

Marec 2000

EKSPERIMENTALNE METODE

odgovori na izpitna vprašanja

Boštjan Juriševič
&
Marjan Grah

Vprašanja iz starih izpitov od Eksperimentalnih metod, za izpit iz istoimenskega predmeta, ki je bil predavan na Fakulteti za strojništvo leta 2000 (pri prof. Slugi). Odgovore pripravil Marjan Grah in Boštjan Juriševič (za morebitne napake je kriv *tiskarski škrat*). Avtorja (Marjan Grah in Boštjan Juriševič) ne odgovarjata za morebitne napake v odgovorih in vprašanjih. *Če opazite morebiti kakšne napake, ali imate le pripombe jih prosim pošljite na :*

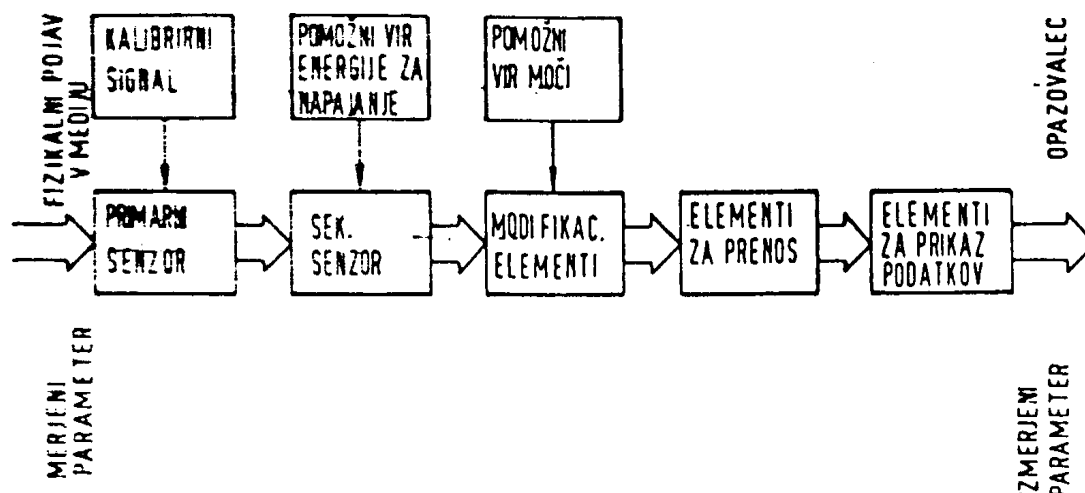
Boštjan.Jurisevic@kiss.uni-lj.si ali **Marjan.Grah@mailcity.com**

KAZALO

1.)	Zgradba merilnega sistema.....	2
2.)	Korekcijske metode outputa.....	4
3.)	Metoda filtriranja signalov	5
4.)	Filtri	7
5.)	Statične karakteristike merilnih sistemov.....	10
6.)	Dinamične karakteristike merilnih sistemov	12
7.)	Potenciometri.....	16
8.)	Merilni trakovi.....	18
9.)	Induktivni senzor	22
10.)	Kapacitivni senzor	24
11.)	Piezoelektrični senzor.....	26
12.)	Seizmični senzor.....	28
13.)	Merjenje sil.....	32
14.)	Konstruiranje dinamometra.....	35
15.)	Merjene moči.....	37
16.)	Digitalizacija signalov	37
17.)	Elementi za prenos signalov.....	38
18.)	Elementi za prikaz signalov	39
19.)	Ojačevalci.....	42
20.)	Obdelava in vrednotenje merjenih informacij.....	46
21.)	Karakteristike naključno porazdeljenih merilnih veličin	48
22.)	Vrednotenje dveh med seboj povezanih spremenljivk.....	55
23.)	Vrednotenje naključnih procesov	57

1.) Zgradba merilnega sistema

Blokovna shema splošnega merilnega sistema z upoštevanjem napajanja in kalibriranja:



Primarni senzor: pretvori sprejeto energijo iz medija in generira primeren output.

Sekundarni senzor: pretvori output iz primarnega senzorja v električno veličino (napetost, naboj,...) ali pa pretvori input neposredno v neko električno veličino.

Modifikacijski elementi: vplivajo na vrsto, velikost, obliko in druge karakteristike merjenega signala, ki prihaja iz outputa sekundarnega senzorja. To so ojačevalci, filtri, modulatorji, demodulatorji, integrator, diferenciator,...

Elementi za prenos signalov: kabel, drsni obroč, radijski valovi, mehanski, hidravlični in pnevmatični elementi.

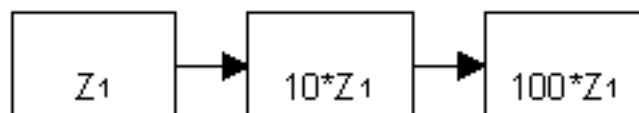
Elementi za prikaz signalov: kazalni električni elementi, x-t pisalnik, x-y pisalnik, osciloskop, PC,...

Kalibracija (umerjanje) pomeni določitev karakteristike instrumenta ($OUT = K \cdot IN + n$). Na vhod damo znan (kalibrirni) signal IN_{KAL} in zasledujemo vrednosti na izhodu OUT . Vrednosti povežemo v histerezo in določimo regresijo.

Pomožni energijski viri so potrebni, ker sicer potrebno energijo za pogon sekundarnih senzorjev in modifikacijskih elementov jemljemo iz energije merjenega signala, ki pa je včasih premajhna. Senzorji, ki jim dodajamo energijo imenujemo aktivni senzorji (LVDT, trioda, elektro-mehanski števec,...). Senzorji, ki ne potrebujejo dodatnega vira energije imenujemo pasivni senzorji (Bourdon-ova cev, membrana, plinski termometer,...).

Osnovne zahteve pri povezovanju elementov v merilni sistem

Impedanca elementov v merilni verigi: da ne pride do obremenilnega efekta (element porabi del energije signala za delovanje) mora biti vhodna (IN) impedanca vsaj 10-krat večja od izhodne (OUT) impedance predhodnega elementa.

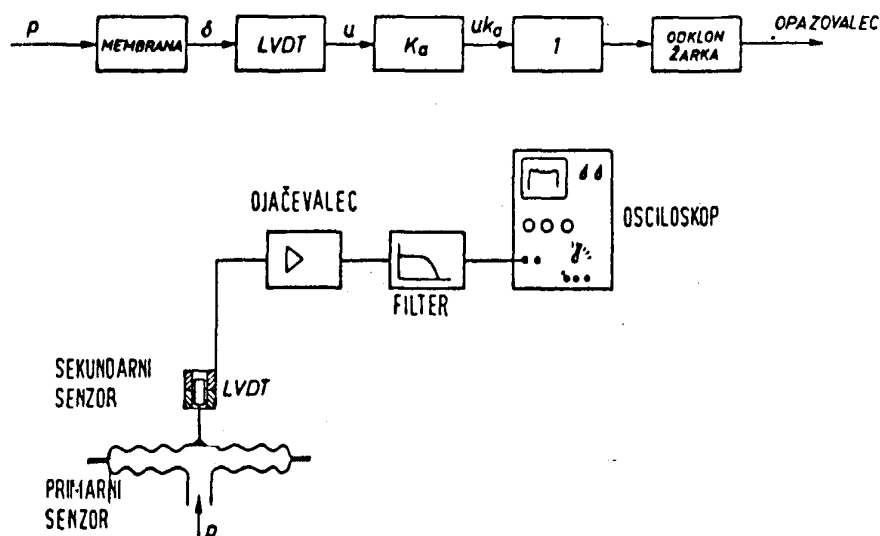


Vsi elementi morajo biti v istem kakovostnem razredu (če le eden izstopa, celoten merilni sistem ni natančen).

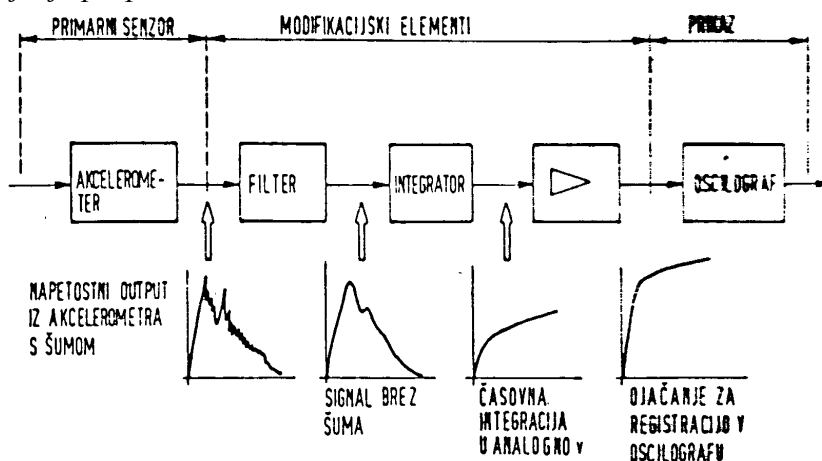
Elementi morajo biti vezani v pravilnem zaporedju. Izbira elementov mora biti taka, da je poraba energije čim manjša.

Primeri osnovnih vrst elementov merilnega sistema:

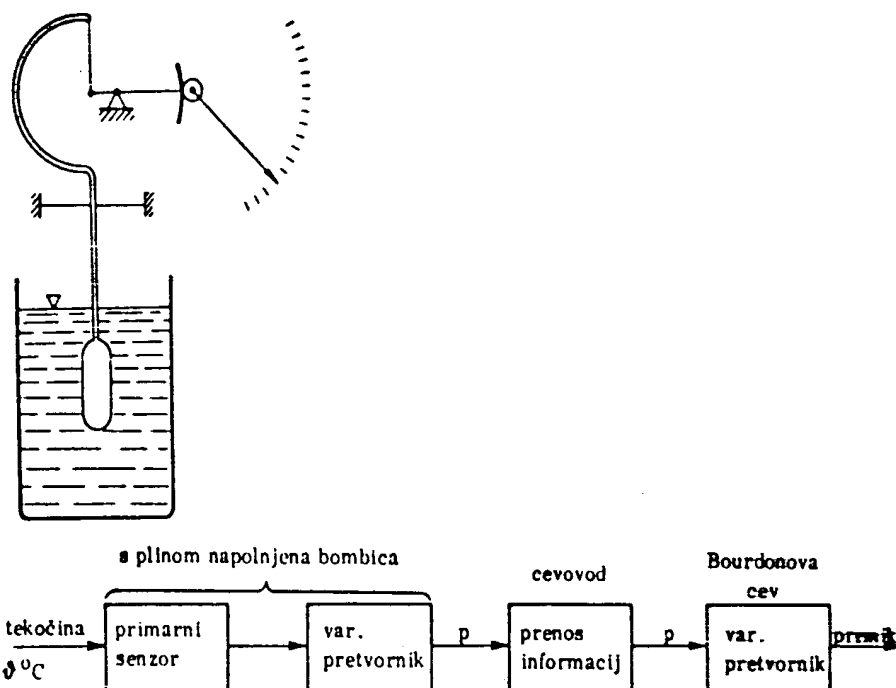
Merilni sistem za merjenje tlaka:



Merilni sistem za merjenje pospeška:



Merilni sistem za merjenje temperature z Bourdon-ovo cevjo in analiza delovanja sistema ter posameznih elementov sistema:



Z Bourdon-ovo cevjo merimo temperaturo v tekočinah. V tekočino potopimo s plinom napolnjeno bombico, ki se razširi z višanjem temperature (v bombici se viša tlak), kar povzroči širitev premera cevi, ki spremeni pritisk v pot \rightarrow pomik kazalca.

2.) Korekcijske metode outputa

Merilni sistem moramo konceptirati z ozirom na oblikovanje outputa tako, da preprečimo nezaželene vplive na koristen signal i_d .

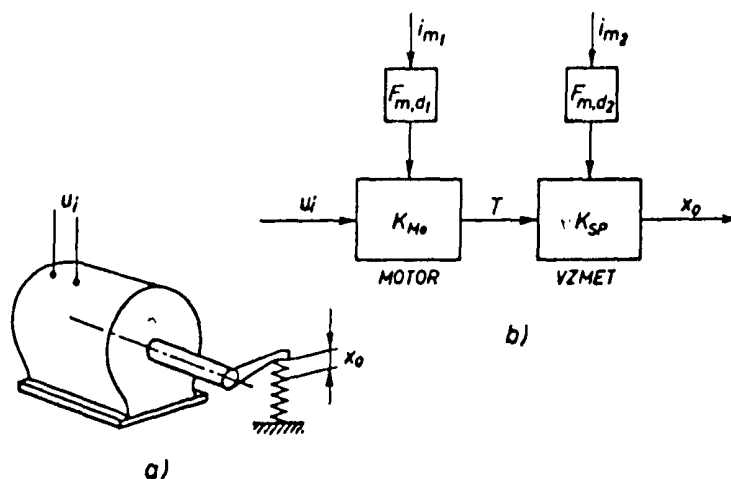
Metoda naravne neobčutljivosti:

Primarni in sekundarni senzor konstruiramo tako, da motilni signal i_i in modifikacijski signal i_m , kljub temu, da sta prisotna praktično ne vplivata na koristen signal i_d : $F_{i,d} \approx 0$; $F_{m,d} \approx 0$.

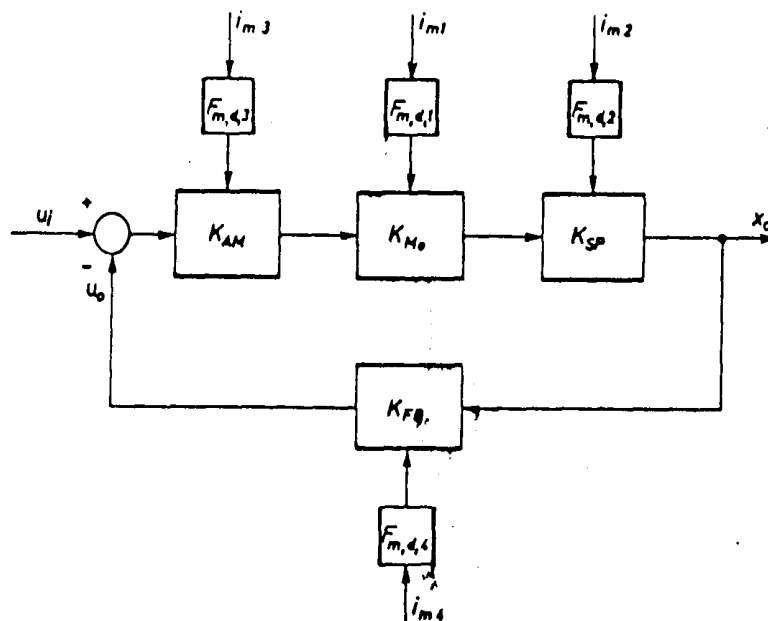
Primer je mehanska ura \rightarrow veliko trenje. Pri dinamometru izvedemo tako velik faktor dušenja, da merilni sistem ni občutljiv na visokofrekvenčne komponente sile.

Metoda povratne zveze z visoko ojačitvijo:

Odprt merilni sistem pretvorimo v sistem z zaprto zanko z visoko ojačitvijo.



i_{m1} in i_{m2} sta modifikacijska inputa, ki povzročita spremembo razmerja med IN in OUT in s tem nenatančnost meritve. V sistemu naredimo povratno zvezo:



K_{FB}element povratne zveze.

K_{AM}dodatni ojačevalec.

Transforna funkcija:

$$\frac{x_0}{U_i} = \frac{K_{AM} \cdot K_{MO} \cdot K_{SP}}{1 + K_{AM} \cdot K_{MO} \cdot K_{SP} \cdot K_{FB}}; \quad K_{AM} \gg 1 \Rightarrow K_{AM} \cdot K_{MO} \cdot K_{SP} \cdot K_{FB} \gg 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{K_{FB}} \cdot U_i$$

To pomeni, da modifikacijski elementi $i_{m1} \dots i_{m4}$ ne morejo imeti posebnega vpliva na posamezne elemente, če ostane $K_{FB} \approx \text{konst.}$ S to metodo dosežemo veliko povečanje natančnosti in linearnost merilnega sistema, hkrati pa se zaradi velike ojačitve nagibamo k nestabilnosti \rightarrow potrebna je optimalna uskladitev.

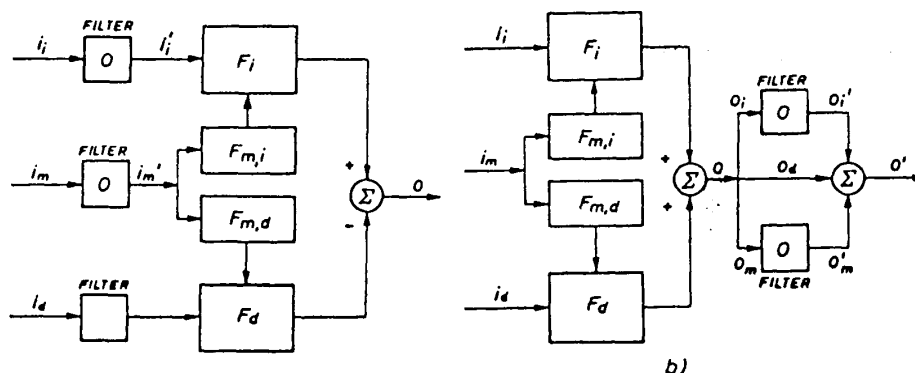
Metoda izračuna korekcije inputa:

Če imamo natančno poznan modifikacijski input i_m kot časovno funkcijo po iznosu in smeri ga lahko upoštevamo pri računskem vrednotenju merilnih rezultatov. Npr.: potek temperature prostora lahko zelo natančno zajamemo, njen vpliv pa izravnamo z računsko korekcijo rezultatov.

3.) Metoda filtriranja signalov

Ker v merilni tehniki največkrat uporabljamo oz. obdelujemo električne, mehanske, hidravlične in pnevmatske signale vseh vrst in frekvenčnih območij so bili razviti posebni elementi merilnih sistemov, tako imenovani filtri. Ti omogočajo redukcijo motilnih in modifikacijskih signalov v širokem frekvenčnem pasu z veliko fleksibilnostjo in natančnostjo.

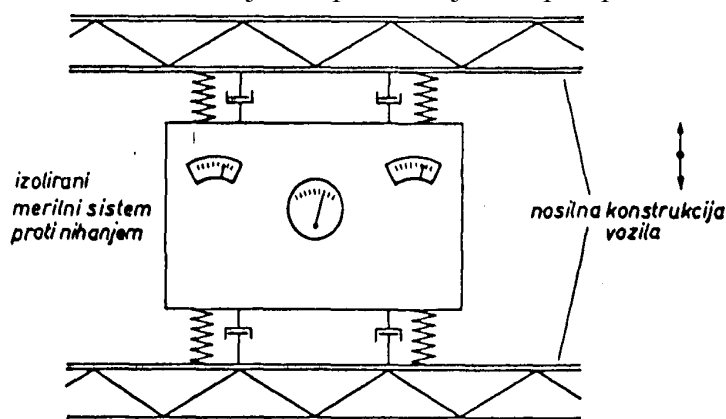
Pri filtriranju signala izberemo takšne karakteristike filtra za motilne in modifikacijske signale (i_i in i_m), da je vrednost teh signalov na izhodu iz filtra (i_i' in i_m') enaka nič. Iz filtra dobimo samo koristen signal. Druga možnost pa je, da spustimo skozi element sistema vse signale, na outputu pa namestimo filter, ki zadrži motilno in modifikacijsko komponento signala, primer b).



