Numerična napaka

7. VAJA

7.1 Numerična napaka-kvadratna enačba

Izračunaj kvadratno enačbo $Ax^2 + Bx + C = 0$

Rešitve izračunaj na dva načina:

$A = 1;\quad B = 1, 10, 100, \ldots, 10^7;\quad C = -3.$

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

$$x_{1,2} = \frac{-2C}{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}.$$

Izpeljava:

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

$$x_{1,2} = \frac{\left(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\right)\left(-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}\right)}{2A\left(-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}\right)} =$$

$$x_{1,2} = \frac{B^2 - B^2 + 4AC}{2A\left(-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}\right)} = \frac{2C}{-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}$$

Naredi preizkus tako, da rešitve vstaviš v kvadratno enačbo. Kaj ugotoviš?

* Primer je vzet iz knjige J. Petrišič, Reševanje enačb, FS

7.1 Numerična napaka-kvadratna enačba

C:\vaje NM IR\numerične\nm\vaja 8\Untitled14.m*

File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help

```
1     %napaka kvadratne enačbe
2 -   clc; clear all; format long
3 -   a=1;b=1;c=-3;
4 -   disp '         B             x1              x2              r plus            r minus'
5 -   for i=1:9
6       %rešitev prvi način
7 -     x1=(-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);
8 -     x2=(-b-sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);
9       %preizkus
10 -    r1=a*x1^2+b*x1+c;
11 -    r2=a*x2^2+b*x2+c;
12 -    fprintf('%11i  %+15.9f  %+15.9e  %+15.9f  %+15.9f \n',b,x1,x2,r1,r2)
13 -    b=b*10;
14 -  end
15 -  disp ' '
16 -  disp '         B             x1              x2              r plus            r minus'
17 -  b=1;
18 -  for i=1:9
19      %rešitev drugi način
20 -    y1=-2*c/(b+sqrt(b*b-4*a*c));
21 -    y2=-2*c/(b-sqrt(b*b-4*a*c));
22      %preizkus
23 -    k1=a*y1^2+b*y1+c;
24 -    k2=a*y2^2+b*y2+c;
25 -    fprintf('%11i  %+15.9f  %+15.9e  %+15.9f  %+15.9f \n',b,y1,y2,k1,k2)
26 -    b=10^i;
27 -  end
```

script Ln 27 Col 4 OVR

7.1 Numerična napaka-kvadratna enačba

Rezultati

Command Window

File Edit Debug Desktop Window Help

B	x1	x2	r plus	r minus
1	+1.302775638	-2.302775638e+000	+0.000000000	+0.000000000
10	+0.291502622	-1.029150262e+001	+0.000000000	+0.000000000
100	+0.029991005	-1.000299910e+002	+0.000000000	+0.000000000
1000	+0.002999991	-1.000003000e+003	+0.000000000	+0.000000000
10000	+0.000300000	-1.000000030e+004	-0.000000004	-0.000000015
100000	+0.000030000	-1.000000000e+005	+0.000000289	+0.000000000
1000000	+0.000003000	-1.000000000e+006	+0.000022843	+0.000000000
10000000	+0.000000300	-1.000000000e+007	-0.001141310	+0.000000000
100000000	+0.000000030	-1.000000000e+008	-0.019767761	+1.000000000

B	x1	x2	r plus	r minus
1	+1.302775638	-2.302775638e+000	+0.000000000	+0.000000000
10	+0.291502622	-1.029150262e+001	+0.000000000	-0.000000000
100	+0.029991005	-1.000299910e+002	+0.000000000	-0.000000001
1000	+0.002999991	-1.000003000e+003	+0.000000000	-0.000009027
10000	+0.000300000	-1.000000031e+004	+0.000000000	+0.132542491
100000	+0.000030000	-9.999999040e+004	+0.000000000	-963.038169861
1000000	+0.000003000	-9.999923856e+005	+0.000000000	-7614380.410278320
10000000	+0.000000300	-1.000380581e+007	+0.000000000	+38072620860.609375000
100000000	+0.000000030	-1.006632960e+008	+0.000000000	+6676956158361 3.000000000

