ABSOLUTNA IN RELATIVNA NAPAKA 1

Če označim:

a - točna vrednost

A - približek

$\Delta a - A$ - točna napaka

$|\Delta a|$ - ocena absolutne napake

$\delta a = \frac{|\Delta a|}{a}$ - relativna napaka

$\delta a = \frac{|\Delta a|}{|A|}$

$$A - |\Delta a| \le a \le A + |\Delta a|$$

Algoritem, ki vpliv napak zmanjšuje se imenuje stabilni, sicer je nestabilni algoritem.

Širjenje napake:

Označim $X_1, X_2, X_3, \dots X_n$ so približki od $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$

Rezultat nam da točna funkcija $y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$

Izračunamo še približke rezultatov z funkcijo $Y = f(X_1, X_2, \dots)$

Napaka rezultatov je $\Delta y_i = Y_i - y$, napaka podatkov pa podobno $\Delta x_i = X_i - x$, relativna napaka pa

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{f(x_1, x_2, \dots x_n)} \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial x_i} \cdot \delta x_i = \sum_{i=1}^{n} k_i \, \delta x_i$$

števila pogojenosti $|k_i| < 1$

seštevanje (vsota)

$x_1, x_2, \delta x_1, \delta x_2, y = x_1 + x_2$

$y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1 \qquad \delta y = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \cdot 1 \cdot \delta x_1 + \frac{x_2}{x_1 + x_2} \cdot 1 \cdot \delta x_2$

$k_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} < 1$

$k_2 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} < 1$ STABILNO!

odštevanje (razlika)

Če je $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ in $|x_1| \le |x_2|$, potem je $k_i > 1$.
Algoritmi, ki vsebujejo odštevanje niso zanesljivi.

množenje (produkt)

$y = x_1 x_2 = f(x_1, x_2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2$ in $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$

$$\delta y = \frac{x_1}{x_1 \cdot x_2} \cdot \delta x_1 \cdot x_2 + \frac{x_2}{x_1 \cdot x_2} \delta x_2 \cdot x_1 = \underbrace{\delta x_1 + \delta x_2}_{\text{napake se seštevajo}}$$

deljenje (količnik)

$y = \frac{x_1}{x_2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}$ in $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{-x_1}{x_2^2}$

$$\delta y = \frac{x_1 x_2}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \delta f_1 + \frac{x_2 x_2}{x_1} \cdot \frac{-x_1}{x_2^2} \, \delta x_2 = \underbrace{\delta x_1 - \delta x_2}_{\text{napake se odštevajo}}$$

potenciranje

$y = x_1^p = f(x_1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = p \, x_1^{p-1}$

$\delta y = \frac{x_1}{x_1^p} \, p \, x_1^{p-1} \, \delta x_1 = p \, \delta x_1 \quad \rightarrow k_i - p$

ZAČETNI PRIBLIŽEK REŠITVE NELIN. ENAČBE 2

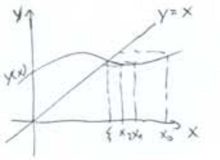
Lahko ga določimo grafično ali pa si pomagamo z intervali. Izberemo meje intervala (na levi x_L, na desni strani pa x_D) tako, da je na mejah funkcija nasprotnega predznaka.

Preverimo, če je $f(x_L) \cdot f(x_D) < 0$ - med x_L in x_D je koren enačbe

Natančnost dobljenega korena je odvisna od izbranega h ($\frac{h}{2}$ ali $\frac{h}{4}$).

NAVADNA ITERATIVNA M. ZA REŠ. NELIN. ENAČBE 3

Najprej enačbo $f(x) = 0$ pretvorimo v $x = g(x)$, izberemo začetni približek x_0, potem sledi iteracija x_{i+1} in izračunamo $x_{i+1} = g(x_i)$



interacija $x_1 = \gamma(x_0)$, $x_2 = \gamma(x_1)$, $x_{i+1} = \gamma(x_i)$ poti ξ

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i+1} \to \xi$

$\xi = \lim x_i = \lim \gamma(x_{i-1})$

$\xi = \gamma(\lim x_{i-1}) = \gamma(\xi)$

Napako ocenimo iz približka $\varepsilon < \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right|$.

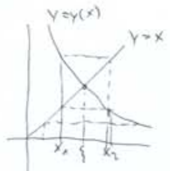
Napaka približka $\Delta i = x_i - \xi$

$|x_i - \xi| \le |x_i - x_{i-1}|$

$|x_i - \xi| \le \frac{L}{1-L} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$

Relativna napaka $\left| \frac{x_i - \xi}{x_i} \right| \le \frac{L}{1-L} \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right| \le \delta i \cdot \varepsilon$

Ocenimo $L \approx |y'(x_i)| = \frac{\gamma(x_{i+1}) - \gamma(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \left| \frac{x_{i+2} - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \right|$



$x_0, x_1 = \gamma(x_0), x_2 = \gamma(x_1), \dots$ divergira

$\gamma(\xi) \ll |\gamma(\xi)| > 1$

Če $\gamma(x)$ preslika interval $[a, b]$ vase in je f. odvedljiva in hkrati $L < 1$, obstaja natanko 1 fiksna točka preslikave $x = \gamma(x)$ in jo izračunamo z iteracijo $x_{i+1} = x_i - \xi$. Približek x_i na i-tem koraku se loči od ničle za napako $\Delta i = x_i - \xi$.