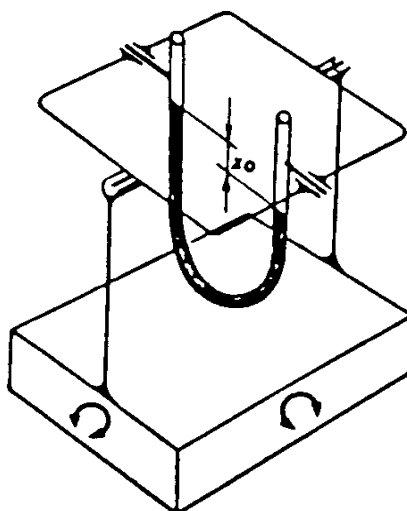
Vrste filtrov:

Mehanski filter

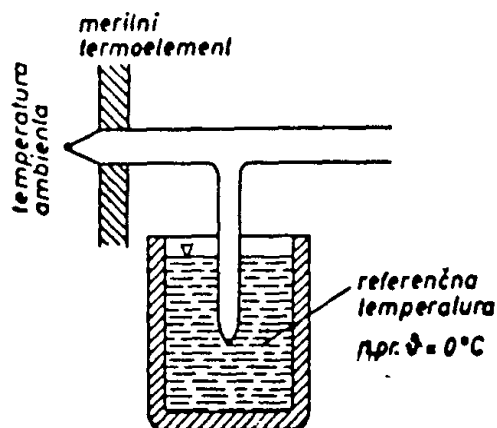
Mehanski filter služi za filtriranje nihanj, ki nastopijo pri gibanju in vplivajo na rezultat meritve. Filter predstavlja osnovni mehanski sistem masa-vzmet-dušilka (M-K-B). S primernim usklajevanjem je možno mehansko nihanje kot motilne in modifikacijske inpute ter njihov vpliv povsem izolirati.



Živosrebrni tlačni manometer s katerim želimo meriti razliko tlakov med gibanjem obesimo kardansko. Na ta način preprečimo modifikacijski vpliv pospeškov na premik živosrebrnega nihanja.

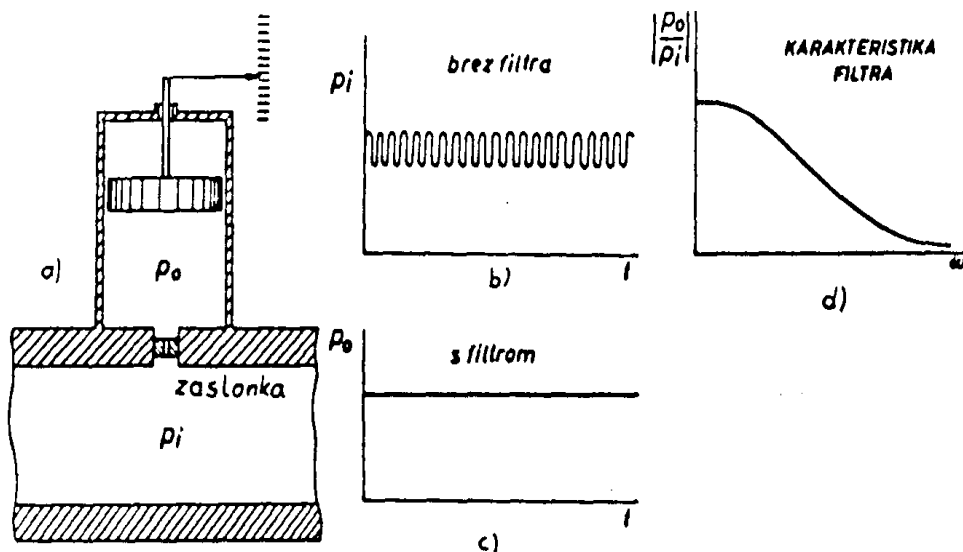


Način kompenzacije modifikacijskega inputa pri merjenju temperature: merilni termoelement naj meri proti neki referenčni temperaturi, ki mora biti ves čas merjenja konstantna. Na ta način preprečimo vpliv modifikacijskih inputov, ki so običajno rezultat variranja temperature okolice.



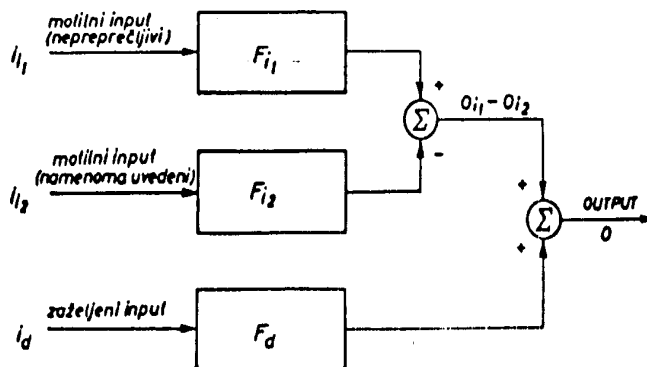
Hidravlični in pnevmatični filtri

Tlak v cevi p_i se spreminja. S primerno dimenzionirano zaslonko zadržimo motilni signal. Po filtriranju dobimo tlak p_o . Karakteristika pnevmatičnega filtra je odvisna od zaslonke, bata (mase), kazalnega instrumenta in viskoznega trenja.

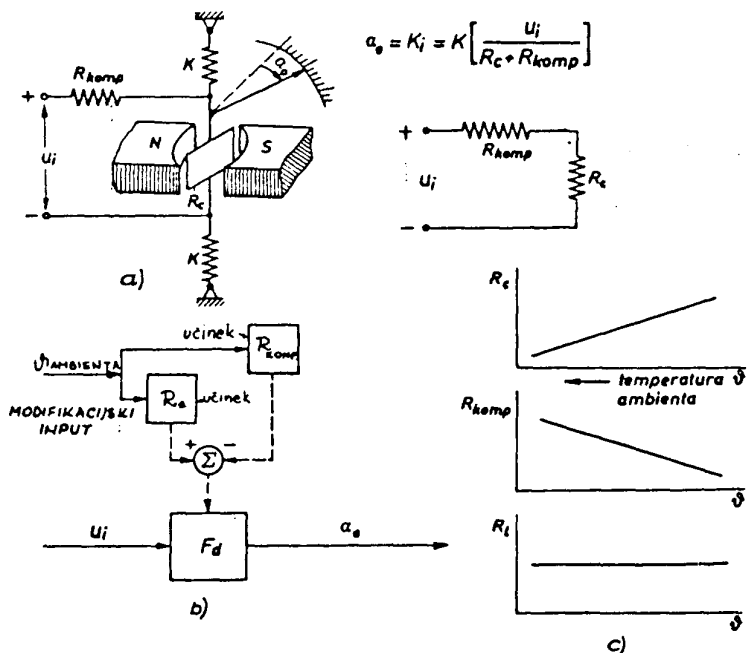


Metoda nasprotujočih se inputov:

Tam, kjer se pojavi motilni input $i_{i,1}$, katerega nikakor ne moremo preprečiti, uvedemo nov motilni input $i_{i,2}$. Ta je po iznosu enak prvemu, po smeri pa ravno obraten. V sumacijski točki se izničita ali pa ostane le majhna sprejemljiva razlika obeh motilnih outputov ($O_{i,1}-O_{i,2}$).



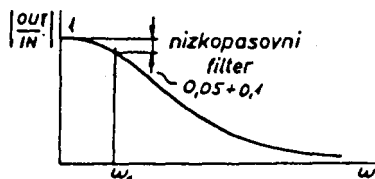
Primer: Če se spremeni temperatura okolice ϑ , povzroči ta sprememba spremembo upornosti merilne tuljave R_C . Za kompenzacijo uvedemo kompenzacijsko upornost R_{KOMP} , ki je takšna, da povišanje temperature povzroči zmanjšanje upornosti R_{KOMP} . Rezultirajoča upornost R_t kot funkcija temperature ϑ je konstantna.



4.) Filtri

S filtri filtriramo električne, mehanske, pnevmatične in hidravlične signale vseh vrst. Filtri zadržijo motilne frekvence in prepuščajo frekvence, ki so pomembne za meritev. Filtri delujejo na različne fizikalne principe (električne, mehanske, pnevmatične in hidravlične).

Nizkopasovni filter:

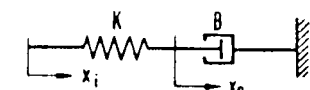


Uporabljamo ga za filtriranje visokih frekvenc. Zgrajeni so na različnih principih. Razmerje med amplitudo izhodnega in vhodnega signala je enaka 1 do neke frekvence ω_c (propustna frekvenca). Do te

frekvence je sprejemljiva uporaba filtra, ker se signal brez deformacij prenese skozi filter. Pri frekvencah, ki so večje od ω_c začne pri nizkopasovnem filtru padati amplituda outputa. Pri neki mejni frekvenci ω_m filter sploh ne prepušča inputnega signala. Širina frekvenčnega območja ($\omega_m - \omega_c$) naj bo čim manjša, ker na ta način omejujemo prehod signalov z višjimi frekvencami od ω_c . Idealni filter izpolnjuje pogoj: $\omega_m - \omega_c = 0$. Kvaliteta zavisi od približka realnega poteka frekvenčnega odgovora glede na idealnega.

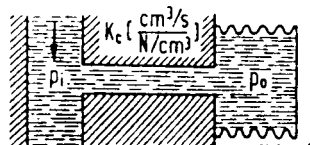
Vse izvedbe nizkopasovnih filtrov imajo enako transferno funkcijo:

$$\frac{x_o}{x_i}(D) = \frac{p_o}{p_i}(D) = \frac{u_o}{u_i}(D) = \frac{1}{\tau D + 1}$$



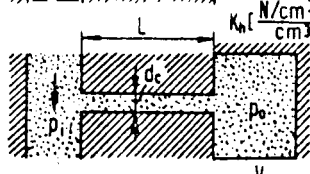
MEHANSKI
FILTER

$$\tau = \frac{B}{K}$$



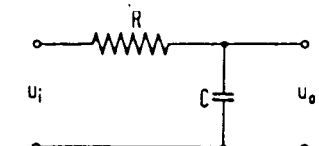
HIDRAVLICNI
FILTER

$$\tau = \frac{1}{K_h K_c}$$



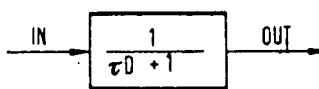
PNEVMATICNI
FILTER

$$\tau = \frac{128 \mu L V}{\pi \gamma p_o c}$$



ELEKTRIČNI
FILTER

$$\tau = RC$$



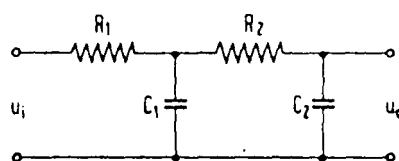
μ = viskoznost

γ = razmerje spec. toplot

p = povprečni pritisk

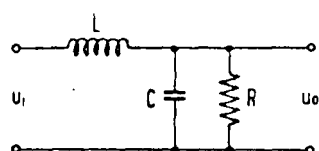
τ = časovna konstanta
filtra

Frekvenčna karakteristika filtra med ω_m in ω_c ima pri enostavnejših izvedbah naklon 10dB/dek. V tem primeru ni dovolj ostra meja frekvenčne ločljivosti. Razviti so bili električni filtri v kaskadnih izvedbah in kombinacijah RC, RC² in RCL, ki omogočajo doseči ostrejšo ločilno mejo.



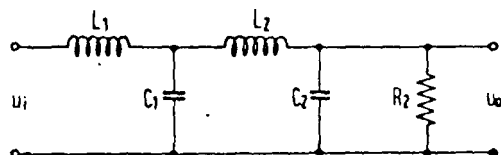
VEZAVA RC - ENOT

TE KOMBINACIJE ($R_1 C_1, R_2 C_2, R_3 C_3$)
SE LAHKO PONAVLJAJO

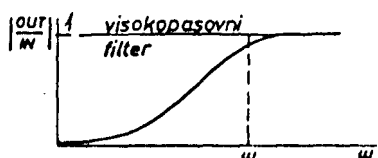


VEZAVA LCR - ENOT

TE KOMBINACIJE ($L_1 C_1, L_2 C_2, \dots$)
SE LAHKO PONAVLJAJO



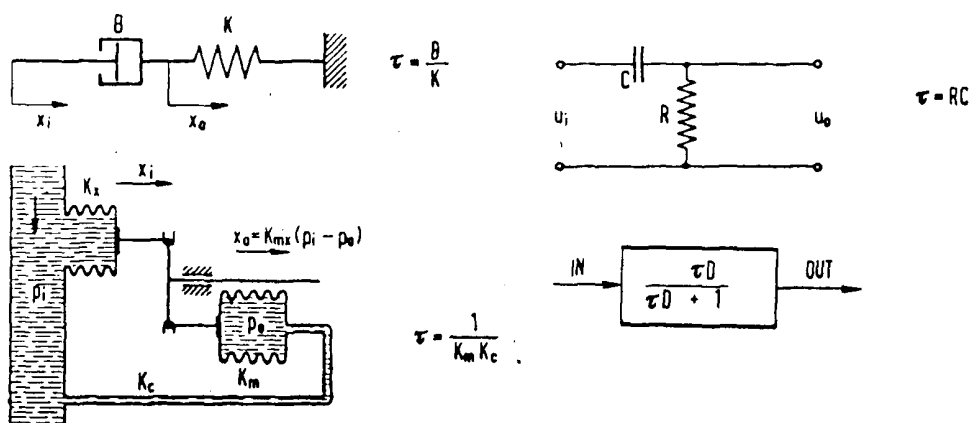
Visokopasovni filter:



Transferna funkcija visokopasovnega filtra:

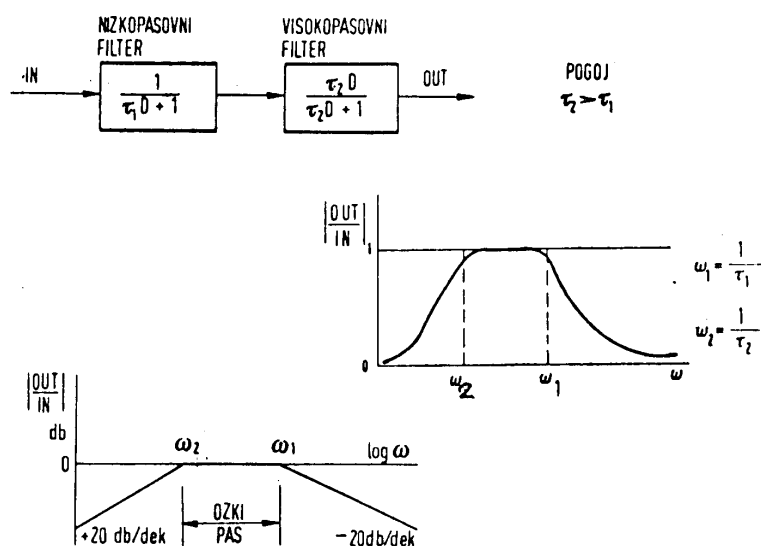
$$\frac{x_o}{x_i}(D) = \frac{x_o / K_{mx}}{p_i}(D) = \frac{u_o}{u_i}(D) = \frac{\tau D}{\tau D + 1}$$

Za dosego ostrejših propustnih frekvenc so potrebni podobni ukrepi kot pri nizkopasovnih filtri, s kaskadno vezavo RC ali RCL-vezav.



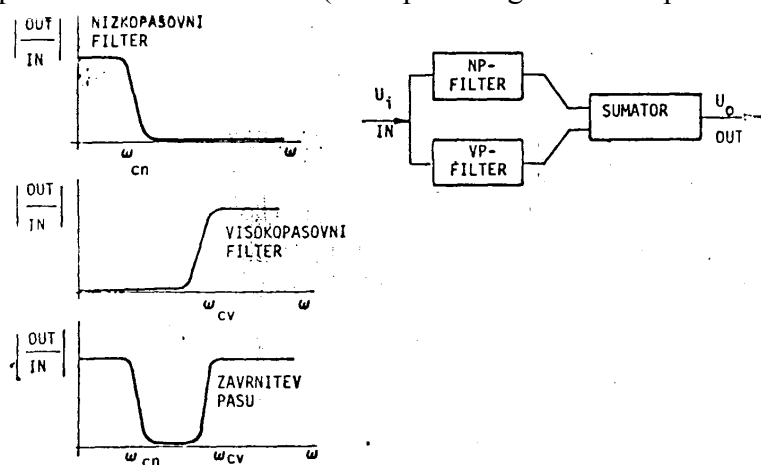
Ozkopasovni filter:

Ozkopasovni filtri so primerni za ugotavljanje izrazitih lastnih frekvenc nekega sistema. Prepušča signale v ozkem območju frekvenc, ki v primeru resonančnih pojavov omogoča propust tistega dela signala, ki prispeva k resonančni amplitudi. Ozkopasovni filter dobimo s kombinacijo nizkopasovnega in visokopasovnega filtra.

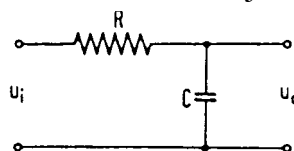


Filtri z zavrnitvijo pasu:

Te vrste filtrov se uporabljajo v nekaterih instrumentih v obliki inputnih vezav, ki imajo nalogo preprečiti vpliv znanih motilnih frekvenc na merilni proces. Ti elementi so narejeni v različnih izvedbah. Sestavljeni so iz dveh paralelno vezanih filtrov (nizkopasovnega in visokopasovnega).



Primer: Določi parametre nizkopasovnega filtra, če je impedanca ojačevalca 100Ω , senzor pa naj bi deloval v območju $100\div 1000\text{Hz}$.



$$R_0 = 100\Omega$$

$$\Delta\omega_i = 100\div 1000\text{Hz}$$

$$R, C, \tau = ?$$

$$R = 10 \cdot R_0 = 1000\Omega$$

$$\omega_n = 10 \cdot \omega_{i,\max} = 10^4\text{Hz}$$

$$\tau = \omega_n^{-1} = 10^{-4}\text{s}$$

$$\tau = R \cdot C \rightarrow C = 0,1\mu\text{F}$$

5.) Statične karakteristike merilnih sistemov

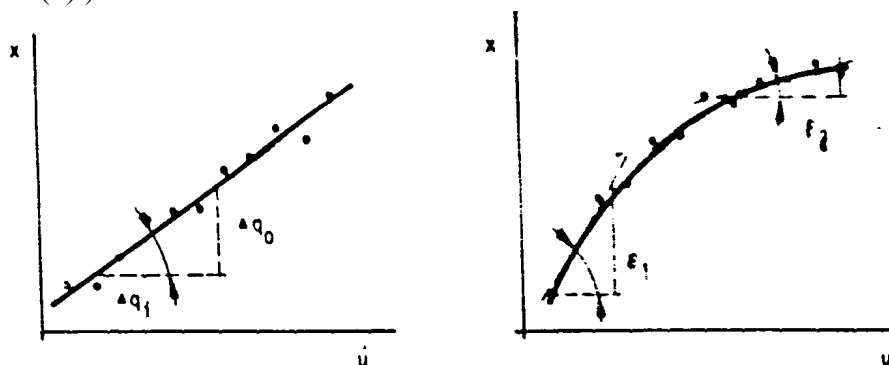
Namerno izločimo dinamične pojave iz opisa procesa.