>>

OVR

7.1 Numerična napaka-kvadratna enačba

Na primeru vidimo, da dobimo pravilne rezultate pri

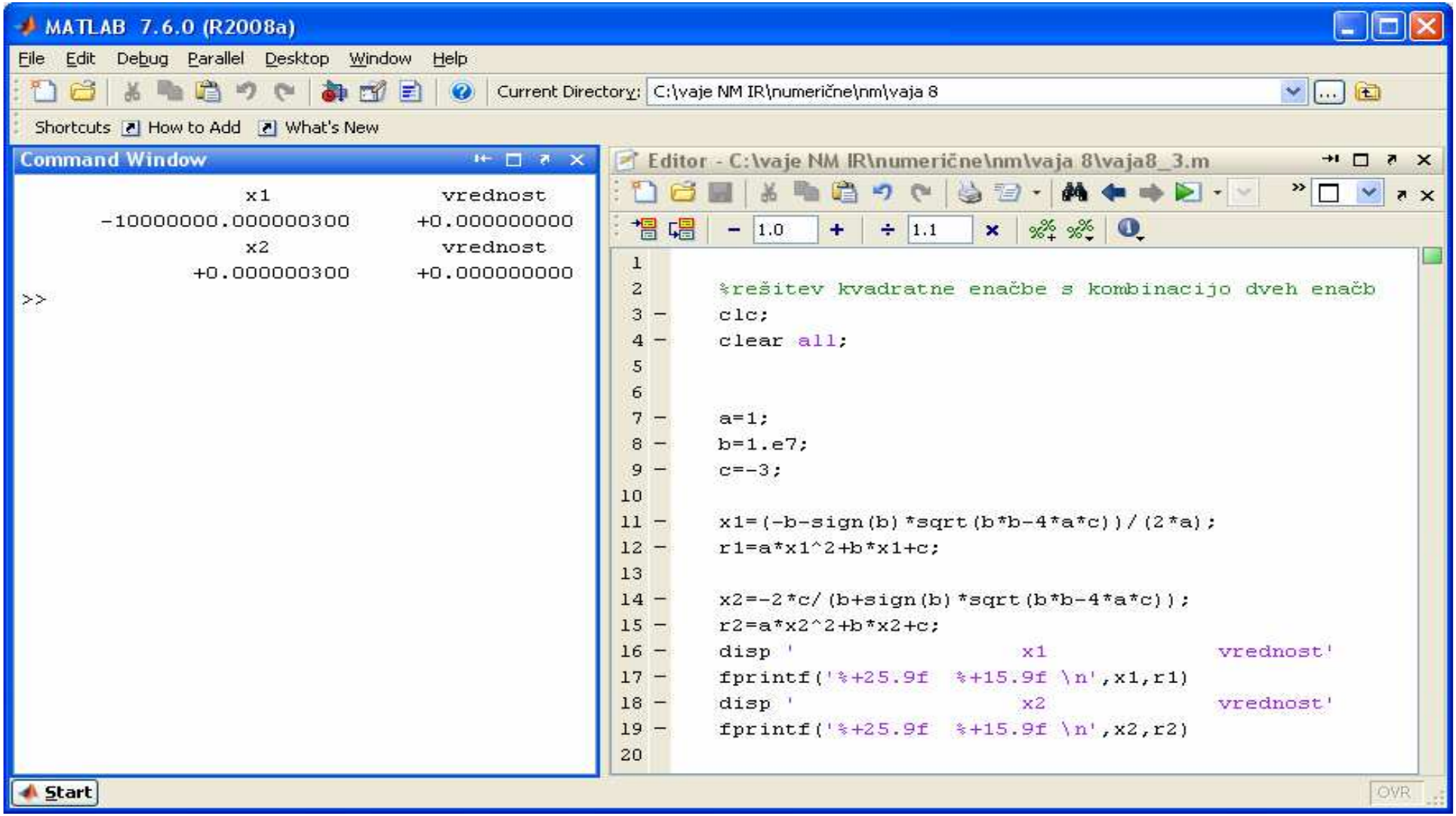
$$x_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{in} \quad x_2 = \frac{-2C}{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}.$$

Kako bi združili oba rezultata pri reševanju kvadratne enačbe?

Opomba: funkcija sign() je definirana kot:

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

7.1 Numerična napaka-kvadratna enačba



$$x_1 = \frac{-B - sign(B)\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

$$x_2 = \frac{-2C}{B + sign(B)\sqrt{B^2 - 4AC}}.$$

7.2 Numerična napaka-integral

Izračunajte integral $I_n = \int_0^1 e^{1-t} t^n dt$ s pomočjo rekurzijske formule

$$I_{n+1} = (n+1) I_n - 1; \quad n = 0,1,2,.... \qquad I_0 = e - 1$$

Izpeljava (integriranje po delih $u = e^{-t}; dv = t^n dt$):

$$I_n = e \int_0^1 e^{-t} t^n dt = \frac{e}{n+1} \left(t^{n+1} e^{-t} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-t} t^{n+1} dt \right) = \frac{1}{n+1} \left(1 + I_{n+1}\right) \Rightarrow I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$$