NEWTNOVA METODA (TANGENTNA) ZA REŠ. NELIN. ENAČBE 4

Izračunamo odvod funkcije in si izberemo začetni približek: $tg\,\alpha = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$, $y(x) = ?$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ $\qquad y'(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ $\qquad = 1 - \frac{f'(x) + f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}$

splošno $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ $\qquad = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}$

$x_i \to \xi$, $f(\xi) = 0$

ocenimo napako $\frac{L}{1-L} \to 0$

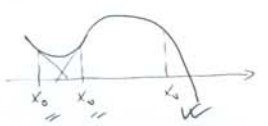
$$\xi < \frac{|x_{i+1} - x_i|}{x_{i+1}} = \frac{1}{1-L} \to 0$$

Na nekem koraku interacije se točna mesta podvojijo

$\varepsilon_{i+1} = k \cdot \varepsilon_i^2$ — red konvergence za Newtnovo metodo

konstanta blizu korena

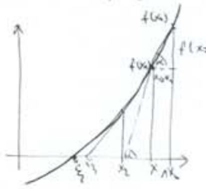
$\varepsilon_{i+2} = k \cdot 10^{-6}$
$\varepsilon_{i+2} = k^2 \cdot 10^{-12}$



- x_0 mora biti dovolj blizu korena
- pravilno izbran približek
- odvajanje

SEKANTNA M. ZA REŠ. NELIN. ENAČBE 5

Ena izmed odprtih metod. Precej počasna metoda; funkcija je na robovih intervala x_L in x_D nasprotnega predznaka, je omejena in ima samo en koren.



$tg\,\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_2} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$

približek: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$x_{i+2} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i+1})}{f(x_i) - f(x_{i+1})}$

$i = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$x_2 = x_0 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$

Izberemo dva približka x_0, x_1 in potegnemo črto čez sekanto x-osi, dobimo x_2, potem spet potegnemo črto čez x_1 in x_2, ipd. Zatem izračunamo plijuben približek.

Ocena napake: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ — počasno!

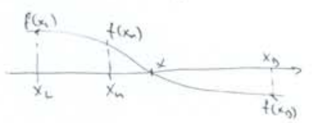
$\varepsilon_{i+1} = k \cdot \varepsilon_i^p = k \cdot \varepsilon_i^{1,62}$

$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$ — red konvergence

BISEKCIJSKA M. ZA REŠ. NELIN. ENAČBE 6

Bisekcijska metoda je uporabna le za lihe korene, je počasna ampak preprosta.

Določimo meji x_L in x_D , velja $f(x_L)\cdot f(x_D) < 0$ (pogoj



približek korena: $x_n = \frac{x_L + x_D}{2}$

$$f(x_L)\cdot f(x_n) = \begin{cases} \oplus, & x_L = x_n,\ f_L = f_n \\ \emptyset & x_n \text{ - koren} \\ \ominus & , x_D = x_n,\ f_D = f_n \end{cases}$$

napaka: $\frac{|x_i - x_{i-1}|}{x_i} < \varepsilon$ — ocena napake

$\left|\frac{x_D - x_L}{x_D + x_L}\right| < \varepsilon$ — boljša ocena napake

To je zaprta metoda.
Interval $[x_L, x_D]$ izberemo, kjer funkcija menja predznak.

Red konvergence: $\varepsilon_1 = x_D - x_L$

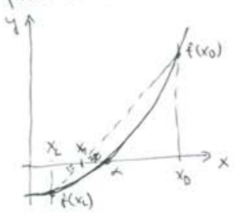
$\varepsilon_2 = x_D - x_n = \frac{1}{2}\varepsilon_1$

$p = 1$

linearna konvergenca

REGULA FALSI M. ZA REŠ. NELIN. ENAČBE 7

Ta metoda je zelo podobna bisekcijski in sekantni.
Najprej moramo poiskati takšen interval (x_L in x_D), da v njem funkcija $f(x)$ natanko enkrat menja predznak.



$tg\,\phi = \frac{f(x_D)}{x_D - x_1} = \frac{f(x_L)}{x_L - x_1}$

$x_1 = \frac{x_L\cdot f(x_D) - x_D\cdot f(x_L)}{f(x_D) - f(x_L)} = x_L - \frac{f(x_L)(x_L - x_D)}{f(x_L) - f(x_D)}$

Če sta funkcijski vrednosti nasprotnega predznaka, torej $f(x_L)\cdot f(x_D) < 0$, se koren nahaja v intervalu (x_L, x_i) in postavimo $x_D = x_i$ in $f(x_D) = f(x_i)$. V nasprotnem primeru se koren nahaja na intervalu (x_i, x_D).

Če je $\left|\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}\right| > \varepsilon$, povečamo i in se vrnemo na drugi korak, sicer je x_i dober približek korena α in interacijo zaključimo.

Ta metoda hitreje konvergira k korenu kot bisekcijska metoda.