Občutljivost:

Koncept statične ločljivosti:

$$\delta = \frac{\Delta x}{\Delta u} = \frac{\Delta q_0}{\Delta q_1} = \tan(\alpha)$$

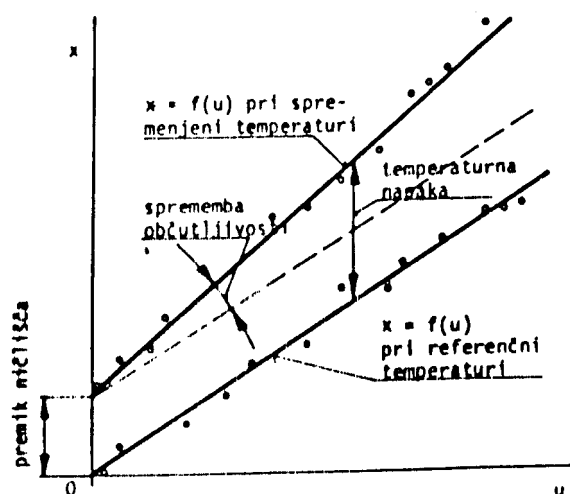
Teoretičen primer je linearna karakteristika, kjer je občutljivost konstantna. V splošnem je občutljivost funkcija vhoda ($\delta = \delta(u)$).



Med meritvijo (v merilnem območju) naj bi se občutljivost čim manj spreminjala. Glede na regresijsko premico lahko sklepamo o natančnosti meritve.

Premik ničlišča (drift) in sprememba zaradi občutljivosti:

Pri neki referenčni temperaturi dobimo določeno karakteristiko. S spreminjanjem temperature se spremeni tudi karakteristika. Eksperimenti naj potekajo pri konstantni temperaturi, instrumente pred meritvijo segrejemo oz. ohladimo na to temperaturo. Temperaturna razlika je vsota premika ničlišča in spremembe občutljivosti, ki jo povzroči premik.

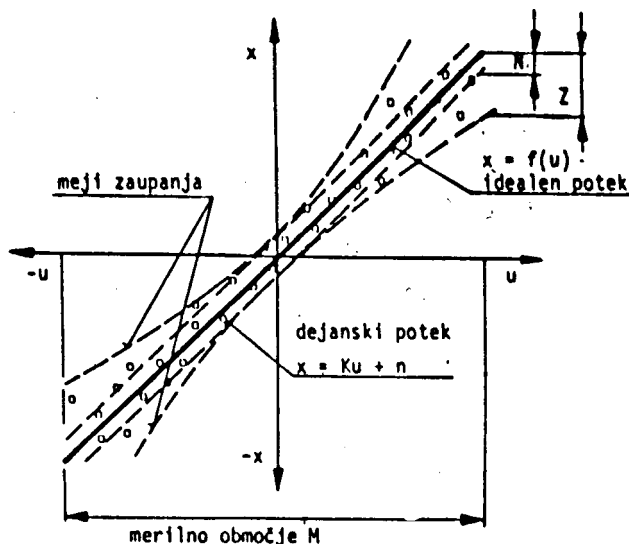


Linearnost:

Karakteristika med inputom in outputom naj bo linearna (konstantna občutljivost). Linearnost je podana v določenem območju M.

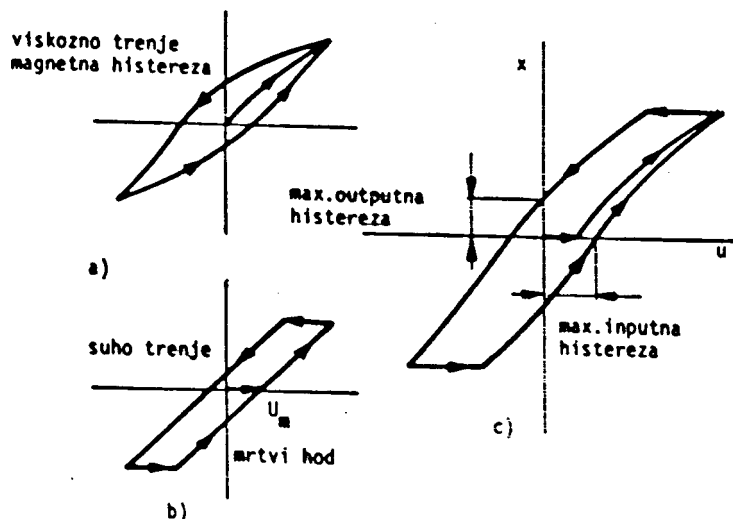
$$L = \frac{Z}{M} \cdot 100\%$$

Razsip okoli idealnega poteka je odvisna od natančnosti instrumenta. Glede na razsip potegnemo meji, v katerih se nahaja 75% vseh meritev. Statistična metoda: potegnemo meji zaupanja v katerih se nahaja 95% meritev.

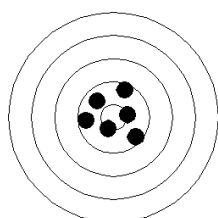


Histerezna zanka:

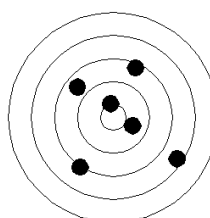
Histerezna zanka je posledica napak v konstrukciji in izdelavi, ne pa zunanjih vplivov. Merilo za napake je maksimalna outputna in inputna histereza. Do histereze lahko pride zaradi notranjega trenja v materialu. Vsak instrument ima na začetku nekaj mrtvega hoda.



Natančnost:

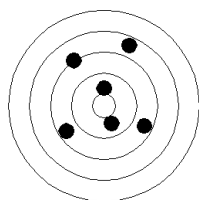


bolj natančen sistem

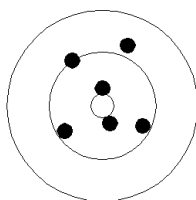


manj natančen sistem

Ločljivost:



večja ločljivost



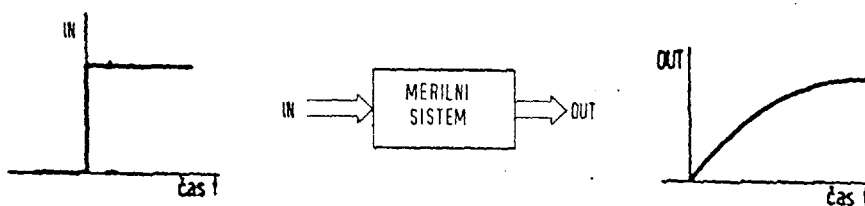
manjša ločljivost

6.) Dinamične karakteristike merilnih sistemov

Popisujejo obnašanje sistema pri dinamičnem spreminjanju vhodnega signala (inputa) ter proučevanje odziva sistema (output).

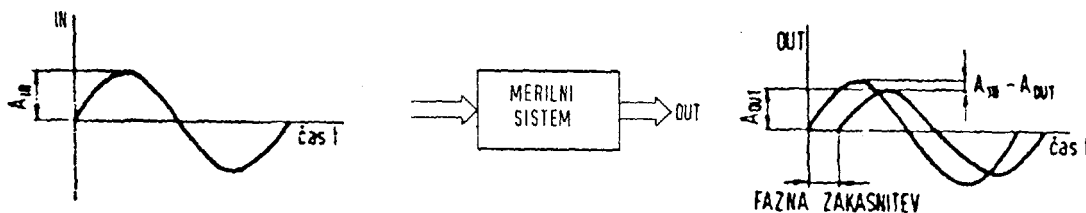
Odgovor prehoda:

Objekt vzbudimo s koračno funkcijo.

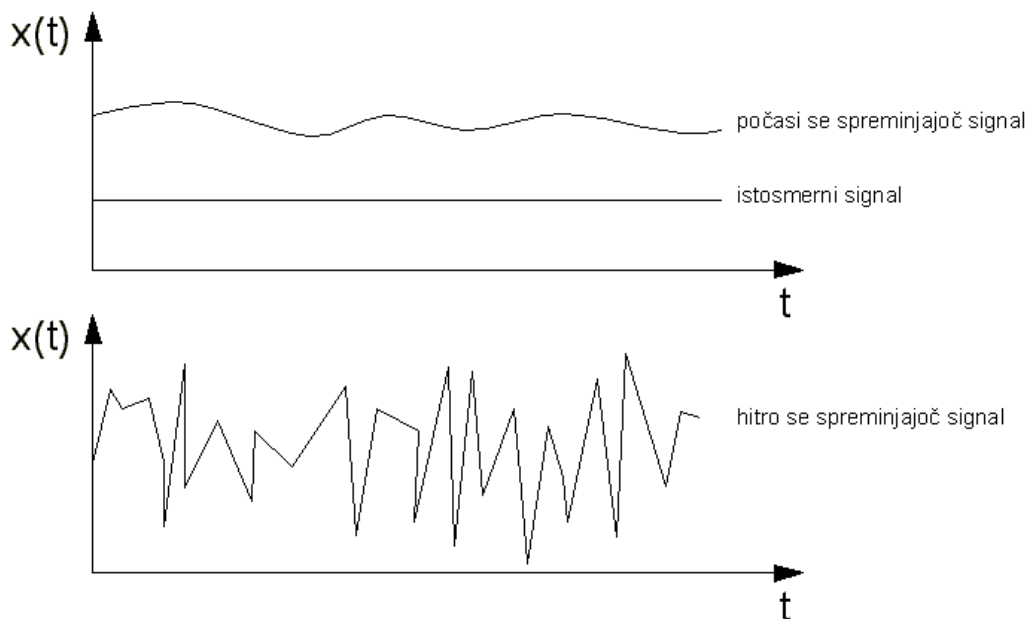


Frekvenčni odgovor:

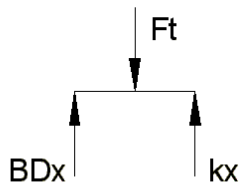
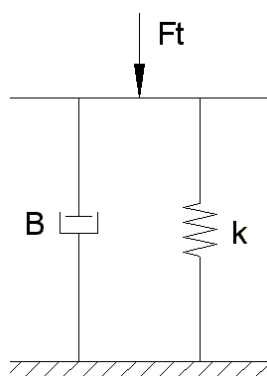
Ponavadi je problem zmanjšati amplitudno razliko, ne pa fazne zakasnitve.



Sistem z različno frekvenčno vsebino:



Sistem prvega reda:



$$B \cdot Dx + k \cdot x = F_t$$

$$\frac{B}{k} \cdot Dx + x = \frac{F_t}{k}$$

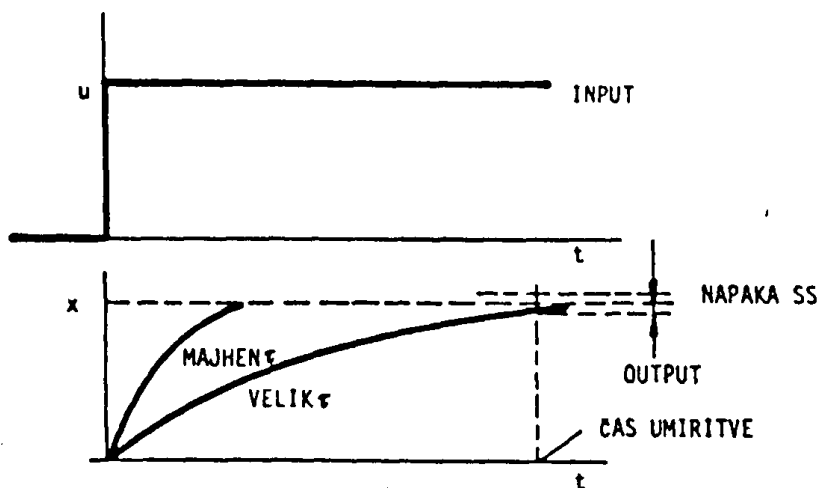
$$\tau \cdot Dx + x = \frac{F_t}{k}; \quad \tau = \frac{B}{k}$$

τ ...časovna konstanta sistema.

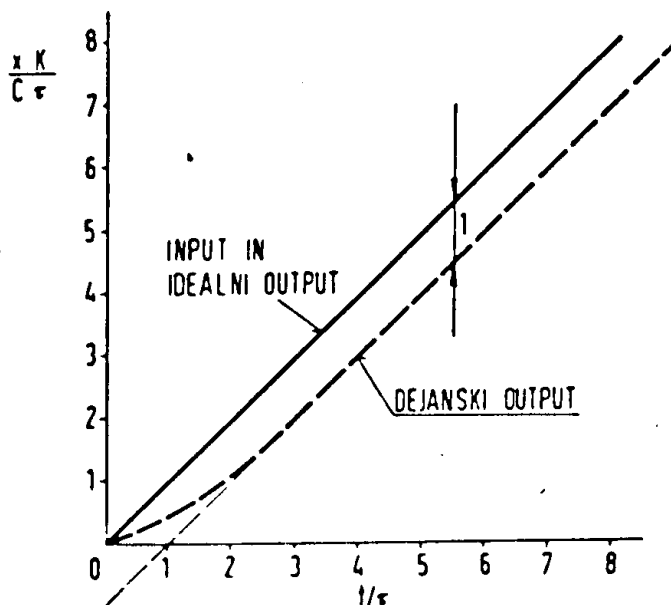
Odziv sistema reguliramo z vzmetjo k. Odgovor prehoda za koračni input: $F_t=0$, $t<0$; $F_t>0$, $t>0$. Upoštevamo še: $t=\infty$; $x=F/k=x_{ss} \rightarrow$ z manjšanjem togosti k se večja povese x.

$$\frac{x}{x_{ss}} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

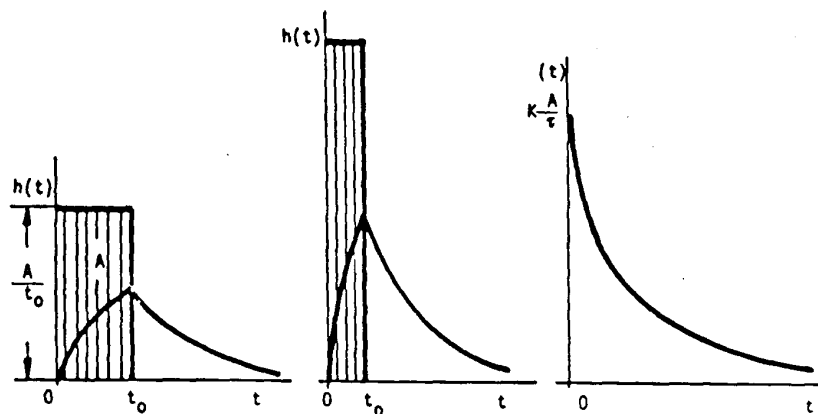
Odgovor sistema prvega reda na koračni input:



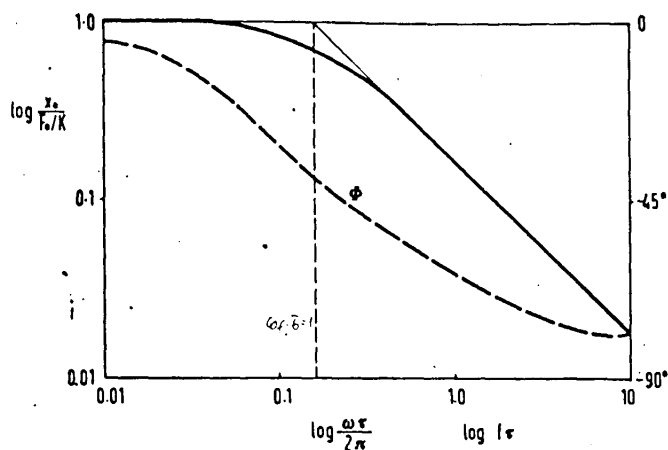
Odgovor sistema prvega reda na enakomerno naraščajoč input:



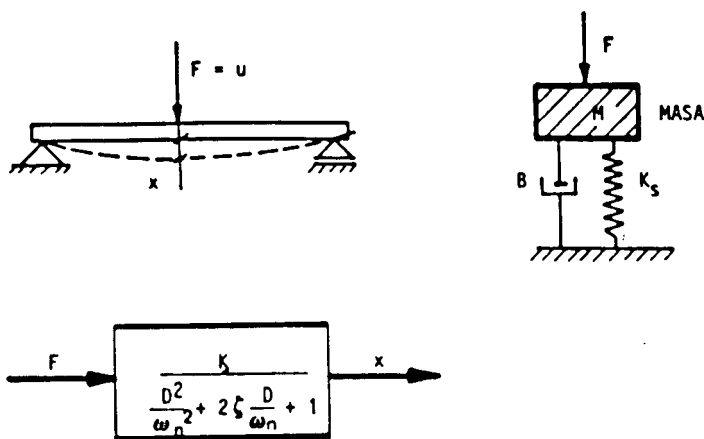
Impulzni odgovor sistema prvega reda:



Bode-jev diagram za sistem prvega reda:

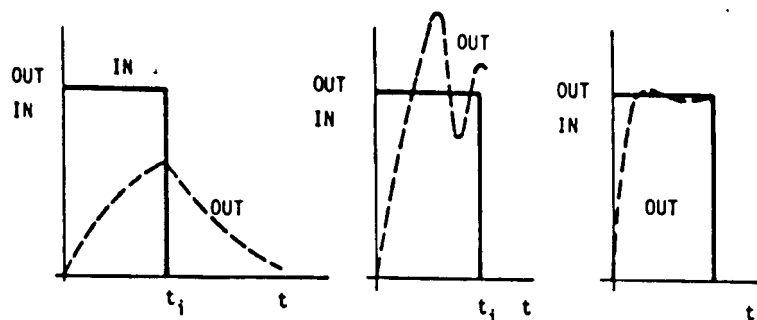


Sistem drugega reda:

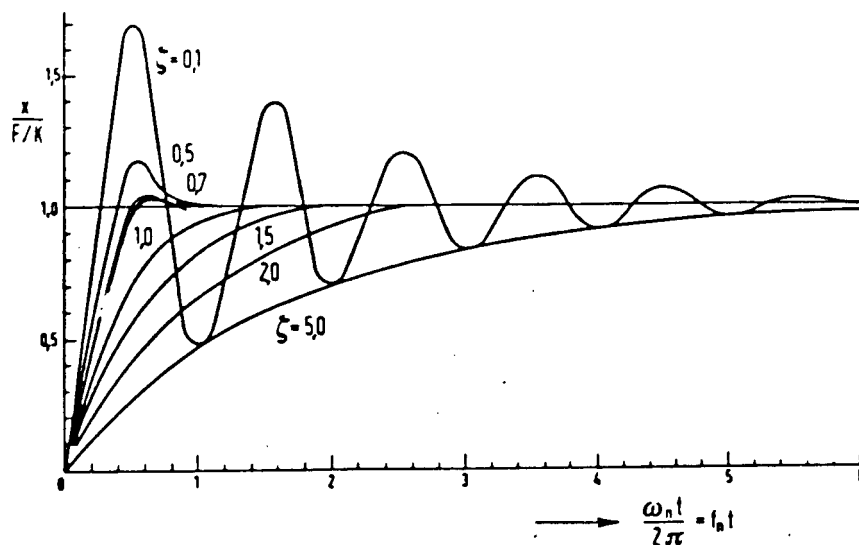


Odziv sistema lahko reguliramo z maso M ali z dušilko B .