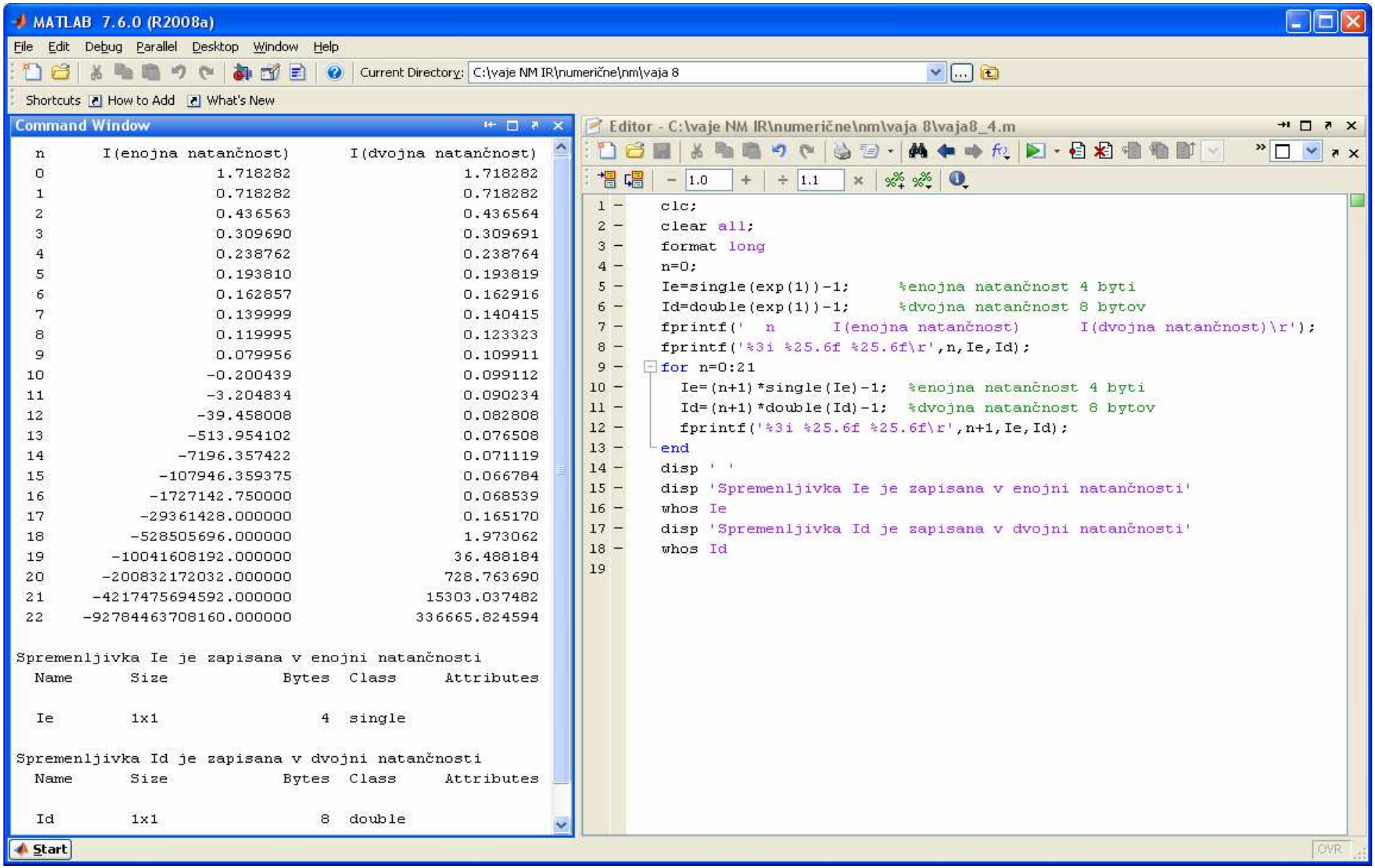
Izračunajte integral tudi pri obrnjeni rekurzijski formuli