Red konvergence $p = 1$ — linearna

napaka $\varepsilon > (x_{i+1} - x_i)$

HORNER ZA RAČ. VREDNOSTI POLINOMA 8

Splošna oblika polinoma je

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

n = stopnja polinoma

a_n = realni (ali kompleksni) koeficient polinoma

Če vrednost polinoma računamo imamo zelo veliko množenja in seštevanja

x_0	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
		$x_0 a_n^{(1)}$	$x_0 a_{n-1}^{(1)}$	...	$x_0 a_3^{(1)}$	$x_0 a_2^{(1)}$	$x_0 a_1^{(1)}$
x_0	$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	...	$a_2^{(1)}$	$a_1^{(1)}$	$P_n^{(1)}(x_0)$
		$x_0 a_n^{(2)}$	$x_0 a_{n-1}^{(2)}$	...	$x_0 a_3^{(2)}$	$x_0 a_2^{(2)}$	$x_0 a_1^{(2)}$
	$a_n^{(2)}$	$a_{n-2}^{(2)}$	$a_{n-2}^{(2)}$	...	$a_3^{(2)}$	$a_2^{(2)}$	$P_{n-1}^{(1)} = P_n'(x_0)$

$P_n(x)$ ima točno n korenov

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - x_0) + P_n(x_0)$$

$$P_n'(x) = P_{n-1}^{(1)\prime}(x) \cdot (x - x_0) + P_n^{(1)}(x) \cdot 1$$

$$a_n^{(1)} \cdot a_{n-1}^{(2)} \dots a_2^{(2)} + P_{n-1}^{(1)}(x_0) = P_n'(x_0)$$

$$P_n^{(k)}(x_0) = k! \cdot P_{n-k}(x_0)$$

$$P_{n-k}(x_0) = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)h}{1!} + \frac{f''(x_0)h^2}{2!} + \dots$$

Hornerjev postopek lahko uporabimo pri Laguerovi metodi. Postopek nam da razvoj polinoma v Taylorjevo vrsto. Izračunamo $P_n(x) = 0$, nato $P_n'(x_0), P_n(x_0)$, ko izberem začetni približek x_0

$$x_{i+1} = x_i - \frac{P_n(x_i)}{P_{n-1}^{(1)}(x_i)}$$

$x^{(1)}$

$P_n(x^{(1)}) = 0 = P^{(1)}(x)(x - x_0) + 0$

PRINCIP DIREKTNIH METOD ZA REŠ. LIN. EN. 9

Direktne metode so takšne, pri katerih pridemo po natančno določenih algebraičnih operacijah do rešitve. Število operacij je odvisno samo od velikosti sistema enačb.

$A = L \cdot R$ → zgornja Δ matrika / → spodnja Δ matrika } razcepimo na 2 matriki

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = l_{11} \cdot r_{11}$

$a_{12} = l_{11} \cdot r_{12}$

$\vdots$

n^2 enačb in $n^2 + n$ neznank

GAUSSOV ALGORITEM ZA REŠ. LIN. ENAČB 10

Sistem linearnih enačb

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_n$$

<u>eliminacija</u>

$E_2 - l_{21} E_1 \rightarrow a_{22} = \dots$

$-l_{21} b_1 + b_2 \rightarrow b_2$

vrstica ... k prvemu 2. vrstic

$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$

$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} = b_i l_{i1} \dots$

Z E_1 množimo eno enačbo, da dobimo negativen koef. ene od drugih enačb.

S postopkom eliminacije nadaljujemo, da dobimo trikotno matriko oz. ekvivalenten sistem

$$r_{11} x_1 + r_{12} x_2 + \dots + r_{1n} x_n = b_1$$

$$r_{22} x_2 + \dots + r_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$r_{nn} x_n = b_n$$

Eliminacijo izvajamo z množenjem vrstic z večkratnikom in seštevanjem enačb.

<u>Težave</u>: - pivotirani element ne sme biti ∅

- pivotirani element je lahko zelo majhen, kvocienti so potem zelo veliki in potem so zaokrožitvene napake zelo velike in dobimo izračunano rešitev z velikimi napakami

Pri tej metodi na vsakem koraku eliminacije eliminiramo po eno neznanko iz enačb pod glavno diagonalo.

LU RAZCEP KVADRATNE MATRIKE 11

Vsako matriko se da zapisati kot produkt dveh matrik $A = BC$

$A = L \cdot U$ → zgornja trikotna matrika / → spodnja trikotna matrika

Zahteva najmanj računskih operacij. Matriko razcepimo le enkrat, potem pa rešimo dva trikotna sistema enačb.

<u>Algoritem metode</u>

1. Izvedemo Gaussov postopek eliminacije in dobimo matriki U in L

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^* & a_{23}^* \\ 0 & 0 & a_{33}^* \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32}^* & 1 \end{bmatrix}$$

2. Izračunamo pomožni vektor b' po enačbah

$$b_1' = b_1 \qquad b_i' = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} b_k' \qquad (i = 2, 3, \dots n)$$

elementi matrike V

3. Izračunamo vektor x po formulah

$$x_n = \frac{b_n'}{U_{nn}} \qquad x_i = \frac{b_i' - \sum_{k=i+1}^{n} U_{ik} x_k}{U_{ii}} \qquad (i = n-1, n-2, \dots, 1)$$

DETERMINANTA KVADRATNE MATRIKE

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot f_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det = a_{21} \cdot (a_{12} \cdot f_{21} - a_{22})$$

$$f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Če imamo trikotno determinanto jo izračunamo po

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Tudi navadno determinanto lahko prevedemo na trikotno ob upoštevanju, da vrednost determinante pri tem nismo spremenili (normiranje vrstic in pivotiranje).

