Izpitna vprašanja pri numeričnih metodah–UNI- 2006/07

Pojasnite z največ tremi stavki čemu je v matlabu namenjena naslednja ključna beseda ali znak? Prikažite kratek primer njihove uporabe:

-
*
.*
./
/
;
[]
\
~=
+
=
==
abs
asin
atan
atanh
break
ceil
chol
class
clc
clear
clear all
close
complex
cond
conj
cos
cot
det
diag
diff
disp
dot
double
dsolve
eig
else
end
eps
eval

exp
expand
eye
ezplot
factor
feval
figure
find
findstr
fix
floor
fopen
for
format long
format short
formula
fsolve
fzero
hold
if
imag
inf
inline
input
int
inv
length
limit
linsolve
linspace
load
log
log10
lsqcurvefit
lu
magic
max
min
nargin
nargout
norm
num2str
ode45
ones
pause
pi

plot
poly
poly2sym
polyfit
polyval
pretty
prod
quad
rand
real
residue
roots
round
save
sign
simplify
sin
sinh
size
solve
sort
spline
sqrt
subs
sum
sym2poly
syms
symsum
tan
taylor
trapz
vectorize
vpa
warning
zeros

Vprašanja iz teorije

1. Kako rešimo splošen sistem linearnih enačb? Kako rešimo splošen sistem linearnih enačb z orodji matlaba? Kako ugotovimo, da je sistem enačb singularen ali da je slabo pogojen. Kaj lahko rečemo o rešitvi slabo pogojenega sistema enačb.

2. Kakšne posebne tipe sistemov linearnih enačb poznamo in katere posebne metode lahko tedaj uporabimo? Katera matlabova orodja lahko uporabimo?

3. Katere posebne metode lahko uporabimo za pozitivno definitne simetrične sisteme. Katera matlabova orodja lahko uporabimo?

4. Pojasnite nalogo interpolacije in nalogo aproksimacije. Katere interpolacijske in katere aproksimacijske metode poznate.

5. Opišite matlabova orodja za izvedbo različnih načinov interpolacije.

6. Kaj so in katerim pogojem ustrezajo kubični zlepki? Opišite ustrezno matlabovo orodje.

7. Opišite matlabova orodja za izvedbo različnih načinov aproksimacije.

8. Opišite postopek reševanja nelinearne enačbe $f(x)=0$, naštejte vsaj tri metode in opišite Newtonovo ali tangentno metodo (navadno iteracijo, sekantno metodo, bisekcijsko metodo, kvadratno inverzno interpolacijo). Kako ocenimo napako izračunanega korena enačbe? Katera matlabova orodja lahko uporabimo?

9. Opišite postopek reševanja sistema nelinearnih enačb $\begin{matrix} f_1(x_1,x_2)=0 \\ f_2(x_1,x_2)=0 \end{matrix}$, naštejte metode reševanja in opišite Newtonovo metodo (navadno iteracijo). Kako ocenimo napako izračunanega korena enačbe? Katera matlabova orodja lahko uporabimo?

10. Kako izračunamo prvi in drugi odvod tabelirane funkcije? Kako računamo odvod na robu tabele? Katera matlabova orodja lahko uporabimo?

11. Opišite trapecno metodo za računanje določenega integrala $\int_a^b f(x)dx$. Kako ocenimo napako izračunanega integrala? Kako izračunamo določeni integral z matlabovim orodjem?

12. Opišite Simpsonovo metodo za računanje določenega integrala $\int_a^b f(x)dx$. Kako ocenimo napako izračunanega integrala? Kako izračunamo določeni integral z matlabovim orodjem?

13. Opišite Rombergovo metodo za računanje določenega integrala $\int_a^b f(x)dx$. Kako ocenimo napako izračunanega integrala? Kako izračunamo določeni integral z matlabovim orodjem?

14. Opišite dvotočkovno Gaussovo metodo za računanje določenega integrala $\int_a^b f(x)dx$. Kako ocenimo napako izračunanega integrala? Kako izračunamo določeni integral z matlabovim orodjem?

15. Opišite Eulerjevo metodo za reševanje začetnega problema $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$. Kaj veste o napaki metode? Kako rešimo začetni problem z matlabovim orodjem?

16. Opišite metodo Runge-Kutta četrtega reda za reševanje začetnega problema $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$. Kaj veste o napaki metode? Kako rešimo začetni problem z matlabovim orodjem?