$$I_n = \frac{I_{n+1} + 1}{n+1}$$

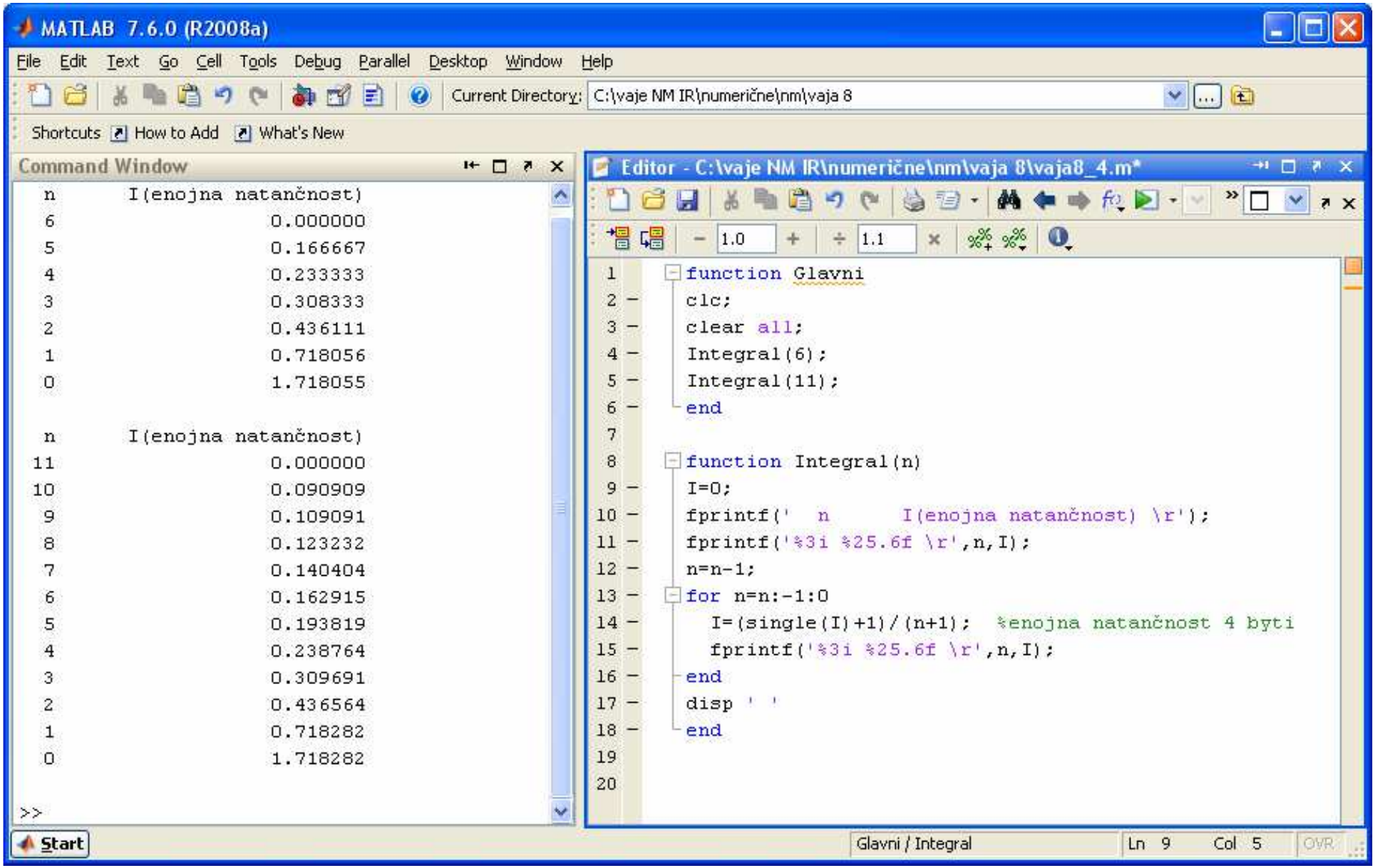
Opomba: Matlabova funkcija single() računa z manjšo natančnostjo (4 byti)

Matlabova funkcija double() računa z večjo natančnostjo (8 bytov)

7.2a Numerična napaka-integral



7.2b Numerična napaka-integral



7.3 Numerična napaka-zaporedje

Imamo zaporedje $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ldots,\frac{1}{3^n}=p_n,\quad n=0,1,2,\ldots$

Zapiši zaporedje na tri načine:

-z Matlabovim vektorskim zapisom

-kot zaporedje: $p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n,\quad p_0=1,\quad n=0,1,2,\ldots$

-kot zaporedje: $p_{n+1}=p_{n-1}-\frac{8}{3}p_n,\quad p_0=1,\quad p_1=\frac{1}{3}$

Opazuj napako pri rekurzivnem odštevanju.

7.3 Numerična napaka-zaporedje

C:\vaje NM IR\numerične\nm\vaja 8\vaja8_7.m

File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help

```
1  clc;clear all;format long
2  N=26;
3  p1 = (1/3).^(0:N);  %matlab izračun v vektorju
4
5  p2(1) = p1(1);   %začetne vrednosti
6  p2(2) = p1(2);
7  p3(1) = p1(1);
8  p3(2) = p1(2);
9
10 for n = 1:N
11     p2(n+1) = (1/3)*p2(n);     %izračun zaporedja 1/3^n
12
13 end
14 disp ' '
15 for n = 2:N,
16     p3(n+1) = p3(n-1)-8/3*p3(n);    % izračun z odštevanjem
17
18 end
19 disp ' n          Vektor                Vrsta                Odštevanje'
20 for i=1:N
21   fprintf('%3i  %18.16f   %18.16f   %18.16f\n',i,p1(i),p2(i),p3(i))
22 end
23
24 plot([p2',p3'])
25
```

script Ln 24 Col 16 OVR

7.3 Numerična napaka-zaporedje

Rezultat