INVERZNA MATRIKA KVADRATNE MATRIKE

Če sta A in B kvadratni matriki $\rightarrow AB = BA = E$, pri čemer je B inverzna matrika matriki A in jo lahko označimo z A^{-1}. Glede na definicijo $A \cdot B = E$ se lahko prevede na reševanje sistema n^2 enačb z n^2 neznankami. Te so elementi matrike B.

Ta sistem pa lahko rešimo po Gaussovi eliminaciji:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \text{razširjena oblika} \left[\begin{array}{cc|cc} a_{12} & a_{11} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

sistem $\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{12} f_{21} & -1 f_{21} & 1 \end{array}\right]$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

GAUSS-JORDAN ALGORITEM ZA REŠ. LIN. ENAČB

Poteka podobno Gaussovi eliminacijski metodi, z razliko da pri tej metodi tudi nad diagonalo eliminiramo neznanke. Tako ni treba reševati zgornjega trikotnega dela. Matriko prevedemo v ekvivalentno ~~matriko~~ diagonalno matriko s koeficienti 1 na glavni diagonali. Ker smo reševali razširjeno matriko nam ta transformacija prevede vektor desnih strani v vektor rešitve.

Končna rešitev $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & b_2^{(n)} \\ 0 & 0 & 1 & b_3^{(n)} \end{array}\right]$

1. korak: Prvo enačbo delimo z a_{11} in nato eliminiramo x_1 iz ostalih enačb
2. korak: Delimo drugo enačbo z a_{22} in eliminiramo x_2

primer

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & 1/7 & 1/7 \end{array}\right]$$

METODA CHOLESKEGA ZA REŠ. LIN. ENAČB

To metodo lahko uporabimo, če imamo simetrično kvadratno matriko. To je takrat, ko imamo matriko A in jo lahko preslikamo v transponirano matriko A^T. Elementi matrik so povezani z zvezo:

$$(a^T)_{ji} = a_{ij} \quad ; \quad i,j = 1,2,\dots,n$$

Drugi pogoj je, da je matrika pozitivno definitna. Vsaka simetrična matrika se da razcepiti v produkt dveh matrik

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = R^T \cdot R$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot x = b \\ R^T \cdot R \cdot x = b \\ R \cdot x = c \end{array}\right\} R^T \cdot c = b$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

koef. prve vrste matrike R izračunamo

$$r_{11} \cdot r_{11} = a_{11}$$

$$r_{11}^2 = a_{11} \rightarrow r_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$r_{12} \cdot r_{12} = a_{12} \rightarrow r_{12} = \frac{1}{r_{11}} a_{12}$$

$$r_{1n} = \frac{1}{r_{11}} \cdot a_{1n}$$

ostale vrstice pa po formuli

$$r_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}}{r_{ii}}$$

GRADIENTNA M. ZA REŠ. LIN. ENAČB 16

Z to metodo lahko rešujemo:

- simetrične matrike
- pozitivno definitne matrike
- če je matrika A skoraj prazna

Metoda temelji na iskanju minimuma funkcije več spremenljivk, ki mora imeti take lastnosti, da doseže absolutni minimum za tiste vrednosti, ki rešijo sistem linearnih enačb.

Določiti moramo začetni približek x_0 in potem iz tega začetnega približka izračunamo nov približek, formula $x_{i+1} = x_i + c \cdot v_i$

Tako dobimo nov približek. S to interacijo nadaljujemo dokler ne dosežemo željene natančnosti. Konstanto c določimo tako, da doseže funkcija ene spremenljivk $\phi(x_i + c_i v_i)$ minimum. Vektor v_i pa

$v_i = -Ax_i + b$, konstanta c je $c_i = -\frac{v_i^T v_i}{v_i^T A v_i}$

napaka: $\underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} < \varepsilon}$

ko dosežemo pogoj interacijo prekinemo

JACOBIJEVA M. ZA REŠEVANJE LIN. ENAČB 17

Ta metoda spada med interatimne metode. Jacobijeva metoda konvergira, če je vsota absolutnih vrednosti izven diagonalnih elementov v matriki A manjša od absolutne vrednosti diagonalnega elementa.

Najprej moramo sistem zapisati v obliki

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$

Nato izberemo začetni približek x_0: $x^{(j+1)} = C x^{(j)} + a$

nove približke računamo iz prejšnjih približkov in ta postopek interacij ponavljamo dokler ne dosežemo zahtevane točnosti ε.

$$x_i^{(j+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{ik}}{a_{ii}} x_k^{(j)}$$

konvergenca

Metoda konvergira, če je izpolnjen pogoj

$\max_{1 \le i \le n} \sum_{k=1}^{n} |c_{ik}| \le L_\infty < 1$

(če je vsota absolutne vrednosti izven diagonalnih elementov v matriki A manjša od absolutne vrednosti diagonalnega elementa)

napaka $\max_{1 \le i \le n} |x_i^{(j)} - x_i^{(j+1)}| < \varepsilon$

GAUSS-SEIDLOVA M. ZA REŠEVANJE LIN. ENAČB 18

Je zelo podobna Jacobijevi metodi, le da pri tej vse izračunane nove komponente rešitve takoj uporabimo pri računanju nadaljnjih komponent približkov.

Konvergenca je zagotovljena podobno kot pri Jacobijevi metodi, če je v vsaki vrstici v matriki absolutna vrednost diagonalnega elementa večja od vsote absolutnih vrednosti izven diagonalnih elementov.

