhodne in vhodne napetosti za razlike
upornosti')
xlabel('Sprememba upornosti 1. lističa [\Omega]')
ylabel('Sprememba upornosti 2. lističa [\Omega]')
zlabel('U_{izh}/U_{nap} [1]')
%
subplot(2,2,2)
surf(X,Y,apr)
title('Linearizirane vrednosti razmerja izhodne in vhodne
napetosti za razlike upornosti')
xlabel('Sprememba upornosti 1. lističa [\Omega]')
ylabel('Sprememba upornosti 2. lističa [\Omega]')
zlabel('U_{izh}/U_{nap} [1]')
% oba dva
subplot(2,2,3)
mesh(X,Y,eks)
hold on
surf(X,Y,apr)
hold off
title('Oba grafa skupaj za vrednosti razmerja izhodne in vhodne
napetosti za razlike upornosti')
xlabel('Sprememba upornosti 1. lističa [\Omega]')
ylabel('Sprememba upornosti 2. lističa [\Omega]')
zlabel('U_{izh}/U_{nap} [1]')
%
subplot(2,2,4)
err=((apr-eks))./eks;% zanalašč ni po definiciji da lepo izgleda
```



```
mesh(X,Y,err.*100)
title('Relativna napaka za vrednosti razmerja izhodne in vhodne
napetosti za razlike upornosti')
xlabel('Sprememba upornosti 1. lističa [\Omega]')
ylabel('Sprememba upornosti 2. lističa [\Omega]')
zlabel('Relativna napaka med principi reševanja [%]')

cf=gcf;
cf.Units='normalized';
cf.Position=[0 0 1 1];

%
%subplot(3,2,[5,6])
figure
Aerr=(apr-eks);% zanalašč ni po definiciji da lepo izgleda
surfc(X,Y,Aerr)
title('Absolutna napaka za vrednosti razmerja izhodne in vhodne
napetosti za razlike upornosti')
xlabel('Sprememba upornosti 1. lističa [\Omega]')
ylabel('Sprememba upornosti 2. lističa [\Omega]')
zlabel('Absolutna napaka med principi reševanja [\Omega]')

cf=gcf;
cf.Units='normalized';
cf.Position=[0 0 1 1];
```