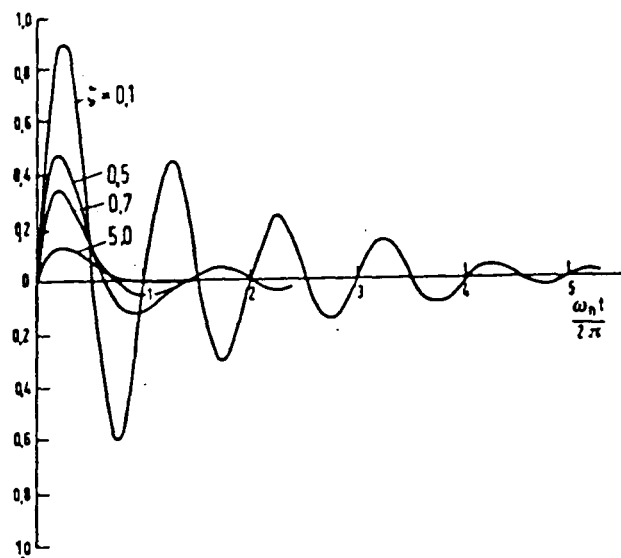
Odgovor prehoda pri različnih časovnih konstantah:



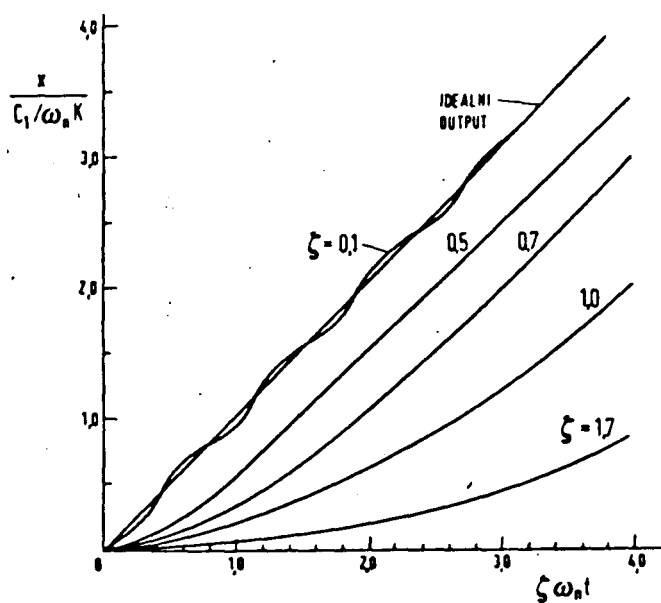
Odgovor sistema drugega reda na koračni input:



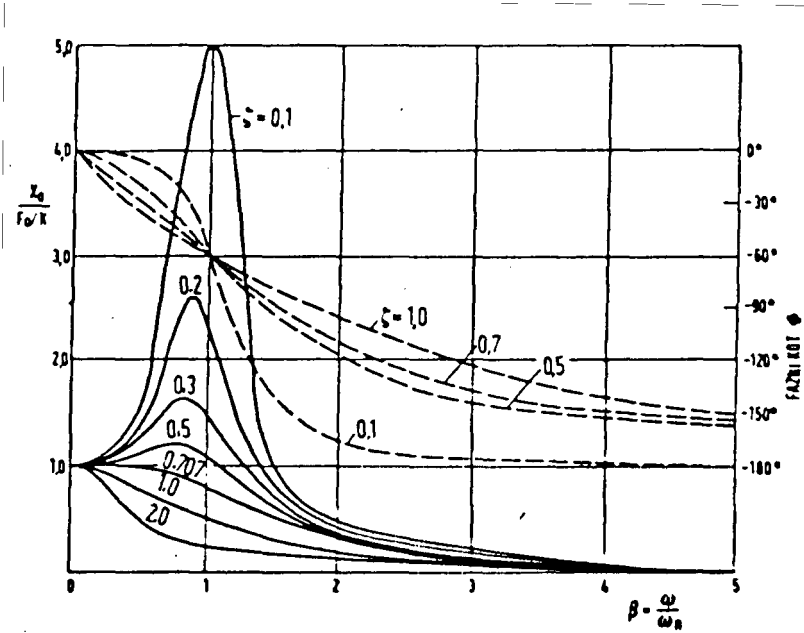
Odgovor sistema drugega reda na impulzni input:



Odgovor sistema drugega reda na enakomerno naraščajoč input:

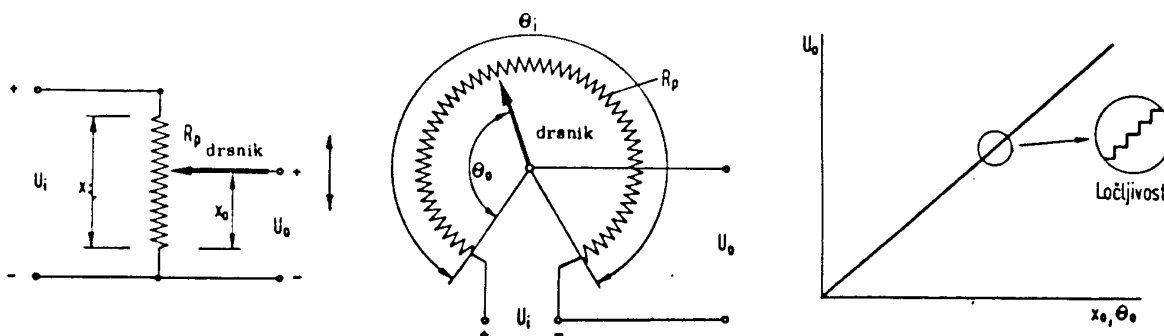


Odgovor sistema drugega reda na sinusni input s frekvenco ω :



7.) Potenciometri

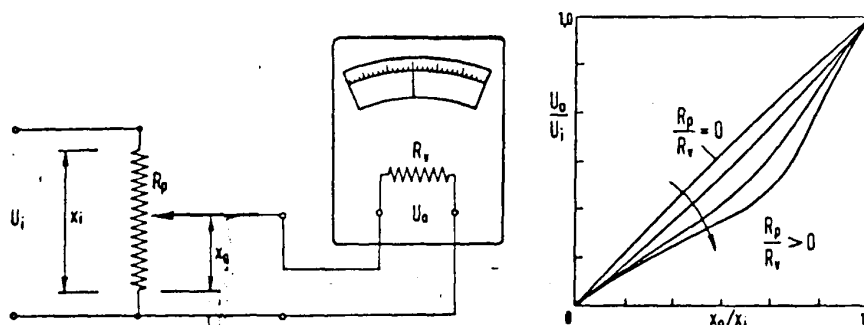
Potenciometri se uporabljajo za merjenje večjih poti pri translaciji ($x_0=25\div600$ mm) in kotov ($\theta_0=10^\circ\div60^\circ\times360^\circ$) pri rotacijskih gibanjih. Na izolacijsko telo je navita upornostna žica, filter iz ogljika ali prevodne umetne mase dolžine x_i oz. kota θ_i , z upornostjo R_p . Izhodna napetost U_0 je proporcionalna dolžini poti x_0 ali kota θ_0 . Napajalna napetost U_i je lahko istosmerna ali izmenična, njena velikost pa je odvisna od izvedbe potenciometra.



Natančnost:

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| - translacijski potenciometer: | 0,05 ÷ 0,1% celotne dolžine x_i . |
| - rotacijski potenciometer: | 1% $D=12\text{mm}$ |
| | 0,02% $D=50\text{mm}$ |
| | 0.002% $D=250\text{mm}$ |

Vpliv obremenilnega efekta na linearnost karakteristike potenciometra:



$$U_i = R_p I_p - \frac{x_0}{x_p} R_p I_0$$

$$\frac{x_0}{x_p} R_p I_p = R_v I_0 + \frac{x_0}{x_p} R_p I_p \quad U_0 = R_v I_0$$

$$I_p = \left(\frac{x_p}{x_0} \frac{R_v}{R_p} + 1 \right) I_0$$

$$U_i = R_p \left(\frac{x_p}{x_0} \frac{R_v}{R_p} + 1 \right) I_0 - \frac{x_0}{x_p} R_p I_0$$

$$U_i = \left[\left(\frac{x_p}{x_0} \frac{R_v}{R_p} + 1 \right) - \frac{x_0}{x_p} \right] R_p \frac{U_0}{R_v}$$

$$\frac{U_0}{U_i} = \frac{1}{\frac{R_p}{R_v} \left[\frac{x_p}{x_0} \frac{R_v}{R_p} + 1 - \frac{x_0}{x_p} \right]}$$

$$\frac{U_0}{U_i} = \frac{1}{\frac{x_p}{x_0} + \left(\frac{R_p}{R_v} - 1 - \frac{x_0}{x_p} \right)}$$

$$\frac{U_0}{U_i} = \frac{x_0}{x_p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x_0}{x_p} \frac{R_p}{R_v} \left(1 - \frac{x_0}{x_p} \right)}$$

Napaka zaradi obremenilnega efekta:

$$e \left(\frac{x_0}{x_p} \right) = \frac{U_0}{U_i} \left(\frac{x_0}{x_p}, R_v = \infty \right) - \frac{U_0}{U_i} \left(\frac{x_0}{x_p}, \frac{R_p}{R_v} > 0 \right)$$

$$e \left(\frac{x_0}{x_p} \right) = \frac{x_0}{x_p} \cdot \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{x_0}{x_p} \frac{R_p}{R_v} \left(1 - \frac{x_0}{x_p} \right)} \right]$$

Maksimalna napaka se pojavi pri: $\frac{x_0}{x_i} = \frac{2}{3} = 0,67 \Rightarrow \Delta_{\max} \approx 15\%$

R_pupornost potenciometra (impedanca).

R_vnotranja upornost voltmetra (impedanca bremena).

Iz tega sledi, da mora biti impedanca voltmetra (kazalnega instrumenta) veliko večja od upornosti potenciometra, da bi preprečili ali vsaj zmanjšali vpliv obremenilnega efekta. Dimenzijsko so potenciometri približno enaki za upornosti $R_p = 10^2 \Omega \div 10^5 \Omega$. Napajalna napetost U_i je omejena z maksimalnim dopustnim segrevanjem navitja:

$$U_{i,\max} = \sqrt{R_p \cdot P}, \text{ dopustna moč } P \text{ znaša pri } 20^\circ\text{C } 5\text{W}.$$

Šumi:

- šumi nastanejo zaradi zunanjih sprememb napetosti, mehanskih (trenje, obraba) in drugih motenj.
- šumi so superponirani na izhodnem signalu.

Glavni motilni vpliv:

Resonančne frekvence drsnika pri hitrih meritvah (odpravimo z izogibanjem resonančni frekvenci in s konstrukcijo potenciometra, ki prepreči nastanek resonance).

Prednosti potenciometrov:

- enostavna in poceni izvedba.
- enostavna izvedba merilne verige (ne potrebuje posebnih filtrov in ojačevalcev).

Pomanjkljivosti potenciometrov:

- ni uporaben za dinamične meritve poti.
- ne dosega visokih natančnosti.

8.) Merilni trakovi

Merilne trakove se uporablja za merjenje majhnih raztezkov ali napetosti v strojnih delih in elementih pod statičnimi ali dinamičnimi obremenitvami.

Korelacija med mehanskimi in električnimi veličinami:

$$R = \frac{\rho \cdot L}{A} \quad \rho \dots \text{specifična upornost}$$

Njen totalni odvod je vsota parcialnih odvodov:

$$\begin{aligned} dR &= \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial R}{\partial L} dL + \frac{\partial R}{\partial A} dA \\ dR &= \frac{L}{A} d\rho + \frac{\rho}{A} dL - \frac{\rho \cdot L}{A^2} dA \\ dR &= \frac{A \cdot L \cdot d\rho + \rho \cdot A \cdot dL - \rho \cdot L \cdot dA}{A^2} \end{aligned}$$

Izraz $L \cdot dA$ izpeljemo iz enačbe volumna vodnika:

$$\begin{aligned} V &= A \cdot L \\ dV &= \frac{\partial V}{\partial A} dA + \frac{\partial V}{\partial L} dL \\ dV &= L \cdot dA + A \cdot dL \\ dV &= A \cdot (1 - \varepsilon \cdot v)^2 \cdot L \cdot (1 + \varepsilon) - A \cdot L \quad \text{aproksimiramo v} \\ dV &= A \cdot L + A \cdot L \cdot \varepsilon \cdot (1 - 2 \cdot v) \\ dV &= A \cdot L \cdot \frac{dL}{L} \cdot (1 - 2 \cdot v) \\ dV &= L \cdot dA + A \cdot dL; \quad L \cdot dA = -2 \cdot v \cdot A \cdot dL \end{aligned}$$

Izpeljava faktorja ojačanja merilnega traku K :

$$\begin{aligned} dR &= \frac{\rho \cdot A \cdot dL + A \cdot L \cdot d\rho + 2 \cdot \rho \cdot v \cdot A \cdot dL}{A^2} \\ dR &= \frac{\rho \cdot dL \cdot (1 + 2 \cdot v) + L \cdot d\rho}{A} \Big| : R \end{aligned}$$

$$dR = \rho \cdot \frac{L}{A}$$

$$\frac{dR}{R} = \left(\frac{dL}{L} \cdot (1 + 2 \cdot \nu) + \frac{d\rho}{\rho} \right) \cdot \frac{dL}{L}$$

$$K = \frac{\frac{dR}{R}}{\frac{dL}{L}} = 1 + 2 \cdot \nu + \frac{\frac{d\rho}{\rho}}{\frac{dL}{L}}$$

Faktor ojačanja merilnega traku sestavljajo členi:

- sprememba upornosti zaradi raztezka vodnika
- sprememba upornosti zaradi kontrakcije prereza vodnika
- sprememba piezo – upornosti zaradi raztezka vodnika

Sprememba upornosti vodnika:

$$dR = K \cdot R \cdot \varepsilon$$

S tem je podana povezava med mehansko vstopno veličino ε in električno veličino dR , oz. občutljivost senzorja – merilnega traka pri uporabi merilnih trakov za merjenje deformacij.

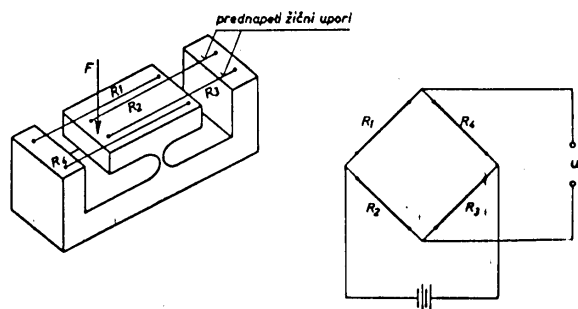
Ker je faktor ojačanja K znan, lahko z merjenjem relativne spremembe upornosti dR/R ugotovimo velikost raztezka ε in s tem tudi velikost napetosti v materialu σ .

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = \frac{dL}{L} \cdot E$$

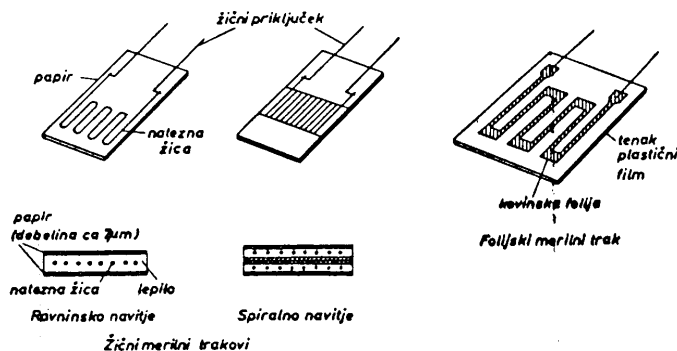
Faktor ojačanja je v veliki meri odvisen od materiala iz katerega so izdelani merilni trakovi (Advance: $K=2$; Isoelastic: $K=3,5$; polprevodniki: $K=130$).

Oblike:

Za merjenje sil (F) se uporablja dinamometre z nevezanimi merilnimi trakovi, ki so vpeti z določeno prednapetostjo in vezani v uporovni mostiček.

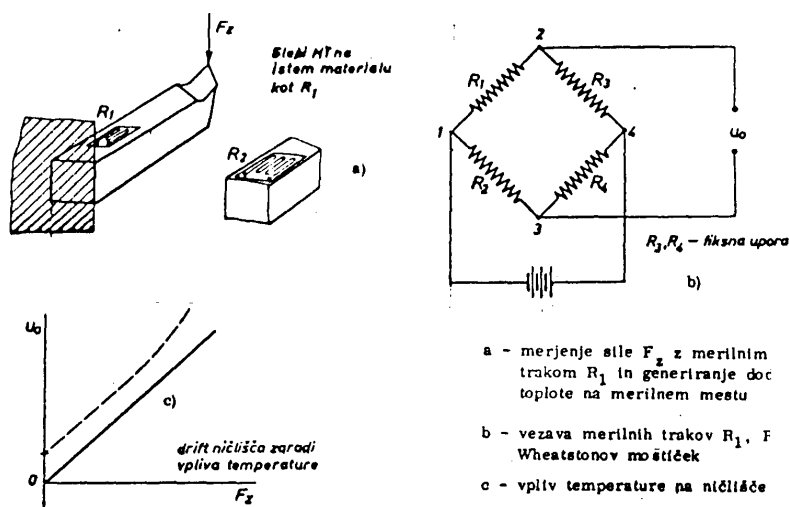


V praksi se bolj uporabljajo vezani uporovni trakovi. Upornostna žica je zvita v meanderski obliki in nalepljena med dvoje papirnatih ali plastičnih folij.