Interatimna metoda

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ali matrično

$C = C_L + C_D$

$x^{j+1} = C_L \cdot x^{(j+1)} + C_D \cdot x^{j} + a$

napaka $\max_{1 \le i \le n} |x_i^{(j)} \overset{\text{korak}}{-} x_i^{(j+1)}| < \varepsilon$

NAVADNA INTERACIJSKA M. ZA REŠ. NELIN. ENAČB 19

Rešujemo sistem nelinearnih enačb

$f_1(x,y) = 0$ in

$f_2(x,y) = 0$,

ki mu priredimo ekvivalenten sistem

$x = g_1(x,y)$

$y = g_2(x,y)$

Algoritem

- indeks i postavimo $i=0$ in izberemo začetni približek (x_0, y_0) ter dopustno relativno napako ε in predpišemo max. število interacij
- izračunamo nov približek (x_{i+1}, y_{i+1}) po enačbah $x_{i+1} = g_1(x_i, y_i)$ in $y_{i+1} = g_2(x_i, y_i)$
- če je $\left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| + \left|\frac{y_{i+1} - y_i}{y_{i+1}}\right| > \varepsilon$, povečamo i in se vrnemo na drugi korak. Sicer je par števil (x_i, y_i) dober približek rešitve sistema enačb (α, β)
- zaključimo interacijo

Zaporedje približkov $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$ konvergira k rešitvi sistema enačb, če je blizu rešitve (α, β)

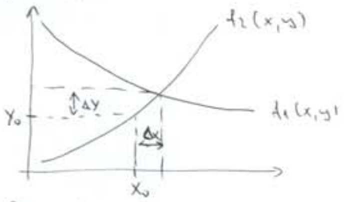
$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right| < 1$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right| < 1$$

NEWTNOVA M. ZA REŠ. SISTEMA NELIN. ENAČB 20

To je najbolj znana metoda. Kot pri vseh interativnih metodah je treba tudi tu določiti začetni približek (x_0, y_0) rešitve sistema $f_1(x,y)=0$ $f_2(x,y)=0$.

Nato s ponavljanjem prejšnjega izračunamo boljši približek



$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$$
$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

Popravka $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ izračunamo iz sistema lin. en.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_i,y_i)\Delta x_i + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_i,y_i)\Delta y_i = -f_1(x_i,y_i)$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_i,y_i)\Delta x_i + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_i,y_i)\Delta y_i = -f_2(x_i,y_i)$$

Algoritem

- izračun parcialnih odvodov $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$
- postavimo $i=0$, izberemo začetni približek (x_0,y_0), dopustno relativno napako ε in predpišemo max. število interacij
- izračunamo vrednosti parcialnih odvodov in obeh funkcij pri trenutnem približku ter rešimo tujomji sistem lin. enačb
- izračunamo nov približek
- če je že izvedeno predpisano število interacij,
- če je $\left|\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}}\right| + \left|\frac{y_{i+1}-y_i}{y_{i+1}}\right| > \varepsilon$ povečamo indeks i in se vrnemo na korak 3, drugače je približek (x_{i+1}, y_{i+1}) dober

NUMERIČ. RAČUNANJE 1. IN 2. ODVODA TAB. F.-je 21, 22

Odvajanje je problematična operacija saj med računanjem izgubimo približno polovično zanesljivost mest. Iz Taylorjeve formule definiramo:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Taylorjeva vrsta:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)\cdot h^2}{2} + \frac{f'''(x)h^3}{6} + \dots$$

Taylo. vrsta za $x-h$:

$$f'(x-h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-h(x-h)}{h}$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x) + \frac{f''(x)\cdot h^2}{2} - \frac{f'''(x)h^3}{6} \dots$$

Če obe vrsti odštejemo dobimo centralno diferencialno formulo za 1. odvod:

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h) \to \text{ocena napake metode } \left(\frac{y'''h^2}{6}\right)$$

Algoritem

- tabeliramo funkcijo
- računamo odvode v podanih točkah; $h = y_{i+1} - x_i$
- $y_{ii} = \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h)y(x)}{y}$

Če obe zaporedni vrsti seštejemo dobimo centralno dif. formulo za 2. odvod:

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + O(h^2) \to \text{ocena napake metode } \left(\frac{h^2}{12} y^{iv}(\xi)\right)$$

Tabelični odvod:

x	y	y'
x_0	y_0	y_0'
⋮	⋮	⋮
x_n	y_n	y_n'

TRAPEZNA M. ZA RAČUNANJE DOLOČENEGA INTEGRALA 23

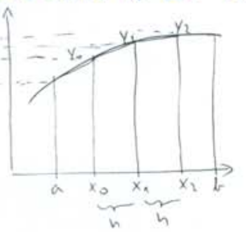


Tabela mora biti ekvidistančna $x_{i+1} - x_i = h = \text{konst.}$

$$I_i = h\frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1})$$

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} I_i = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + 2y_n) - \underbrace{\frac{(b-a)h^2}{12}\cdot f''(\xi)}_{\text{napaka metode}}$$

Ocena napake

$$\frac{kh^2}{4} = \frac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{3}$$

manjši kot je h, manjša bo napaka!

SIMPSONOVA METODA ZA RAČ. DOL. INTEGRALA 24

Funkcija mora biti podana tabelarično. Tabela je ekvidistančna, funkcija je tabelirana med tremi zaporednimi točkami, krivuljo nadomestimo s kvadratno parabolo med dvema točkama.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx S_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) = \frac{b-a}{180}h^4 f^{(iv)}(\xi)$$

Napaka

$$\frac{S_{\frac{h}{2}} - S_h}{15}$$

ta metoda je boljša od trapezne zaradi natančnosti.