17. Kako rešimo robni problem $y'' = f(x,y,y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$?

Naslednjo nalogo lahko rešite z orodji matlaba:

1. Rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Naslednji sistem enačb je simetričen in pozitivno definiten. Izberite primerno metodo in ga rešite

$$\begin{bmatrix} 1.44 & -0.36 & 5.52 & 0.00 \\ -0.36 & 10.33 & -7.78 & 0.00 \\ 5.52 & -7.78 & 28.40 & 9.00 \\ 0.00 & 0.00 & 9.00 & 61.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.29 \\ 4.12 \\ 35.6 \\ 71.98 \end{bmatrix}$$

3. Dana je tabela:

x	y
-0.41	0.943
-0.12	0.964
0.41	0.905

1.15	0.398
1.48	-0.062
2.01	0.207

Izračunajte koeficiente interpolacijskega polinoma, ga narišite in nato tabelirajte v intervalu od *0* do *2* po koraku 0.4.

4. Dana je tabela:

x	y
-0.41	0.943
-0.12	0.964
0.41	0.905
1.15	0.398
1.48	-0.062
2.01	0.207

Narišite interpolacijsko krivuljo s pomočjo kubičnih zlepkov in nato tabelirajte tabelirano funkcijo v intervalu od *0* do *2* po koraku 0.4.

5. Dana je tabela:

x	y
-0.41	0.943
-0.12	0.964
0.41	0.905
1.15	0.398
1.48	-0.062
2.01	0.207

Izračunajte koeficiente kubičnega aproksimacijskega polinoma, ga narišite in nato tabelirajte v intervalu od *0* do *2* po koraku 0.4. Izračunajte tabelo odstopkov v tabeliranih točkah in vsoto kvadratov odstopkov v tabeliranih točkah.

6. Dana je tabela:

x	y
-0.41	0.943
-0.12	0.964
0.41	0.905
1.15	0.398
1.48	-0.062
2.01	0.207

Izračunajte koeficiente aproksimacijske funkcije $f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 e^{-x} + a_4 \sin(1.2x)$. Nato jo narišite in tabelirajte v intervalu od *0* do *2* po koraku 0.4. Izračunajte tabelo odstopkov v tabeliranih točkah in vsoto kvadratov odstopkov v tabeliranih točkah.

7. Dana je tabela:

x	y
-0.41	0.943
-0.12	0.964
0.41	0.905
1.15	0.398
1.48	-0.062
2.01	0.207

Izračunajte ničlo tabelirane funkcije.

8. Rešite nelinearno enačbo $\sin(2.3x) = \ln(1.8x)$.

9. Rešite sistem nelinearnih enačb $x^2 + xy = 12, \quad y + 3xy^2 = 59$.

10. Dana je tabela

x	*y=f(x)*
0.0	0.0000
0.1	0.0819
0.2	0.1341
0.3	0.1646
0.4	0.1797

Izračunajte $f'(0)$, $f''(0)$, $f'(0.2)$ in $f''(0.2)$.

11. Izračunajte integral $\int_1^6 \frac{x^3 \ln(x)}{x^4 + 2} dx$.

12. Tabelirajte rešitev začetnega problema $y' = 3y - 4e^{-x}, \quad y(0) = 1$ na intervalu od *0* do *1*. po koraku *0.25*.

13. Tabelirajte rešitev robnega problema $y'' = -4y - y' + 4x, \quad y(0) = 0, \quad y(0.6) = 1$ s korakom *0.2* in *0.1*.

Napišite program v matlabu, ki reši naslenjo nalogo:

1. Program naj prečita *x* in izračuna $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$. Seštevanje prekinite ko je absolutna vrednost člena, ki ga prištevate, manjša od 10^{-8}. Testni primer: x=0.6 in x=-2.3.

2. Program naj reši spodnji trikotni sistem enačb $Lx = b$ po algoritmu:

    - Preverite, da je matrika kvadratna.

- Preverite, da so elementi nad diagonalo enaki nič takole:

V vsaki vrstici $i = 1,\ldots,n$ morajo biti elementi od diagonalnega naprej $j = i+1,\ldots,n$ enaki nič, torej je $l_{ij} = 0$, če je $j > i$.

- Izračunajte rešitev sistema tako, da iz *i*-te vrstice izračunaš x_i, torej takole

Za vsak *i=1,2,…n* izračunaš

$$x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j) / l_{ii}$$

3. Program naj reši zgornji trikotni sistem enačb $Ux = b$ po algoritmu:

   - Preverite, da je matrika kvadratna.
   - Preverite, da so elementi pod diagonalo enaki nič takole:

   V vsaki vrstici $i = 1,\ldots,n$ morajo biti elementi do diagonalnega, $j = 1,\ldots,i-1$, enaki nič, torej je $u_{ij} = 0$, če je $j < i$.