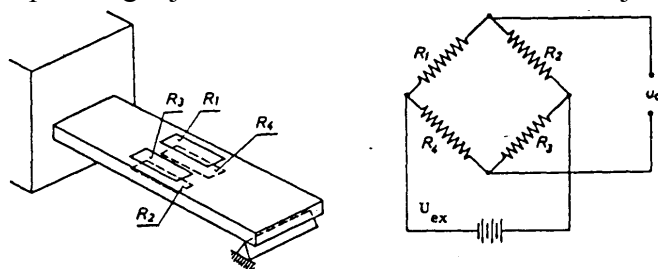
Vpliv temperature na merilne trakove:

Temperatura predstavlja modifikacijski input v merilnih sistemih, ki uporabljajo kot sekundarni senzor merilni trak. Zaradi termičnega raztezka se pojavijo (na nosilcu) dodatne mehanske napetosti. Posledica je premik ničlišča (drift) med obremenitvijo, ki jo merimo in izhodno napetostjo, ki je posledica spremembe upornosti. Temperaturno kompenzacijo dosežemo z namestitvijo slepega merilnega traku na nosilec z enakim razteznostnim koeficientom kot ga ima orodje.



Mostična vezava (Wheatston-ov mostiček):

Območje uporabe merilnih trakov pri dinamičnih meritvah sega do 50 kHz. Maksimalna obremenitev znaša $i=30$ mA in omejuje dopustno gretje. Nekatere izvedbe trakov so narejene za meritve do 1000°C.



Izračun merilnih trakov:

Razmerje med koristnim in motilnim signalom naj bi bilo 4:1 ÷ 10:1. To pomeni, da moramo izbrati trakove in njihovo napajanje ter vezavo tako, da bomo izmerili najmanjši raztezek ϵ .

Motilni signal:

Povzroča ga Johnson-ov efekt. Zaradi naključnih nihanj prostih elektronov, ki so posledica temperature v vodniku pride do termičnega šuma. Če je koristen signal zelo majhen se izgubi v motilnem signalu (termičnem šumu).

Izračun termičnega šuma:

$$U_{\sigma} = \sqrt{4 \cdot \Delta f \cdot k \cdot \vartheta \cdot R}$$

Δf ...širina frekvenčnega pasu osciloskopa s katerim opazujemo termični šum.

k ...Bolzmann-ova konstanta ($k=1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/°).

ϑ ...absolutna temperatura [K].

R ...upornost merilnega traku.

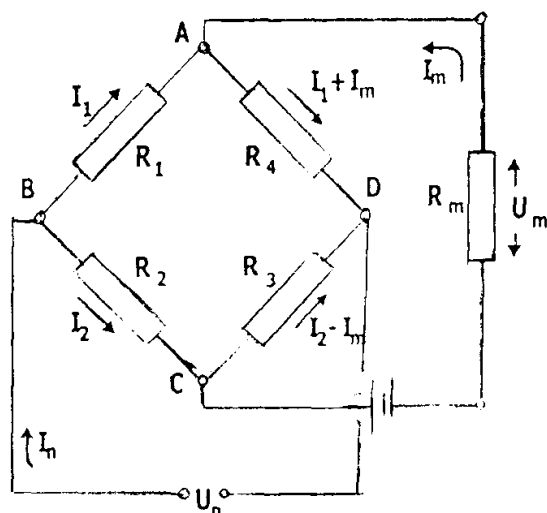
Uporaba:

Uporabljajo se pri gradnji dinamometrov, merilcev vrtilnih momentov, merilcev moči in drugih merilnih sistemov, ki delujejo na meritvi z zelo majhnimi deformacijami.

Prednosti:

- majhne dimenzije.
- poceni standardne izvedbe.
- zanesljivo delovanje.
- neposredna uporaba na strojih in napravah.

WHEATSTONOV MOSTIČEK



Slika: Wheatstonov mostiček

Kirchofova zakona

1. zakon

Vsota vseh tokov, ki prihajajo v razvejišče, je enaka vsoti tokov, ki iz razvejišča izhajajo:

$$\sum I = 0$$

2. zakon

Algebraična vsota napetosti vseh izvorov v zaključenem tokovnem krogu je enaka vsoti napetosti na posameznih upornikih tokovnega kroga.

$$U_n = \sum_i U_i = \sum_i I_i R_i$$

(B)	→	$I_n = I_1 + I_2$
(C)	→	$I_2 = I_3 + I_m$
(A)	→	$I_4 = I_1 + I_m$
(B-A-D)	→	$U_n = I_1 \cdot R_1 + I_4 \cdot R_4$
(B-C-A-D)	→	$U_n = I_2 \cdot R_2 + I_m \cdot R_m + I_4 \cdot R_4$
(B-C-D)	→	$U_n = I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3$

REŠITEV

$$I_m = \frac{(R_2 R_4 - R_1 R_3)}{(R_1 + R_2)R_3 R_4 + (R_3 + R_4)R_1 R_2 + R_m(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} U_n$$

pri $R_m \gg R_1 \dots R_4$

$$U_m = I_m R_m = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} U_n$$

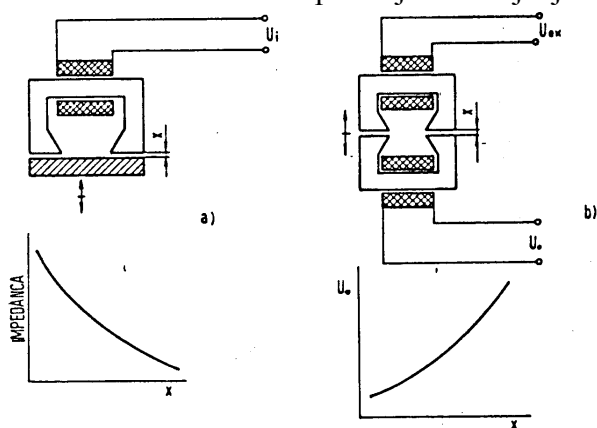
$$R_2 R_4 = R_1 R_3 \rightarrow \frac{U_m}{U_n} = 0$$

Pri $R_2 = R_3 = R_4 = R$ in $R_1 = R + \Delta R$ ter $\Delta R = K R \epsilon$

$$U_m = \frac{\Delta R}{4R} U_n = \frac{1}{4} K U_n \epsilon = K_s \epsilon, \text{ ako raztezamo en merilni listič}$$

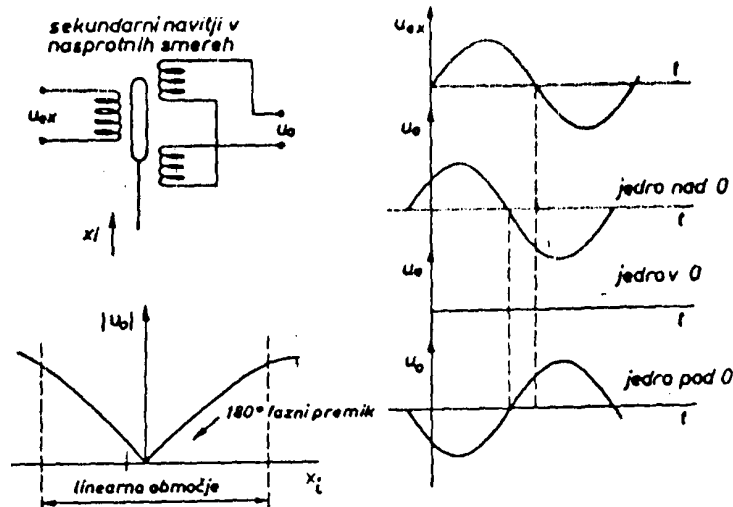
9.) Induktivni senzor

Induktivni senzor se uporablja za merjenje linearnih ali rotacijskih poti.



a....merjenje poti s spremembo impedance
b....merjenje poti s spremembo inducirane napetosti

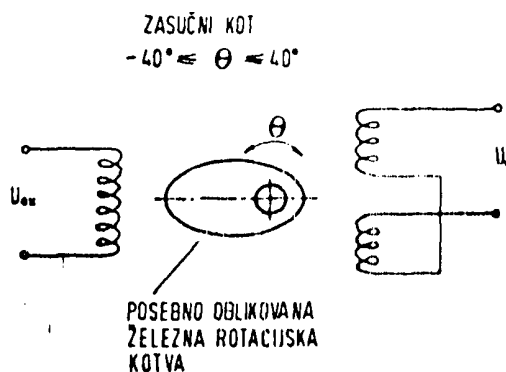
Linearni variabilni diferencialni transformator (LVDT):



Jedro iz mehkega železa se pomika za vrednost $\pm x_i$ v magnetnem polju, ki se generira v primarni tuljavi z izmenično napajalno napetost u_{ex} . V sekundarnem navitju se inducira napetost u_0 , ki je proporcionalna premiku x_i . Časovni potek napetosti u_{ex} , kakor tudi izhodne napetosti u_0 za različne položaje jedra kaže zgornja slika. Za meritve izkoriščamo samo začetni del sinusne krivulje, kjer so razmere približno linearne.

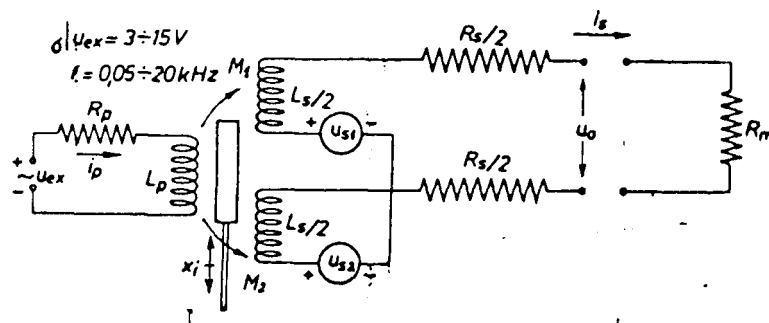
Napajalna napetost u_{ex} znaša običajno $3 \div 15V$ s frekvencami med $50 \div 20000Hz$. Merilno območje $x_i = \pm 0,025 \div \pm 75mm$. Nelinearnost znaša 0,5% polne skale. Občutljivost senzorja pri normalnem napajanju z $u_{ex}=3 \div 6V$ leži v območju med $0,3 \div 1,5mV/\mu$. Dinamični odgovor senzorja je zadovoljiv do 2000Hz pri vzbujevalni frekvenci 20kHz.

Rotacijski variabilni diferencialni transformator:



Merilni območje leži med $-40^\circ < \theta < 40^\circ$ z $\pm 1\%$ nelinearnosti celotne skale.

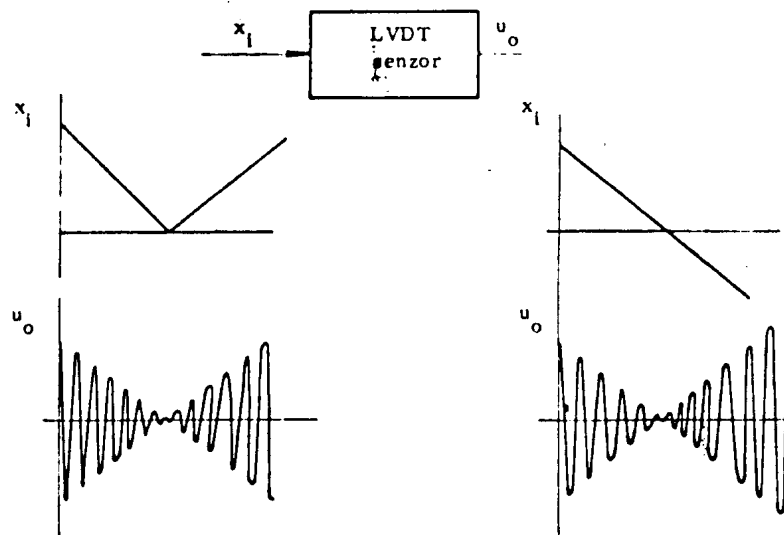
Analiza tokokroga LVDT:



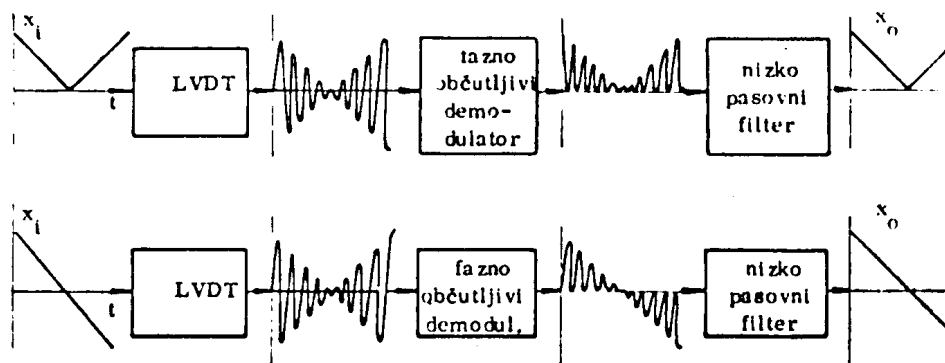
Transfer function of the sensor:

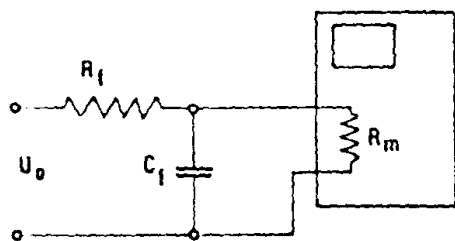
$$\frac{u_o}{u_{ex}}(D) = \frac{R_m \cdot (M_2 - M_1) \cdot D}{[(M_1 - M_2)^2 + L_p \cdot L_s] \cdot D^2 + [L_p \cdot (R_s + R_m) + L_s \cdot R_s] \cdot D + (R_s + R_m) \cdot R_p}$$

Input signal LVDT is sinusoidal. If we connect the output terminal of the sensor to an AC-voltmeter, the frequency of the signal is very low or zero. The indicator instrument accurately measures the displacement x_i , but we do not know to which side of the zero position the core is moving. In the case of dynamic measurements (measurements at high frequencies) we can use an oscilloscope as an indicator instrument.

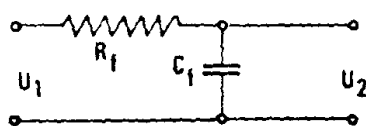


Signal from LVDT must be passed through a phase-sensitive demodulator and a low-pass filter. The construction of the filter is simplified if we use a high-frequency supply voltage u_{ex} or, alternatively, a frequency ω much higher than the frequency of the signal x_i . If the ratio is 10:1 or higher, we can use an RC filter.

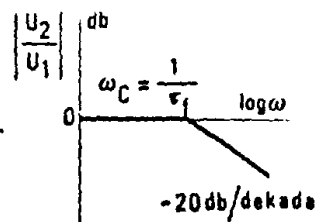




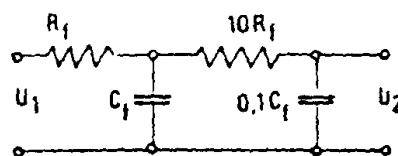
ENOJNI RC - FILTER



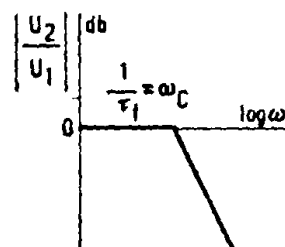
$$\frac{U_2}{U_1}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega R_f C_f}$$



DVOJNI RC - FILTER

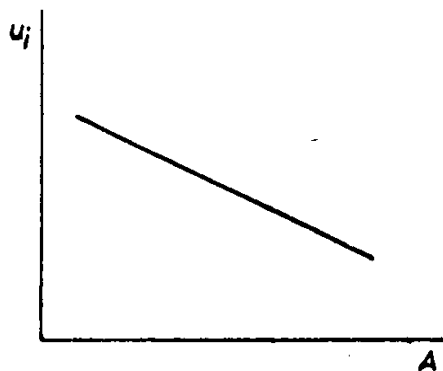
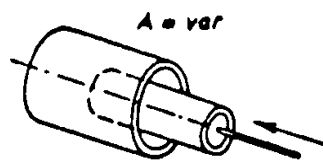
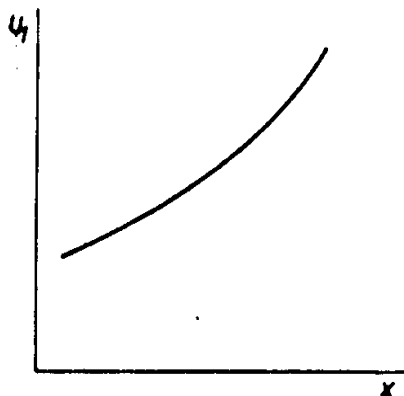
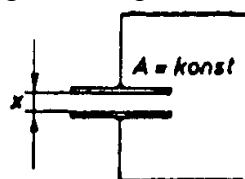


$$\frac{U_2}{U_1}(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega R_f C_f)^2}$$



10.) Kapacitivni senzor

Princip spremembe kapacitivnosti C kondenzatorja se izkorišča za merjene poti x_i pri translacijskih gibanjih ali zasučnega kota θ_i pri rotaciji.



Množina elektrine na plošči:

$$Q = C \cdot U_0; \quad c = f(x, A, \epsilon, \epsilon_0); \quad c = K \cdot \frac{A}{x} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{x}$$

Velikost kapacitivnosti kondenzatorja C znaša do 200pF, začetna oddaljenost plošč x_0 pa je približno $0,2 \div 0,3$ mm.

Občutljivost:

Občutljivost kapacitivnega senzorja se spreminja s spremembo poti x :

$$\frac{dC}{dx} = -K \cdot \frac{A}{x^2}$$

Ta se poveča, če se zmanjša razdalja x_0 med ploščama. Sprememba razdalje med ploščama je podana z enačbo $x_i = x - x_0$. Pogoji za konstrukcijo kapacitivnega senzorja (C-senzorja):

$$\frac{x_i}{x_0} < 0,1$$

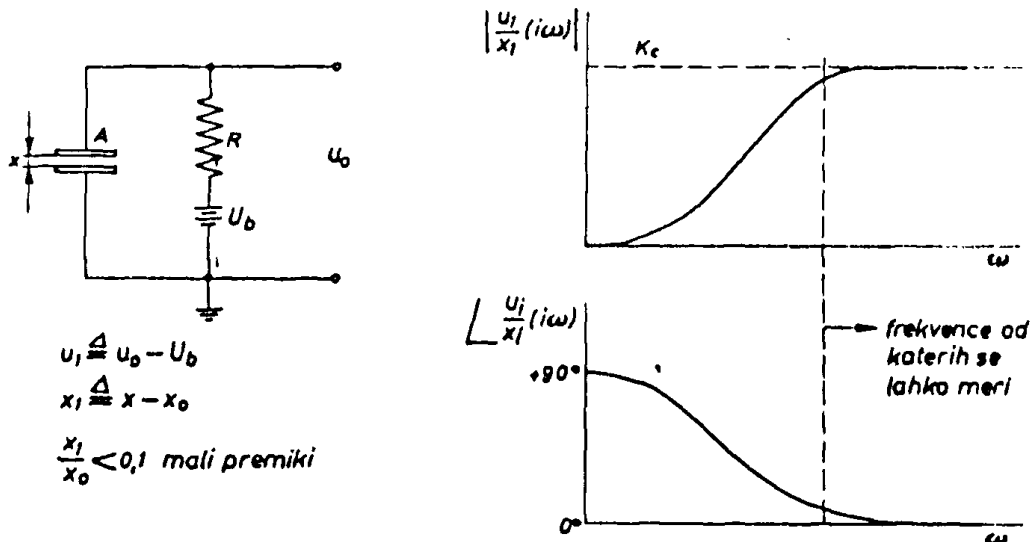
Prednosti:

- enostavna mehanska izvedba.
- zanemarljiv mehanski efekt.
- visoka občutljivost.