Imeti moramo sodo število intervalov in liho število delitev.

ROMBERGOVA M. ZA RAČUNANJE DOL. INTEGRALA 25

Izloča napako metode iz trapeznih približkov integralov, ki so izračunani pri različnih delitvah integracijskega intervala. Temelji na dejstvu, da se napaka metode pri trapeznem približku integrala izraža z vsoto:

$$e_n = O(h^2) + O(h^4) + \dots$$

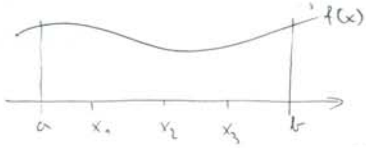
Izberemo h (običajno je $h = b - a$) in izračunamo T(

$T_h = R_{11}$	4		
$T_{\frac{h}{2}} = R_{21}$	R_{22}	16	
$T_{\frac{h}{4}} = R_{31}$	R_{32}	R_{33}	64
$T_{\frac{h}{8}} = R_{41}$	R_{42}	R_{43}	R_{44}

⋮

Napaka $\dfrac{S_{\frac{h}{2}} - S_h}{15}$

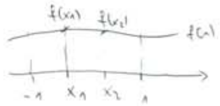
GAUSSOVA M. ZA REŠEVANJE DOLOČENEGA INTEGRALA 26



$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f(x_i) \longrightarrow \int_{-1(h)}^{1(h)} h(t)\,dt$$

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a}$$

Dvotočkovna formula (kvadratna funkcija)



$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = c_1 \cdot f(x_1) + c_2 \cdot f(x_2)$$

Točna za polinom čim višje stopnje na ~~[illegible]~~ poljubnem intervalu

$$\int_{h}^{-h} f(x)\,dh = h\left(f\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)\right) + O(h^5)$$

EULERJEVA M. ZA REŠ. ZAČETNEGA PROBLEMA 27

Za vse začetne probleme je značilno, da je ocena globalne napake po redu za eno nižja od lokalne napake.

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2 y''(\xi)}{2}$$

ali

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) + h^2 \frac{y''(\xi)}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i) + \underbrace{\left(\frac{1}{2} h^2 y''(\xi)\right)}_{\text{napaka}}$$

Lokalna napaka Eulerjeve metode je reda 2 (oz. h^2)

Globalna napaka:

$$|y(x_i) - y_i| \leq \frac{h^1 M}{2L}\left(e^{L(x_i - a)} - 1\right) = h^1 \text{ konst.}$$

en red nižji od lokalne napake

TAYLORJEVA M. ZA REŠEVANJE ZAČETNEGA PROBLEMA 28

Formula: $y(a) = \alpha = y_0$

Taylorjeva metoda: $y_{i+1} = y_i + h \cdot T^{(n)}(x_i, y_i)$

Ocena napake: $\dfrac{y^{(n+1)}(\xi) \cdot h^{(n+1)}}{(n+1)!} = O(h^{n+1})$

$$y_{i+1} = y_i + h\left(y_i' + \frac{y_i'' h}{2!} + \dots + \frac{y^{(n)} h^{n-1}}{n!}\right) + \frac{y^{(n+1)}(\xi) \cdot h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Če imamo problem 4. reda:

$$y' = y - x^2 + 1 \quad , \quad y(0) = 0{,}5$$

$$T^{(4)} = (y - x^2 + 1 + h(y - x^2 - 2x + 1) + \frac{h^2}{2}$$

$$y'' = y' - 2x = y - x^2 + 1 - 2x$$

$$y''' = y' - 2x - 2$$

$$y''' = y - x^2 + 1 - 2x - 2$$

$$y''' = y - x^2 - 2x - 1$$

Globalna napaka ima red h^n.

Lokalna napaka ima red h^{n+1}.

RUNGE-KUTTA ZA REŠEVANJE ZAČETNEGA PROBLEMA

Globalna napaka : h^4

Lokalna napaka : $h^{4+1} = \sigma(h^5)$

$y' = f(x,y)$, $y_0 = \alpha$, $x_0 = a$

$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$

$k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$

$k_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$

$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Napaka metode : $n_p = \frac{y_k^{\frac{h}{2}} - y_k}{15}$

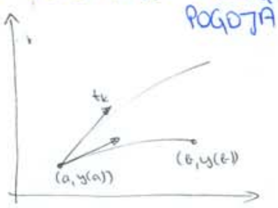
STRELSKA METODA ZA REŠEVANJE ROBNEGA POGOJA

$y'' = f(x,y,y')$

$y(a) = \alpha$

$y_k'(a) = t$

$\lim_{k\to\infty} t_k = t$



$y(b,t) = \beta = y(b)$, spreminjamo t, da dosežemo b

Robni pogoj prevedemo na začetni problem.