   - Izračunajte rešitev sistema z vstavljanjem nazaj tako, da iz *i*-te vrstice izračunate x_i, torej takole

   Za vsak *i=n,n-1,…1* izračunjte $x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j) / u_{ii}$.

4. Program naj reši linearni sistem enačb $Ax = b$ po Gaussovem algoritmu brez pivotiranja takole:
   - Preverite, če je matrika *A* kvadratna.
   - Sestavite razširjeno matriko koeficientov $\overline{A}$.
   - Izvedite v vsakem stolpcu eliminacijo diagonalne neznanke iz vrstic pod diagonalo razširjene matrike . Za vsako vrstico *i=1,2,…,n-1* eliminirajte x_i iz *i*-tega stolpca pod diagonalo takole:
   - Za vsako vrstico *j=i+1,…,n* izračuna faktor $l_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$ (če je $|a_{ii}| < 10^{-20}$, se naj algoritem prekine in javi napako ‘deljenje z nič’) nato s tem faktorjem pomnoži *i*-to vrstico in jo odšteje od *j*-te. Tako nastane iz razširjene matrike koeficientov $\overline{A}$ zgornja trikotna matrika U.
   - Z vstavljanjem nazaj rešitete sistem enačb takole:
   - Za *i=n,n-1,…,1* izračunajte $x_i = (u_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} x_j) / u_{ii}$.

5. Naslednji algoritem s prištevanjem večkratnikov ene vrstice drugi predela kvadratno matriko *A* v zgornjo trikotno. Dopolnite ga tako, da bo iz njega nastala funkcija za računanje determinante *d=determinanta(A).* Determinanta trikotne matrike je enaka produktu diagonalnih elementov $d = \prod_{i=1}^{m} a_{ii}$.

```
[m,n]=size(A)
if  n~=m
    error ‘Matrika ni kvadratna’
```

```
        end
        for i=1:m-1
             for j=i+1:m
                L(j,i)=A(j,i)/A(i,i);
                A(j,i)=0; A(j,i+1:n)=A(j,i+1:n)-L(j,i)*A(i,i+1:n);
            end
        end
```

6. Program naj reši linearni sistem enačb $Ax = b$ po Gaussovem Jordanovem algoritmu brez pivotiranja takole:
   - Preverite, če je matrika *A* kvadratna.
   - Sestavite razširjeno matriko koeficientov $\overline{A}$.
   - Na vsakem koraku eliminacije *i=1,2,…,n* delite vrstico razširjene matrike z vodilnim elementom a_{ii} (če je $|a_{ii}| < 10^{-20}$, se naj algoritem prekine in javi napako 'deljenje z nič') in nato izvedite eliminacijo neznank nad in pod vodilnim elementom. Na mestu desne strani dobite rešitev sistema enačb.

Testna naloga: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}$, rešitev je $x = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

7. Dopolnite naslednji program, da bo izračunal inverzno matriko matrike *A* po Gauss-Jordanovi metodi brez pivotiranja. Izračunajte inverzno matriko še z matlabovimi orodji.

```
     for i=1:m
    A(i,i:n)=A(i,i:n)/A(i,i)
        for j=1:m
             if  i==j
                continue
            end
        A(j,i:n)=A(j,i:n)-A(j,i)*A(i,i:n)
     end
end
```

Testna naloga $A = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 & 1.0 \\ -0.3 & 0.3 & 0.5 \\ 0.6 & -1.0 & 0.5 \end{bmatrix}$

8. Za reševanje simetričnega pozitivno definitnega sistema linearnih enačb je zelo učinkovita metoda Choleskega. Napišite program, ki reši simetrični pozitivno definitni sistema linearnih enačb po metodi Choleskega. Lahko uporabite primerna matlabova orodja.

Testna naloga $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

9. Rešite sistem m linearnih enačb po Gauss-Seidelovi metodi. Metoda je iterativna. Na vsakem koraku iteracije *n=1,2,…* izračunate novi približek po formulah $x_i^{(n)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(n-1)}), \quad i = 1,2,\cdots,m$. Iteracijo prekinemo, ko je $\left\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right\|$ pod dopustno napako.

   Testna naloga $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$. Dopustna napaka $\varepsilon = 10^{-5}$.