Pomanjkljivosti:

- občutljivost na vlago.
- šumna napetost zaradi visoke impedance senzorja.
- občutljivost na položaj povezovalnih kablov in konektorjev.
- zahteva po izredno visoki inputni impedanci priključene elektronike.

Analiza tokokroga:



Iz poteka amplitudnega razmerja in kota fazne zakasnitve je razvidno, da je kapacitivni senzor primeren predvsem za dinamične meritve z višjo frekvenco od neke določene frekvence ω_c . Ta meja (ω_c) se lahko premakne navzdol proti nizkim frekvencam, če povečamo časovno konstanto τ , kar pa lahko povečamo z večjo upornostjo. Da bi preprečili obremenilni efekt mora biti začetna impedanca vsaj $10^7 \Omega$. Merilno območje je med 0 in 40 Hz.

Primer: Izmeriti je potrebno pomik velikosti $5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ v frekvenčnem pasu $1 \div 5 \text{ Hz}$. $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$, $\epsilon = 1$, $A = 10^{-2} \text{ mm}^2$. Določi ohmsko upornost v senzorju, napajalno napetost U_b , pri čemer upoštevamo, da želimo dobiti za pomik $0,01 \text{ mm}$ na izhodu $0,1 \text{ V}$.

$$\frac{x_i}{x_0} \leq 0,1 \Rightarrow x_0 = \frac{x_i}{0,1} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

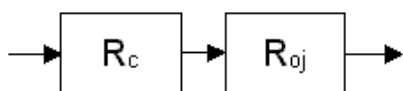
$$C = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{x_0} = 1,8 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \nu_{\min}} = 0,000159 \text{ s}$$

$$\tau = R \cdot C \Rightarrow R = \frac{\tau}{C} = 884194 \Omega$$

$$k_C = \frac{U_b}{x_0} = \frac{U_1}{x_1} = 10^4 \text{ V/m} \Rightarrow U_b = k_C \cdot x_0 = 5 \text{ V}$$

Kaj moramo storiti, če sledi senzorju upor $R=10^7 \Omega$ in kaj, če želimo meriti premik pri 100Hz, če imamo $C=\text{konst.}$



$$\frac{R_{oj}}{R_c} \geq 10 \Rightarrow \frac{R_c}{R_{oj}} \leq 0,1$$

$$\frac{\text{vhodna impedanca}}{\text{izhodna impedanca}} = \frac{U_i}{U_o} \geq 10$$

za 100Hz:

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \nu} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 100} = 0,00159 \text{ s}$$

$$\tau = R \cdot C \Rightarrow R = \frac{\tau}{C} = 8,84 \cdot 10^6 \Omega$$

11.) Piezoelektrični senzor

Določenim materialom se pod vplivom obremenitev spremenijo piezoelektrične oz. magnetostriktivne lastnosti. Ta efekt izkoriščamo za transformacijo mehanskega signala (sila, pot, deformacija, ...) v električnega. Piezoelektrični efekt nastane, če mehansko obremenimo kremenov kristal, ki se zaradi efekta nabije z določeno količino elektrine. S pomočjo tega efekta merimo pospeške, sile, pritiske, ..., ki se spreminjajo z višjimi ali visokimi frekvencami.

Če obrnemo način vzbujaanja in uporabimo izmenični električni signal kot input dobimo mehansko nihanje.

Gradnja:

- Uporabljamo:
- naravne materiale (kremen, ...).
 - umetne materiale (barijev titanid, feroelektrična keramika, litijev sulfat, ...).

Ker so materiali izolatorji imajo elektrodne plošče vlogo kondenzatorskih plošč. Stanje gibanja zavisi od oblike in položaja elektrod ter od orientacij kristalnih osi.

Piezosenzor:

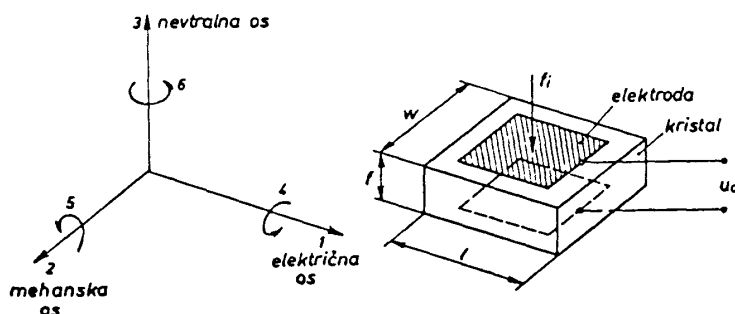
Spremeni mehanski signal v električni naboj (kot generator naboja in kondenzator).

$$U = \frac{Q}{C}$$

Q ...množina elektrine

C ...kapacitivnost

Piezoepekt je občutljiv na smer. Pri natezni obremenitvi se generira neka napetost z določeno polariteto, ki se spremeni pri tlačnih obremenitvah.



Pri piezoelektričnih senzorjih upoštevamo dve vrsti konstant in sicer g in d . Za barijev titanid velja:

$$g_{33} = \frac{\text{polje generirano v smeri 3}}{\text{napetost delujoča v smeri 3}} = \frac{U_0/h}{f_i/b \cdot l} = \frac{u_0}{h \cdot \tau_i}$$

$$U_0 = g_{33} \cdot h \cdot \tau_i$$

$$d_{33} = \frac{\text{naboj grneriran v smeri 3}}{\text{sila delujoča v smeri 3}} = \frac{Q}{f_i}$$

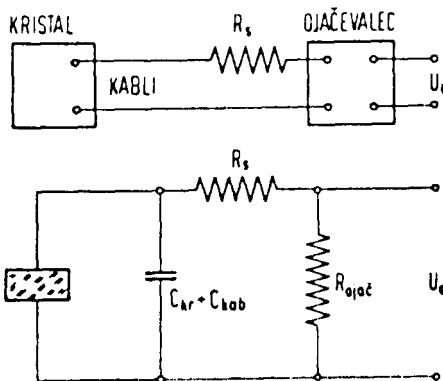
$$C = \frac{b \cdot \varepsilon \cdot l}{h} \quad \varepsilon \dots \text{dielektrična konstanta}$$

$$d_{33} = \varepsilon \cdot g_{33}$$

Analiza piezoelektričnega senzorja:

Poleg kristala upoštevamo kable in ojačevalec kot celovito enoto. Impedanca senzorja je običajno zelo visoka, zato mora biti impedanca ojačevalca večja. Upoštevamo tudi kapacitivnost kablov, posebno če so dolgi.

Uporaba piezoelektričnih senzorjev v daljših statičnih obremenitvah je otežena, ker se izgublja napetost na terminalih senzorja. Kot ojačevalec se uporablja katodni sledilec. Če impedanca celotnega merilnega sistema znaša več kot $10^{14} \Omega$ dosežemo dovolj počasno izgubljanje naboja in s tem možnost statičnih meritev.



$$K = \frac{K_q}{C} \left(\frac{R_{ojač}}{R_{ojač} + R_s} \right); \quad \tau = (R_{ojač} + R_s) \cdot C$$

$$C = C_{kr} + C_{kab}$$

Naboj, ki ga generira piezokristal:

$$q = K_q \cdot x_i$$

$K_q \dots$ konstanta kristala

$x_i \dots$ deformacija zaradi f_i

$$K = \frac{K_q}{C} \cdot \left(\frac{R_{ojač}}{R_{ojač} + R_s} \right)$$

$$\tau = (R_{ojač} + R_s) \cdot C$$

$$C = C_{kr} + C_{kab}$$

Transferna funkcija piezoelektričnega senzorja I. reda:

$$\frac{U_0}{x_i}(D) = \frac{K \cdot \tau \cdot D}{1 + \tau \cdot D}$$

$$K = \frac{K_q}{C}$$

\dots občutljivost

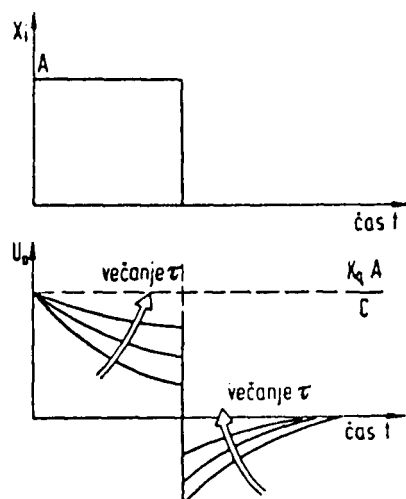
$$\tau = R \cdot C$$

\dots časovna konstanta

Pri konstantnem iznosu deformacije x_i je odgovor prehoda enak 0, kar pomeni, da ne moremo meriti statičnih procesov. Če želimo doseči nizkofrekvenčno amplitudo s 5% odstopanjem mora biti frekvenca vzbujanja na inputu večja kot ω_1 .

$$0,95^2 = \frac{(\omega_1 \cdot \tau)^2}{1 + (\omega_1 \cdot \tau)^2} \Rightarrow \omega_1 = \frac{3,02}{\tau}$$

Za merjenje z željeno natančnostjo mora biti časovna konstanta (τ) čim manjša.



$$U_0 \cdot (\tau \cdot D + 1) = (K \cdot \tau \cdot D) \cdot x_i \quad x_i = A$$

$$0 < t < T: \quad U_0 \cdot (\tau \cdot D + 1) = 0$$

Pri $t=0$ se pojavi nenadoma naboj na kondenzatorskih ploščah, ker je $x_i=A$. Naboj se poveča na $k_q \cdot A$ in z upoštevanjem kapacitivnosti C se U_0 poveča na:

$$U_0 = \frac{K_q \cdot A}{C} \quad t=0$$

$$U_0 = \frac{K_q \cdot A}{C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad 0 < t < T$$

$$T < t < \infty: \quad U_0 \cdot (\tau \cdot D + 1) = 0$$

$$U_0 = \frac{K_q \cdot A}{C} \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) \quad t=T$$

$$U_0 = \frac{K_q \cdot A}{C} \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{(t-T)}{\tau}} \quad T < t < \infty$$

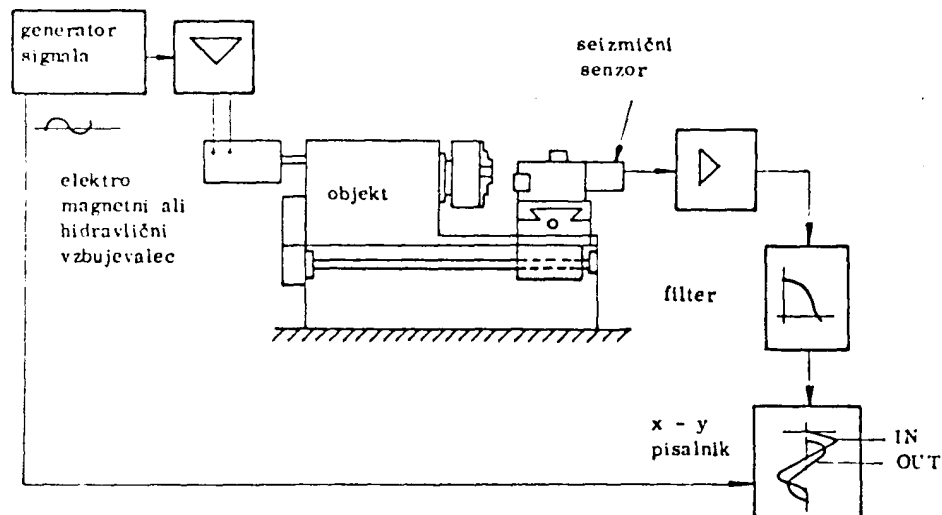
Pri dovoljeni napaki odgovora $\pm 5\%$ inputnega signala mora biti izpolnjen pogoj: $\tau > 20 \cdot T$

12.) Seizmični senzor

To so senzorji za merjenje mehanskih nihanj. Mehanska nihanja strojev, naprav, krmilnih sistemov so eden tistih pojavov, ki jih mora konstruktor pri dinamičnih izračunih nujno upoštevati. Če sistem ni pravilno dimenzioniran v dinamičnem smislu bodo ta nihanja vplivala na delovanje in performančne karakteristike ter njegovo življenjsko dobo.

Vedno se poslužimo diferencialnih enačb, ko računamo dinamiko. Te opišejo pri upoštevanju različnih predpostavk, bolj ali manj natančno poti, hitrosti in pospeške. Pri kompleksnih napravah in strojih je izračun zelo aproksimativen, ker ni na razpolago zanesljivih vrednosti za vzmetne konstante, faktorje dušenja, itd.

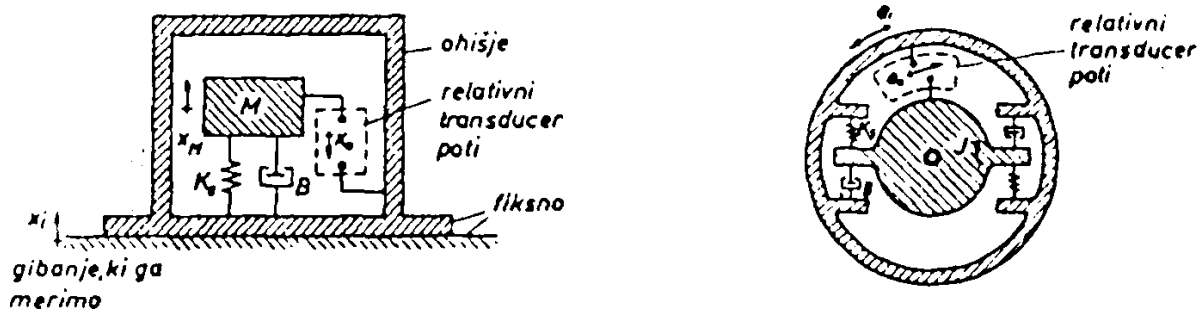
Teoretične predpostavke preverjamo s eksperimenti:



Seizmični senzor namestimo tam, kjer želimo ugotoviti transferne lastnosti vhodnega signala oz. njegove dinamične lastnosti. Seizmični senzor pretvori poti, hitrosti, pospeške v električni signal, ki ga ojačamo, filtriramo in zapišemo na X-Y pisalniku, kamor istočasno pride vhodni signal. Z vrednotenjem v logaritmčnih koordinatah dobimo Bodejev diagram ojačitve in zakasnitve signala. V kompleksni ravnini pa lahko narišemo Nyquistov diagram.

Največje vprašanje pri dinamičnih raziskavah objektov je vprašanje primernih senzorjev za merjenje vibracijskih poti, hitrosti in pospeškov.

Senzorji za pot:



Meriti želimo pot kot funkcijo časa. Na objekt pritrdimo ohišje v katerem se nahaja obešena masa M , ki jo držita v ravnotežju vzmet K_s in dušilka B . Gibanje mase $x_M = x_i - x_0$, ki predstavlja mehanski vhodni signal v npr. induktivni senzor LVDT pretvorimo v električni signal in tako registriramo poti x_i kot funkcijo časa na pisalniku.

Lastna frekvenca mora biti za eno dekada nižja frekvenca, ki jo merimo: $\omega_i > 10 \cdot \omega_n$.

ω_i maksimalna frekvenca vhodnega signala

ω_n lastna frekvenca

ζ faktor dušenja

Sedaj po sliki zapišemo diferencialno enačbo:

$$MD^2 x_M = BDx_0 + K_s x_0$$

$$M(D^2 x_i - D^2 x_0) = BDx_0 + K_s x_0$$

tako lahko dobimo transferno funkcijo, ki se glasi

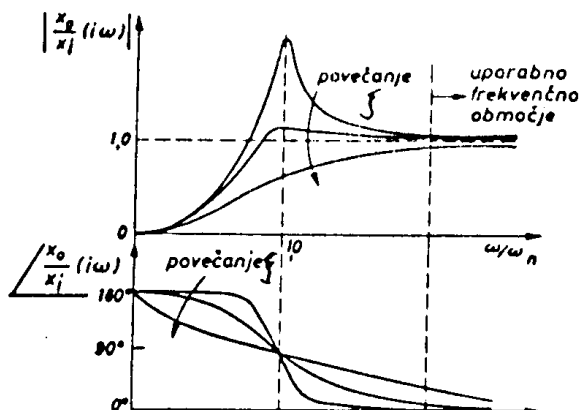
$$\frac{x_0}{x_i}(D) = \frac{\frac{D^2}{\omega_n^2}}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{D}{\omega_n} + 1}$$

kjer je:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_s}{M}} \quad \zeta = \frac{B}{2\sqrt{K_s \cdot M}}$$

Frekvenčni odgovor:

$$\frac{x_0}{x_i}(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + 1}$$



Ta enačba upošteva samo sistem masa – vzmet – dušilka. Pri izračunu dinamične karakteristik je potrebno upoštevati še pretvorbo x_0 v napetost U_0 npr. preko LVDT.

Ta senzor je uporaben šele od neke visoke frekvence ω_n , kjer je: $\left| \frac{x_0}{x_i}(j\omega) \right| = 1$ in $\Phi = 0$

ω_n je odvisna od mase in vzmeti. Če želimo meriti zelo nizke frekvence je uskladitev teh razmerij nujna, pri tem upoštevamo, da faktor dušenja znaša $\zeta = 0,6 - 0,7$. Da bi zmanjšali velikosti teh senzorjev izbiramo mehke vzmeti namesto velikih mas.

Blokovna shema:



Senzorji za hitrosti:

Enaka konstrukcija seizmičnega senzorja kot pri merjenju poti. Za merjenje hitrosti Dx_i namesto x_i imamo tri možnosti:

- signal poti električno diferenciramo (realiziramo s pomočjo analognega računalnika)
- sekundarni senzor LVDT nadomestimo z induktivnim senzorjem za merjenje linearne hitrosti (najbolj praktična metoda).
- z manipulacijo enačbe frekvenčnega odgovora.