Rešimo enačbo $y(b,t) - \beta = 0$, kjer je t neznanka z sekantno metodo:

$t_{i+1} = t_i - (y(b,t) - \beta)\frac{t_{i-1} - t_i}{y(b,t_{i-1}) - y(b,t_i)}$

$y'' = f(x,y,y'')$ $\quad a < x < b$

$y(a) = \alpha$

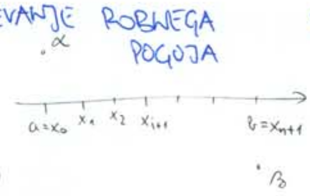
$y(b) = \beta$

DIFERENČNA METODA, REŠEVANJE ROBNEGA POGOJA

$y'' = f(x,y,y')$ $\quad a < x < b$

$y(a) = \alpha$

$y(b) = \beta$ $\quad x_i = a + ih$



$[a,b]$ razdelimo na $n+1$ delov

h = konst. (ekvidistančna tabela)

$h = \frac{b-a}{n+1}$

$$\left.\begin{aligned} y_i' &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\xi) \\ y_i'' &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot y^{(iv)}(\xi_i) \end{aligned}\right\}\ \text{diferenčne formule}$$

$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot y^{(iv)}(\xi_i) = f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\eta))$

$i = 0, 1, 1, \dots, n+1$

Brez napake : $\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h})$

Red napake : $\sigma(h^2)$

Homogena enačba: $n'' + P(x) \cdot n' + g(x) \cdot n = 0$

$y = y_p + n$

Splošna rešitev :

$n(a) = 0$, $n'(a) = 1$

$y(x) = y_p(x) + \frac{\beta - y_p(b)}{n(b)} n(x)$, $y(b) = y_p(b) + \frac{\beta - y_p(b)}{y_p(b)} \cdot n(b)$

$y(a) = y_p(a)$

$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$; $y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$

DIFERENČNA METODA, LIN. ROBNI POGOJ

$y'' + p(x)y' + g(x) \cdot y = r(x)$

$y_p(\alpha) = \alpha$

$y_p'(\alpha) = 0$

V točki x_i :

$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + P(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + g(x_i) y_i = r(x_i)$

$y_{i-1}(1 - \frac{p(x_i)h}{2}) + y_i(-2 + g(x_i)h^2) + y_{i+1}(1 + \frac{p(x)h}{2}) = r(x_i) \cdot h^2$

Linearni sistem enačb - robni pogoji

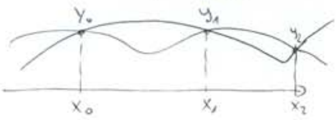
$i=1$: $y_1(-2 + q(x_1) \cdot h^2) + y_2(1 + \frac{p(x_1) \cdot h}{2}) = r(x_1)h^2 - \alpha(1 - \frac{p(x_1) \cdot h}{2})$

$i=n$: $y_{n-1}(1 - \frac{p(x_n) \cdot h}{2}) + y_n(-2 + q(x_n)h^2) = r(x_n) \cdot h^2 - \beta(1 + \frac{p(x_n) \cdot h}{2})$

METODA NAJMANJŠIH KVADRATOV, LIN. REGRESIJA 33

$y = f(x, a_1, a_2, \dots a_k)\ k << n$

$\sum_{i=1}^{n} (y, f(x_i))^2 = \text{minimalno}$



Poiskati moramo krivuljo $y = f(x)$, ki se tem točkam (presečišča) najbolj prilega.

$\sum_{i=1}^{n} e_i \to$ čim manjše ($\oplus$ in $\ominus$ vrednosti, možna $\Sigma = \emptyset$) ni ok!

$\sum_{i=1}^{n} |e_i| \to$ f-ja ni odvedljiva, zato vzamemo najmanjše kvadr.

$E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \qquad E(a_1, \dots, a_n) = \sum (y_i - f(x, a_1, \dots, a_k))^2$

$f(x) = a + bx$

$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i))^2$

$\frac{\partial E}{\partial a} = 2 \cdot \sum (y_i - (a + bx_i)) \cdot (-1)$

$\frac{\partial E}{\partial b} = 2 \cdot \sum (y_i - (a + bx_i))(-x_i) \qquad$ ($= \emptyset$, pogoj za ekstrem

$2 \sum (y_i - (a + bx_i))(-1) = 0$

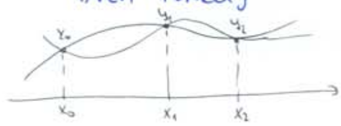
$2 \sum (y_i - (a + bx_i))(-x_i) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i &= a + b \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i &= a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}\right\}$$ sistem enačb za določitev koef. reg. premice

METODA NAJMANJŠIH KVADRATOV, LIN. KOMBINACIJA DVEH FUNKCIJ 34

$y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_k)\ k << n$

$\sum_{i=1}^{n} (y, f(x_i))^2 = \text{minimalno}$



Poiskati moramo krivuljo $y = f(x)$, ki se točkam (presečišče!) najbolj prilega.

$\sum_{i=1}^{n} |e_i| \to f$ ni odvedljiva, vzamemo najmanjše kvadrate

$E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \qquad E(a_1, \dots, a_n) = \sum (y_i - f(x, a_1, \dots, a_k))^2$

Razred funkcij $h_1(x), h_2(x), \dots, h_k(x)$

$f(x, a_1, \dots, a_k) = a_1 h_1(x) + a_2 h_2(x) + \dots + a_k h_k(x)$

$y = a h_1(x) + b h_2(x)$

$E = (x, a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a h_1(x) + b h_2(x)))^2$

$\frac{\partial E}{a} = 2 \sum (y_i - (a h_1(x_i) + b h_2(x_i))) \cdot (-h_1(x_i)),\ (= \emptyset)$