10. Napišite program za računanje vrednosti interpolacijskega polinoma po Newtonovi metodi. Predpostavljamo, da ima interpolacijski polinom obliko
    $P_{n-1}(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + a_n(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$
    Koeficiente dobimo iz računske sheme

$$\begin{array}{llllll} x_1 & y_1 = f_{11} = a_1 & f_{12} = a_2 & f_{13} = a_3 & f_{14} = a_4 & f_{15} = a_5 \\ x_2 & y_2 = f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & \\ x_3 & y_3 = f_{31} & f_{32} & f_{33} & & \\ x_4 & y_4 = f_{41} & f_{42} & & & \\ x_5 & y_5 = f_{51} & & & & \end{array}$$

    kjer računamo po formulah $f_{i1} = y_i, \quad i = 1\cdots, n$ in za

$$j = 2,\cdots,n \quad : \quad f_{ij} = \frac{f_{i+1,j-1} - f_{i,j-1}}{x_{i+j-1} - x_i}, \quad i = 1,\cdots,n - j + 1$$

    Testna naloga: Dana je tabela:

x	y
-0.41	0.943
-0.12	0.964
0.41	0.905
1.15	0.398
1.48	-0.062
2.01	0.207

Izračunajte *y(1.3).*

11. Napišite program v matlabu, ki izračuna koren enačbe *f(x)=0* in rešite enačbo $x^3 = \sin(x) + e^{-x}$ po Newtonovi ali tangentni metodi po naslednjem algoritmu:

    - Tabelirajte funkcijo $f(x)$ in ocenite začetni približek. Izberite dopustno napako in izračunajte $f'(x)$.

- Izvajajte iteracijo $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 0,1,2,\cdots$ dokler ni $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$, to je pod dopustno napako.

12. Napišite program v matlabu, ki izračuna koren enačbe $x^3 = \sin(x) + e^{-x}$ po sekantni metodi po naslednjem algoritmu:
    - Tabelirajte funkcijo $f(x) = 0$ in ocenite začetna približka. Izberite dopustno napako ε.
    - Izvajajte iteracijo $x_{i+2} = x_{i+1} - f(x_{i+1}) \dfrac{x_{i+1} - x_i}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}, \quad i = 0,1,2,\cdots$ dokler ni $|x_{i+2} - x_{i+1}| < \varepsilon$, to je pod dopustno napako.

13. Napišite program v matlabu, ki izračuna koren enačbe $x^3 = \sin(x) + e^{-x}$ po bisekcijski metodi po naslednjem algoritmu:
    - Tabelirajte funkcijo $f(x) = 0$ in ocenite začetna približka x_L, x_D, $f(x_L) f(x_D) < 0$. Izberite dopustno napako ε.
    - Izvajajte iteracijo $x_n = \dfrac{x_L + x_D}{2}$, $\begin{cases} x_L = x_n, \textit{če je } f(x_L) f(x_n) > 0 \\ x_n \textit{ je koren, če je } f(x_n) = 0 \\ x_D = x_n, \textit{če je } f(x_L) f(x_n) < 0 \end{cases}$ $\quad i = 0,1,2,\cdots$

    dokler ni $\left| \dfrac{x_D - x_L}{x_L + x_D} \right| < \varepsilon$, to je pod dopustno napako.

14. Napišite program v matlabu, ki izračuna $\int_a^b f(x)dx$ po koraku $h = \dfrac{b-a}{n}$ po trapecni metodi takole:

    $T_h = \dfrac{h}{2}(f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f(a+(n-1)h) + f(b))$ in ocenite

    napako izračunanega integrala takole: $napaka = \dfrac{T_{\frac{h}{2}} - T_h}{3}, \quad \dfrac{h}{2} = \dfrac{b-a}{2n}$

    Testni podatki: $\int_2^5 \dfrac{x\cos(0.6x)}{x^2+1} dx, \quad n = 4$

15. Napišite program v matlabu, ki izračuna $\int_a^b f(x)dx$ po koraku $h = \dfrac{b-a}{n}$ po Simpsonovi metodi takole:

    $S_h = \dfrac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 4f(a+(n-1)h) + f(b))$

    in ocenite napako izračunanega integrala takole: $napaka = \dfrac{S_{\frac{h}{2}} - S_h}{15}, \quad \dfrac{h}{2} = \dfrac{b-a}{2n}$.

Testni podatki: $\int_2^5 \frac{x\cos(0.6x)}{x^2+1}\,dx$, $n=4$

16. Napišite program v matlabu, ki reši začetni problem
$y' = f(x, y), \quad y(a) = \alpha = y_1,$ na intervalu $[a,b]$ pri koraku $h = (b-a)/n$
takole:
$x_1 = a$ in nato ponavljajte za $i = 1, 2, \cdots, n$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$$
$$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$$
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$

Testni podatki: $y' = y - x^2 + 1$, $0 \le x \le 2$, $y(0) = 0.5$, $n = 8$.