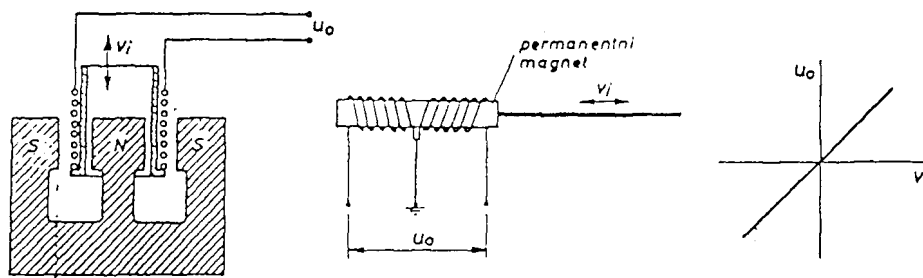
Najpogosteje uporabljamo drugo metodo, tj. LVDT nadomestimo z induktivnim senzorjem za merjenje linearne hitrosti. Izvedba je taka, da se tuljava giblje, permanentni magnet pa miruje.

$$\frac{U_0}{Dx_i}(D) = \frac{\frac{K_b D^2}{\omega_n^2}}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{D}{\omega_n} + 1} \quad (1)$$

$$\omega \gg \omega_n$$

$$U_0 = K_b \cdot v_i$$

$$K_b = B \cdot l \cdot 10^{-8}$$



kjer je:

B gostota magnetnega fluksa, [Gauss]

l dolžina jedra, [cm]

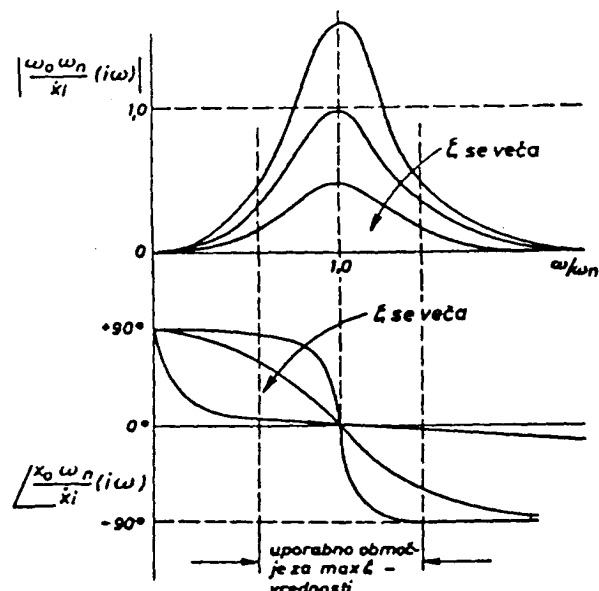
v_i hitrost, [cm/s]

Hitrost nihanja dobimo z manipulacijo enačbe (1).

$$\frac{x_0}{Dx_i}(D) = \frac{D}{D^2 + 2\zeta\omega_n D + \omega_n^2}$$

V frekvenčnem prostoru velja:

$$\frac{x_0}{\dot{x}_i}(j\omega) = \frac{1}{2\zeta\omega_n - j\frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega}}$$



Če želimo, da bo merjena pot x_0 merilo za hitrost Dx_i potem mora biti izraz:

$$\frac{x_0}{\dot{x}_i}(j\omega) \approx konst., \quad \text{kar velja v primeru: } \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega} \approx 0 \Rightarrow \frac{x_0}{\dot{x}_i}(j\omega) = \frac{1}{2\zeta\omega_n}$$

Pri veljavnosti mora biti $\omega = \omega_n$, kar pomeni, da merimo hitrosti lahko samo v območju lastne frekvence ω_n seizmičnega senzorja.

Senzorji za pospeške (akcelometri):

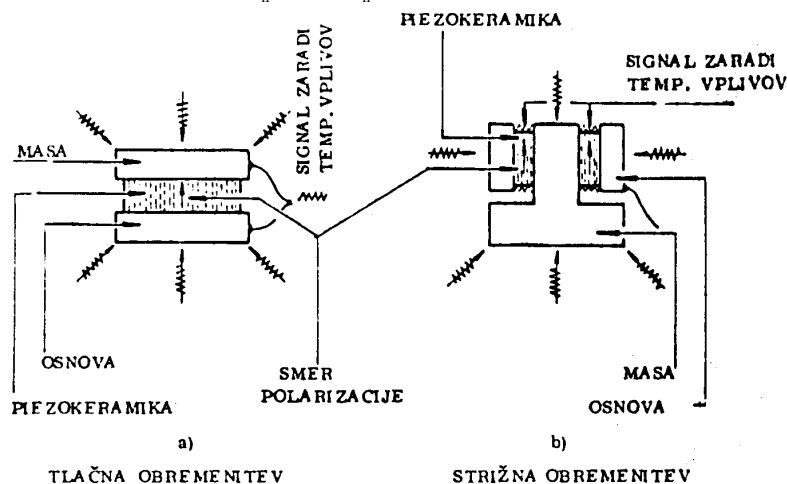
To so najvažnejši senzorji za merjenje nihanj, udarov in splošne meritve absolutnega gibanja. Poznamo jih v različnih izvedbah, njihova konstrukcija je osnovana na seizmičnem senzorju (M-K-B sistem).

Razlogi za široko uporabno območje teh senzorjev so:

- frekvenčni odgovor od nič do visokih vrednosti. Konstanto spreminjanje pospeška je mogoče meriti.
- poti in hitrosti lahko hitro ugotovimo z električnim integriranjem signala.
- meritve predhodnih pojavov, posebno sunkov so enostavne.
- katastrofalne sile v strojih, ki vodijo do porušjenja so korelirane k pospeškom in manj k hitrostim ali potem.

Transforna funkcija za deformacijski tip akcelometra:

$$\frac{x_0}{D^2x_i}(D) = \frac{K}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + 2\zeta\frac{D}{\omega_n} + 1} \quad K = \frac{1}{\omega_n^2}$$



Primer: Pri merjenem objektu moramo izmeriti translacijske poti v frekvenčnem pasu od 10-1000 Hz. Ocenimo mehanske parametre senzorja K in B, če je največja dopustna masa 5 kg. Za filtriranje višjih frekvenčnih motenj, uporabimo električni filter. Nariši shemo odgovarjajočega filtra ter določi parametre, pri tem pa upoštevaj, da je impedanca elementa 1000 Ω .

$$f = 10 - 1000 \text{ Hz}$$

$$M = 5 \text{ kg}$$

$$\zeta = 0,6 - 0,7$$

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \cdot \pi \cdot f_{\min} & \frac{\omega}{\omega_n} = 10 \Rightarrow \omega_n &= \frac{\omega}{10} \\ \omega &= 2 \cdot \pi \cdot 10 & \omega_n &= \frac{20 \cdot \pi}{10} \\ \omega &= 20 \cdot \pi & \omega_n &= 2 \cdot \pi = 6,28 \text{ s}^{-1} \\ \omega &= 62,8 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_s}{M}} \Rightarrow K_s = M \cdot \omega_n^2 = 197 \text{ kg/s}^2$$

$$\zeta = \frac{B}{2 \cdot \sqrt{K_s \cdot M}} \Rightarrow B = 2 \cdot \zeta \cdot \sqrt{K_s \cdot M}$$

$$B = 40,84 \text{ kg/s}$$

Za filtriranje višjih frekvenčnih motenj uporabimo električni nizkopasovni filter:

$$R_F = 1000 \Omega$$

$$\tau = RC \Rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_c}$$

13.) Merjenje sil

V praksi je znana vrsta načinov za merjenje sil:

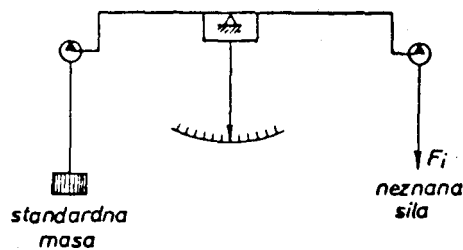
- tehtanje z ozirom na referenčno utež.
- merjenje pospeška a telesa z znano maso M, na katero deluje sila F_i .
- ravnotežje sile F_i proti magnetni sili, ki se razvije zaradi interakcije pod napetostjo in permanentnim magnetom.
- pretvorba sile F_i v pritisk tekočine ali plina in merjenje pritiska.
- delovanje sile F_i na elastični dajalec in merjenje deformacije dajalca, ki predstavlja primarni senzor.

Merilni sistem za merjenje sil imenujemo običajno dinamometer.

Zahteve, ki se postavljajo na konstruktivno izvedbo merilnih sistemov za merjenje sil:

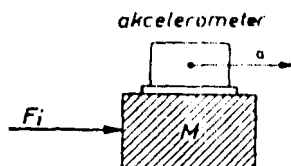
- majhna merilna pot oz. deformacija primarnega senzorja.
- dimenzije primarnega senzorja.
- konstrukcija in vpetje primarnega senzorja, ki ne dopušča mehanske histereze.
- veliko merilno območje.
- zahtevana natančnost.
- odgovarjajoče dinamične karakteristike z ozirom na časovni potek sile, ki jo merimo.
- neodvisnost merjenja komponent sil F_x, F_y, \dots
- lahko in enostavno umerjanje.
- robustnost konstrukcije.
- enostavno posluževanje.

Merjenje sil s tehtanjem



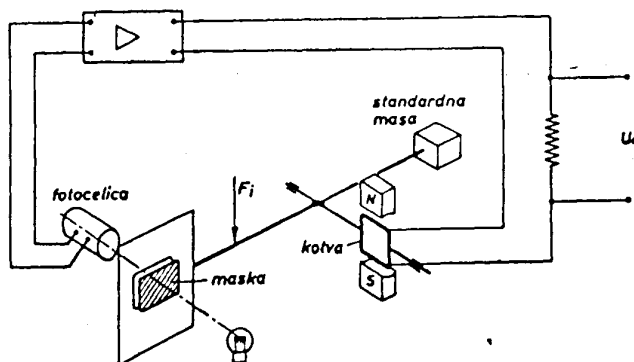
Neznana sila F_i deluje preko vzvodja, točke obešenja standardno maso, ki nam je poznana. Ko pokaže kazalec ničelno lego, sta teža standardne mase ter neznana sila F_i v ravnotežju in enako veliki.

Merjenje sile F_i z akcelometrom



Pri znani masi M merimo pospešek a s pomočjo akcelometra in jo izračunamo po enačbi $F_i = M \cdot a$.

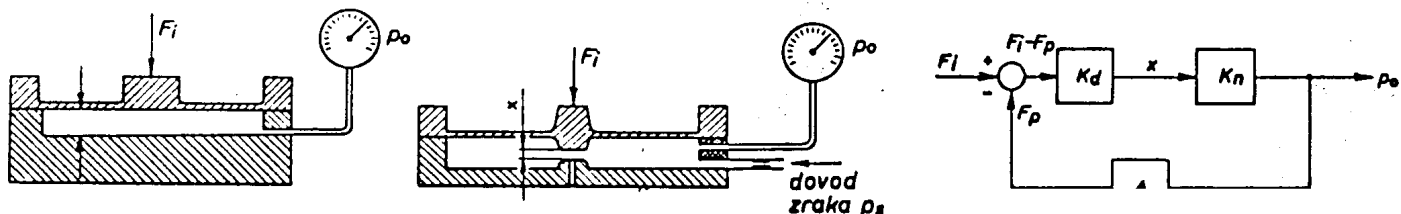
Elektromagnetno merjenje sil



Sila F_i deluje na vzvod in premakne zaslonko za določen iznos. Pri tem se pojavi med zaslonko in masko rega, skozi katero prihaja svetloba, ki pada na fotocelico. V tej se generira napetost, ki se ojači in dovaja preko povratne zveze tok kotvi, ki se nahaja na vrtilni osi vzvoda. Ta zasuk je proporcionalen izhodni napetosti U_0 , ki predstavlja merilo za velikost sile F_i . Ta metoda se uporablja predvsem v fini mehaniki.

Hidravlično in pnevmatično merjenje

F_i deluje na neko membrano, ki zapira nek prostor napolnjen s tekočino. Zaradi deformacije se prostor zmanjša in poveča se tlak. Pritisk p_0 merimo s pomočjo manometra ali pa s primernih električnim senzorjem. Na spodnji sliki je prikazana hidravlična celica. Merilno območje je od nekaj Newtonov do $5 \cdot 10^5$ N, natančnost pa je $\pm 0,1\%$ polne skale, pri ločljivosti $0,02\%$



Na spodnji sliki pa je prikazana pnevmatična celica, uporabljamo pa jo za meritev manjših sil.

Statične lastnosti sistema so vpisane z naslednjo enačbo:

$$(F_i - p_0 \cdot A) \cdot K_d \cdot K_n = p_0$$

$$p_0 = \frac{F_i}{\frac{1}{K_d \cdot K_n} + A}$$

kjer je:

K_d podajnost membrane, [m/N]

K_n ojačevalni faktor šobe, [N·cm⁻²/m]

Ker K_n ni konstanten, temveč se spreminja z vrednostjo x , je funkcijska zveza med F_i in p_0 nelinearna.

Ker pa je:

$$K_d \cdot K_n \gg 0 \Rightarrow \frac{1}{K_d \cdot K_n} = 0$$

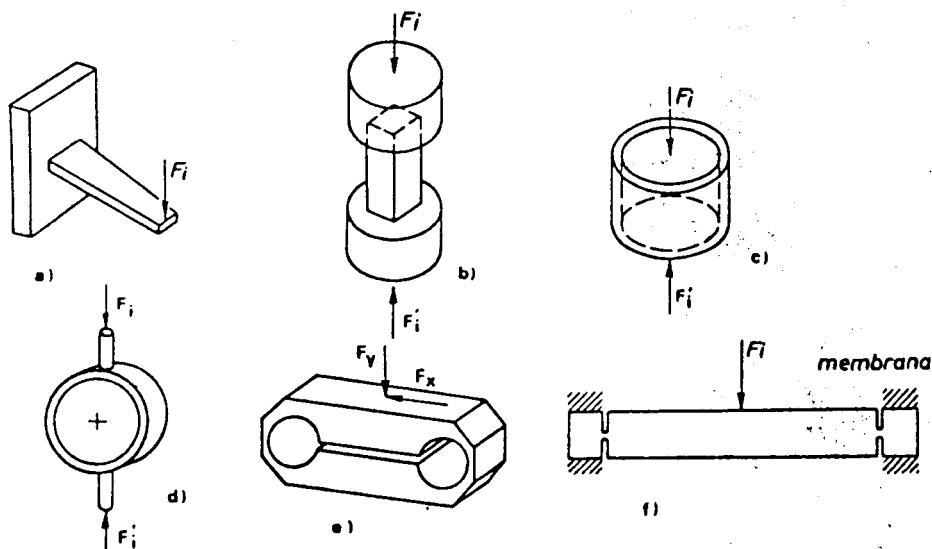
je:

$$p_0 = \frac{F_i}{A}$$

Merilno območje: 20 N – 25 000 N

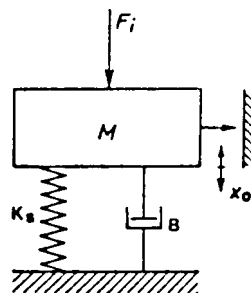
Elastični senzori za merjenje sil

Pri gradnji dinamometrov in merilcev momentov in moči uporabljamo kot primarni senzor elastični element, ki pretvori silo F_i v elastično deformacijo δ .



Pri izračunu elastičnih senzorjev moramo upoštevati:

- najmanjšo deformacijo δ , ki jo povzroči najmanjša sila F_i merilnega območja z upoštevanjem razmerja med koristnim signalom in šumom
- dinamično sistema masa – vzmet – dušilka, ki pogojuje uporabo dinamometra pri dinamičnih meritvah. Pri tem računamo transferne karakteristike, ki so pogojene predvsem z lastno frekvenco ω_n in faktorjem dušenja ζ .



Zveza med silo F_i in premikom $x_0 = \delta$ za sistem drugega reda:

$$F_i - K_s \cdot x_0 - BDx_0 = MD^2 x_0$$

$$\frac{x_0}{F_i}(D) = \frac{K}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{D}{\omega_n} + 1}$$

kjer je:

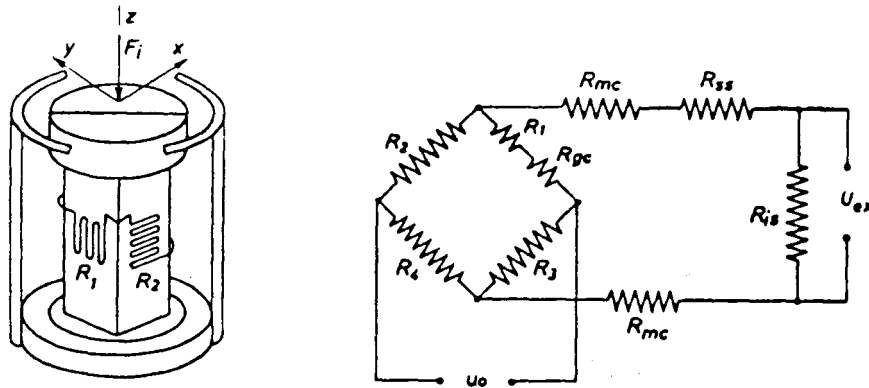
- lastna frekvenca:
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_s}{M}}$$

- faktor dušenja:
$$\zeta = \frac{B}{2\sqrt{K_s M}}$$

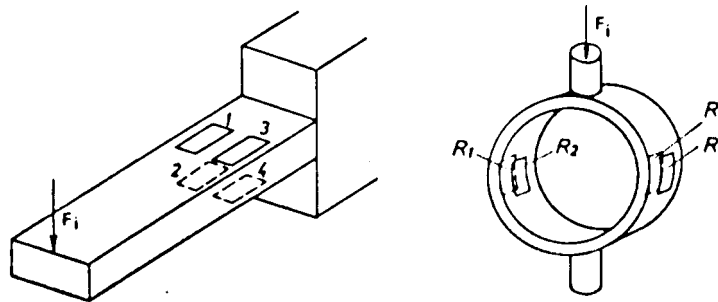
Vrednost za dušenje vzamemo v območju $\zeta = 0,6 - 0,7$. Maso M izberemo tako, da je ω_n za 1 dekada večja od ω_{\max} sile.

- faktor ojačanja:
$$K = \frac{1}{K_s}$$

Doza za tlačne sile z vezanimi merilnimi trakovi:



Uporaba enostransko vpetega nosilca in obroča s primerno nameščenimi merilnimi trakovi za merjenje sile F_i :



Faktor ojačanja predstavlja za nas uporabno območje, do te frekvence output uspešno sledi inputu. To nam da podlago, da uspešno merimo dinamično. Faktorje mase, vzmeti in dušilke spreminjamo toliko časa, da se zadovolji pogoj: $\omega_n \geq 10 \cdot \omega_{i \max}$.

14.) Konstruiranje dinamometra

Konstruiraj dinamometer za merjenje sile. Osnovni podatki so:

- frekvenčni pas delovanja sile: 0 – 100 Hz
- maksimalna amplitudna sila: 1000 N
- dopustni upogib senzorja na prijemališče sile 10^{-4} m.