$\frac{\partial E}{b} = 2 \sum (y_i - (a h_1(x_i) + b h_2(x_i))) \cdot (-h_2(x_i))\ (= \emptyset)$

$$\boxed{\begin{aligned} a \sum_{i=1}^{n} h_1^2(x_i) + b \sum_{i=1}^{n} h_1(x_i) - h_2(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot h_1(x_i) \\ a \sum_{i=1}^{n} h_1(x_i) \cdot h_2(x_i) + b \cdot \sum_{i=1}^{n} h_2(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot h_2(x_i) \end{aligned}}$$

RAZLIKA MED INTERPOLACIJO IN APROKSIMACIJO 35

Aproksimacija

n - točk

$y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$

$k << n$

$E = \sum_{i=1}^{n} |e_i|, \quad E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$

$E = (a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a_1, \dots, a_n))^2$

Metoda funkcijo popiše lepše.

Interpolacija

$n+1$ točka

Krivulja poteka točno skozi točke

$P_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

(skozi interpolacijski polinom)

Metoda funkcijo popiše bolj natančno

LAGRANGEOV INTERP. POLINOM 36

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
x_1	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}(x) \quad , \alpha_k^{(n)}(x) = x - x_0$

$\alpha_k^{(n)}(x) = \frac{\pi_k^{(n)}(x)}{\pi_k^{(n)}(x_k)}$

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_k \cdot \alpha_k^{(n)}(x)$

NEWTNOV INTERP. POLINOM 37

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_n)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$y_0 = a_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

$$y_2 = a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$\vdots$$

$$y_n = a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n-x_0)(x_n-x_1) + \ldots + a_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})$$

Dobimo trikotni sistem enačb, ki jih rešimo

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}, \quad a_2 = \frac{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}, \ldots$$

Napaka:

$$|f(x) - P_n(x)| \approx f(x) - P_n(x) = \frac{y}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \Pi(n+1)$$

Metodo lahko uporabimo za hkratno računanje več vrednosti interpolacijskega polinoma, pri gostoti interpolacijske tabele in pri risanju interpolacijske funkcije na zaslon.

AITKENOVA METODA INTERP. POLINOMA 38

Računamo neposredno vrednost interpolacijskega polinoma in na vsakem koraku višjega za eno stopnjo. Z računanjem prekinemo, ko se zaporedni interp. vrednosti ločita za manj od dopustne napake.

$$P_{ij} = \frac{1}{x_i - x_{j-1}} \begin{vmatrix} P_{i-1,j-1} & x_{j-1}-x \\ P_{i,j-1} & x_i - x \end{vmatrix}$$

$$j = 1, 2, \ldots n$$

$$i = j, j+1, \ldots n$$

$$P_{11} = \frac{1}{x_1-x_0} \begin{vmatrix} P_{00} & x_0-x \\ P_{10} & x_1-x \end{vmatrix}$$

$$P_{22} = \frac{1}{x_2-x_1} \begin{vmatrix} P_{11} & x_1-x \\ P_{21} & x_2-x \end{vmatrix}$$

Metodo uporabimo, ko računamo eno interpolacijsko vrednost iz znane tabele.

Računska shema:

x	y					
x_0	P_{00}					$x_0 - x$
x_1	P_{10}	P_{11}				$x_1 - x$
x_2	P_{20}	P_{21}	P_{22}			$x_2 - x$
$\vdots$	$\vdots$					
x_n	P_{n0}	P_{n1}	$\ldots$	$\ldots$	P_{nn}	$x_n - x$

KAJ RAČUNAMO PRI INVERZNI INTERPOL.? 39

Računamo lahko na dva načina:

Pri prvem podamo tabelo inverzne funkcije $x = x(y)$; do nje pridemo tako, da zamenjamo pomen neodvisne in odvisne spremenljivke v tabeli funkcije $y = f(x)$. Če v tej tabeli zamenjamo stolpce dobimo tabelo inverzne funkcije $x = x(y)$. Tu lahko nastopi težava, saj tabela inverzne f.-je verjetno ni ~~ekvidistantna~~ enolična.

Po drugem načinu pa rešujemo enačbo $f(x) = y$, kjer je odvisnost $y = f(x)$ dana tabelarično in je y konstanta. Rešitev enačbe (1) $f(x) - y = 0$ računamo iterativno po kakšni metodi (npr. bisekcijski), $f(x)$ pa nadomestimo z interpolacijskim polinomom. Včasih če je tabela ~~ekvidistantna~~ enolična, pa izračunamo kar koeficiente interp. polinoma $P_m(x)$ skozi primerno izbranih $m+1$ točk in namesto enačbe (1) rešujem enačbo $P_m(x) = y$.

KAJ SO ZLEPKI, KUBIČNI ZLEPKI 40

Zlepki so povezani polinomi velikega interpolacijskega polinoma, ki ga razdelimo na več manjših interpol. polinomov nižje stopnje od prvotnega.

Kubični zlepki so definirani na $[x_i, x_{i+1}]$ in jih izračunamo

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$

Pogoji za zlepek:

$$S_x = \sum_{i=0}^{n-1} S_i(x)$$

$$S_i(x_i) = y_i$$

$$S_i(x_i+n) = y_i$$

Pogoj zvezne odvedljivosti:

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_i)$$

$$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_i)$$

Kubični zlepek je sestavljen iz kubičnih zlepkov. Različne zlepke dobimo zaradi različno zahtevanih pogojev.