Določi faktor ojačanja, vzmetno konstanto, maso in dušenje elastičnega senzorja. Izberi in utemelji izbor sekundarnega senzorja in ustreznega ojačevalca.

$$\Delta v = 0 - 100 \text{ Hz}$$

$$F_i = 1000 \text{ N}$$

$$x_0 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

faktor ojačanja

masa

$$\omega_i = 2\pi v$$

$$\omega_i = 2 \cdot \pi \cdot 100 = 628,3 \text{ s}^{-1}$$

$$\Delta\omega_i = 0 - 628,3 \text{ s}^{-1}$$

$$F_i = K_s x_0$$

$$K_s = \frac{F_i}{x_0} = \frac{1000}{10^{-4}} = 10^7 \text{ N/m}$$

$$K = \frac{1}{K_s} = 10^{-7} \text{ m/N}$$

$$\omega_n = 10 \cdot \omega_i = 6283 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_s}{M}}$$

$$M = \frac{K_s}{\omega_n^2} = \frac{10^7}{6283^2}$$

$$M = 0,25 \text{ kg}$$

- koeficient dušenja:

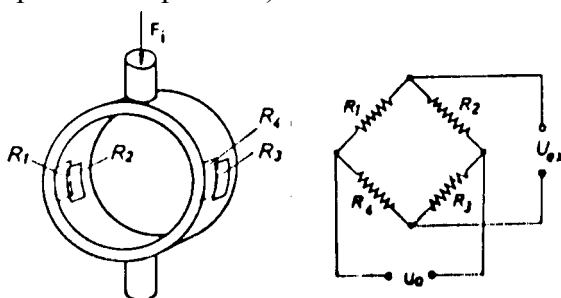
$$\zeta = 0,6 - 0,7$$

$$\zeta = \frac{B}{2\sqrt{K_s \cdot M}}$$

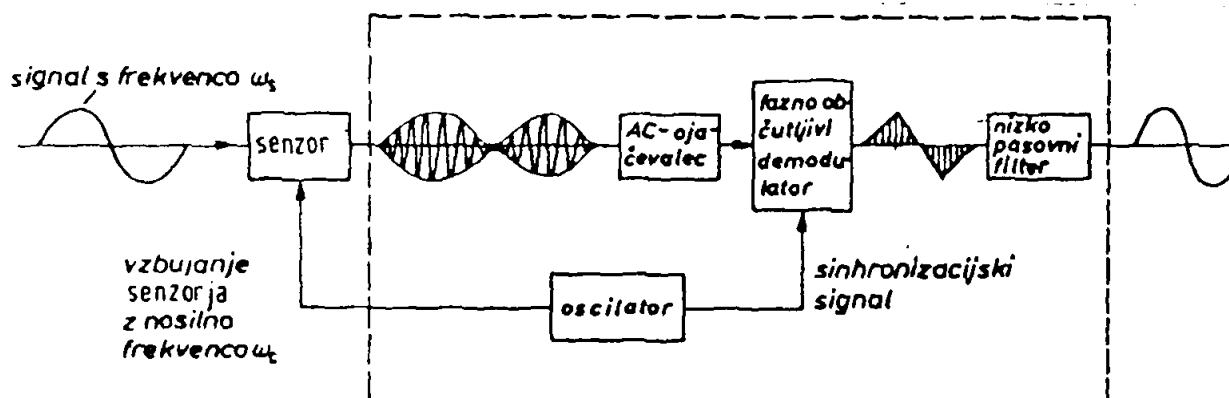
$$B = 2 \cdot \zeta \cdot \sqrt{K_s \cdot M}$$

$$B = 2213,5 \text{ Ns/m}$$

Kot sekundarni senzor bi izbral merilne trakove, ki bi jih pravilno pritrdil na elastične senzorje, ter bi jih povezal v Wheatstonov mostiček. Kot princip merjenja bi uporabil metodo odklona (obvladamo tudi dinamične pojave pri merjenju sprememb upornosti).

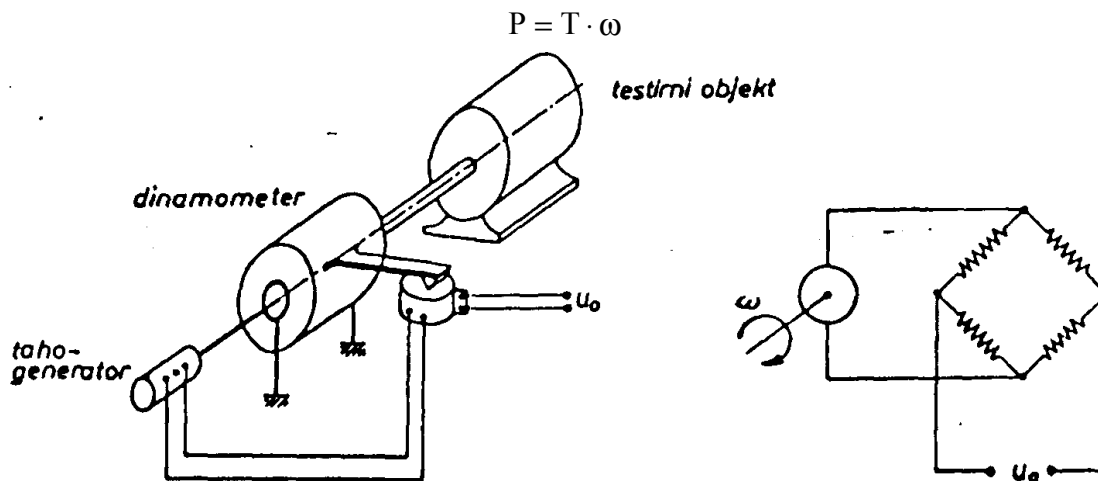


Kot ojačevalec bi izbral ojačevalec z nosilno frekvenco. Sistem deluje samo z senzorji, ki jih napajamo z AC – napetostjo. Signal s frekvenco ω_c , ki mora biti med 6 in 10 krat večjo od maksimalne frekvence v signalu.



15.) Merjene moči

Za merjenje moči (P) se poslužimo kombinaciji merilca vrtilnega momenta (T) in vrtilne hitrosti (ω). Na gred namestimo tahogenerator, ki nam meri momentno kotno hitrost. Namesto tahogeneratorja lahko uporabimo tudi digitalne števec vrtljajev, ki izmerijo vrtilno hitrost.



16.) Digitalizacija signalov

A/D pretvorba:

Za statistično vrednotenje analognih signalov jih je potrebno digitalizirati s pomočjo analognih digitalnih pretvornikov (A/D pretvornik). Pri tem postopamo:

- iz zapisa signala ocenimo najkrajšo periodo t_k , ki v signalu nastopa.
- ocenimo najdaljšo periodo t_l iz zapisa signala.
- dopustna napaka pri digitalizaciji znaša: $\delta = 0,01 \div 0,02$.

Iz teh podatkov določimo:

- iz ocenitve časa najkrajše periode t_k izračunamo najvišjo frekvenco ω_k

$$\omega_k = \frac{2 \cdot \pi}{t_k}$$

- z upoštevanjem Nyquistovega kriterija dobimo čas vzorčenja Δt_{\min} :

$$\Delta t_{\min} = \frac{2 \cdot \pi}{10 \cdot \omega_k}$$

- iz ocenitve časa najdaljše periode t_l izračunamo najnižjo frekvenco ω_l :

$$\omega_l = \frac{2 \cdot \pi}{t_l}$$

- ter nato dolžino signala T po formuli:

$$T \geq 10 \cdot t_l$$

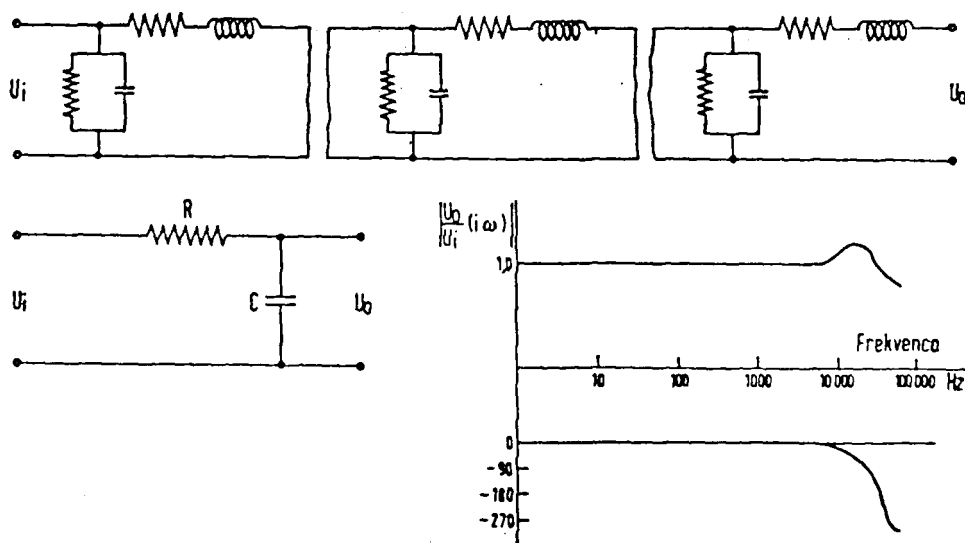
- število vzorcev signala izračunamo iz T :

$$N = \frac{T}{\Delta t_{\min}}$$

Vrednost Δt_{\min} uporabimo za nastavitve A/D pretvornika, ter vrednost T za določitev časa digitalizacije (oz. N za število vzorcev signala).

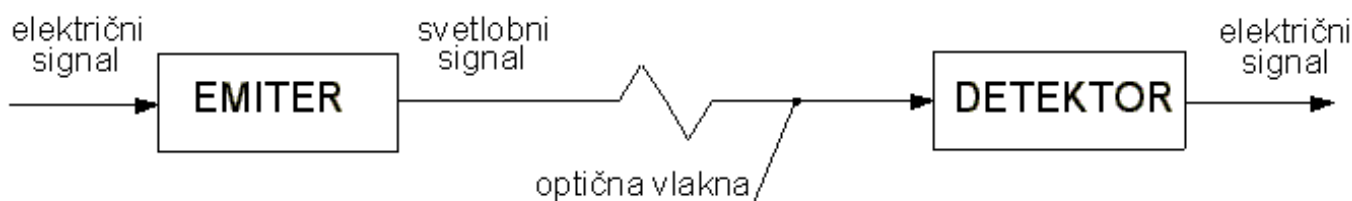
17.) Elementi za prenos signalov

Model transmisijkega kabla in frekvenčni odgovor

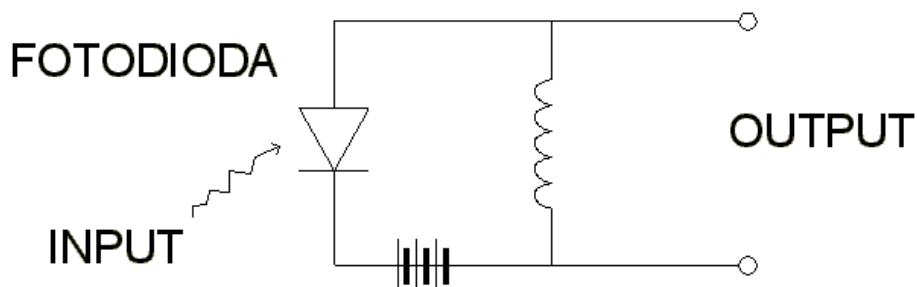


Če se poveča dolžina kabla se zmanjša sposobnost prenašanja visokih frekvenc.

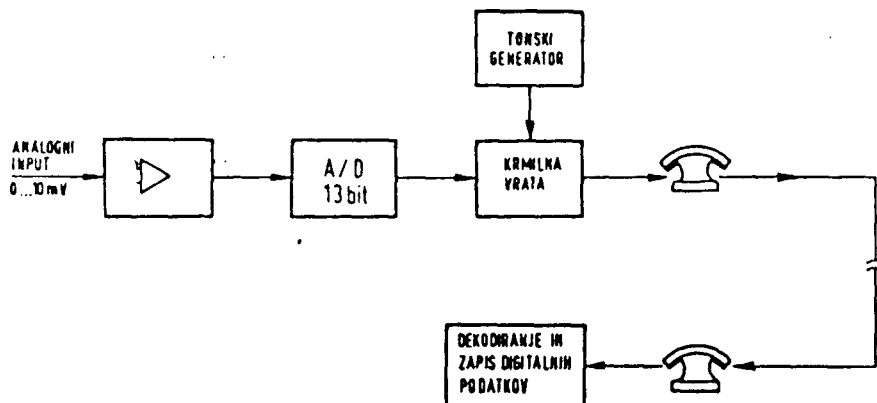
Komunikacijski sistem osnovan na optičnem kablu



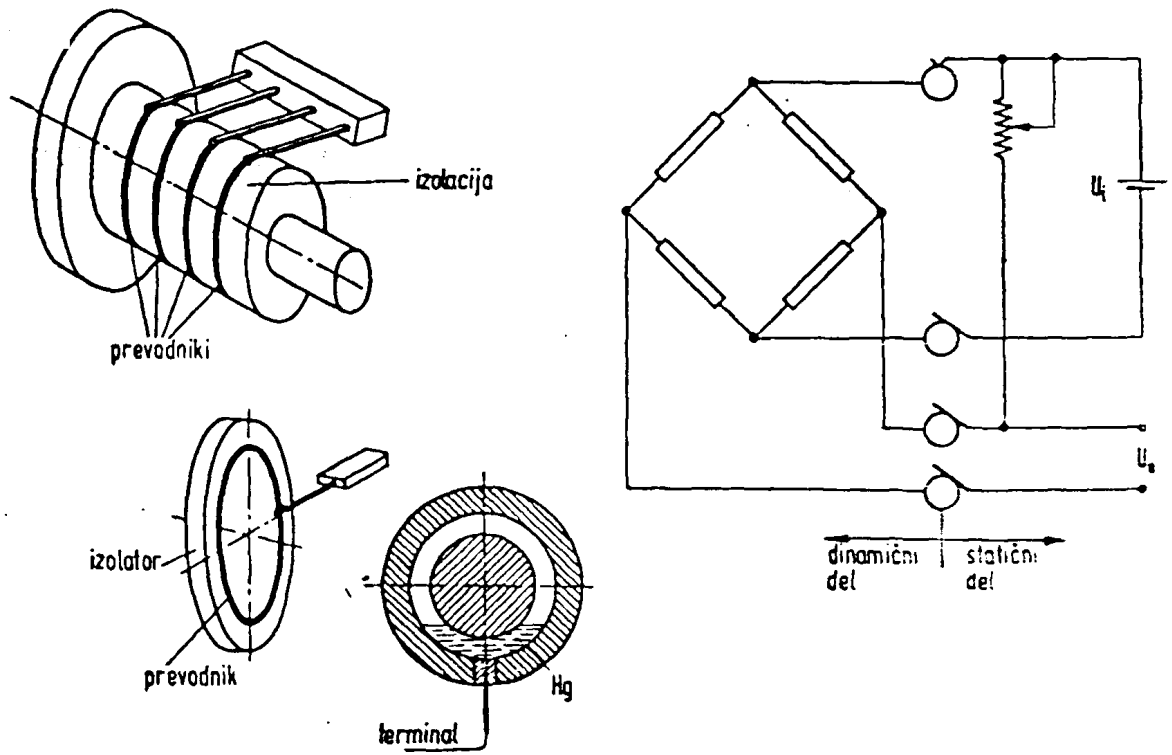
Struktura silicijske fotodiode in električna shema:



Telefonski prenos digitalnih podatkov



Drsni obroč

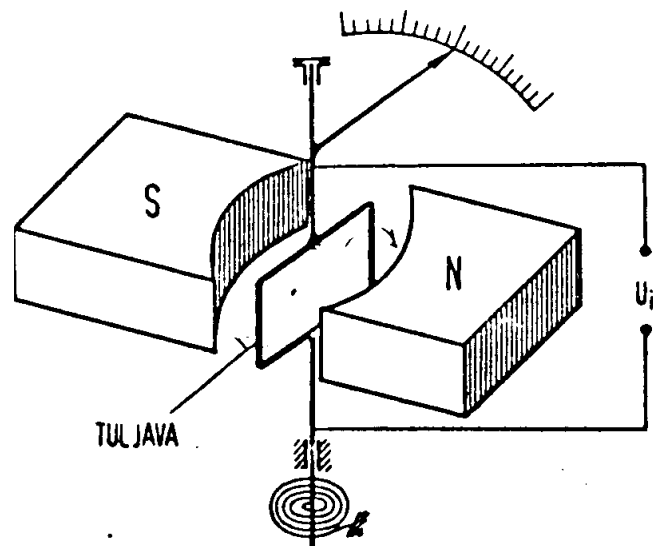


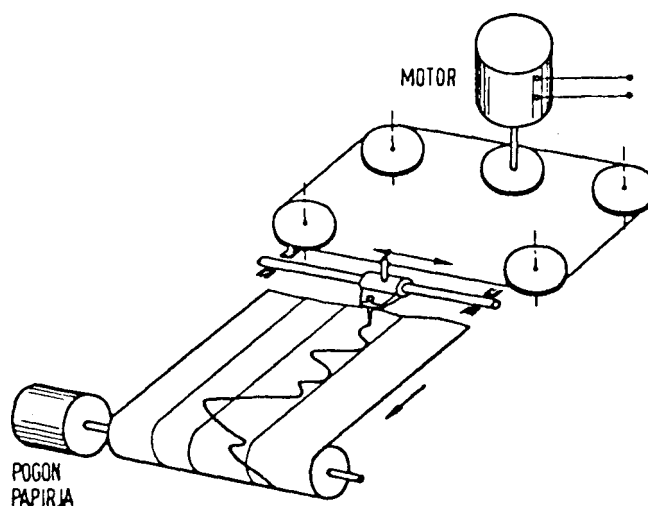
Radiotelemetrija

Povezava preko elektromagnetnega medija.

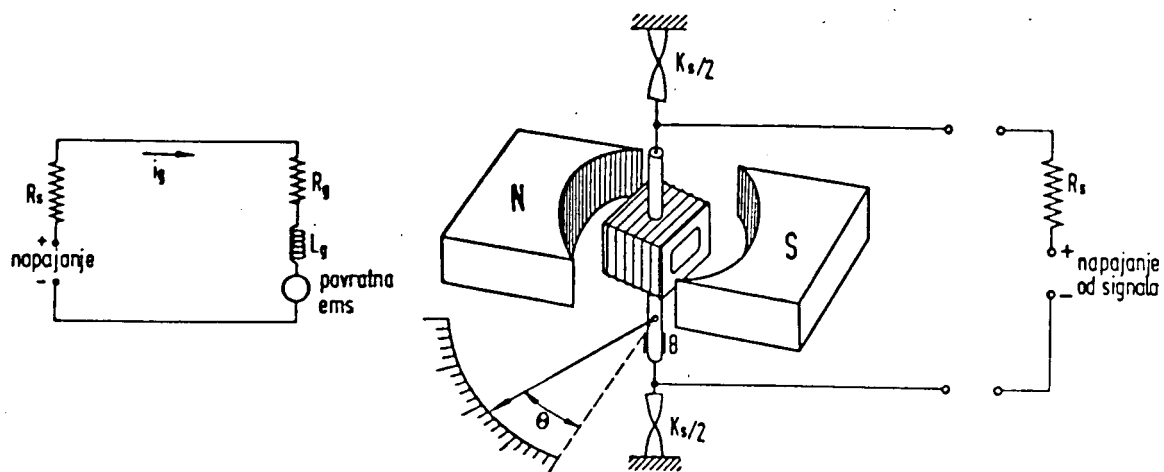
18.) Elementi za prikaz signalov

Analogni DC – voltmeter (D' Arsonalovo gibanje)

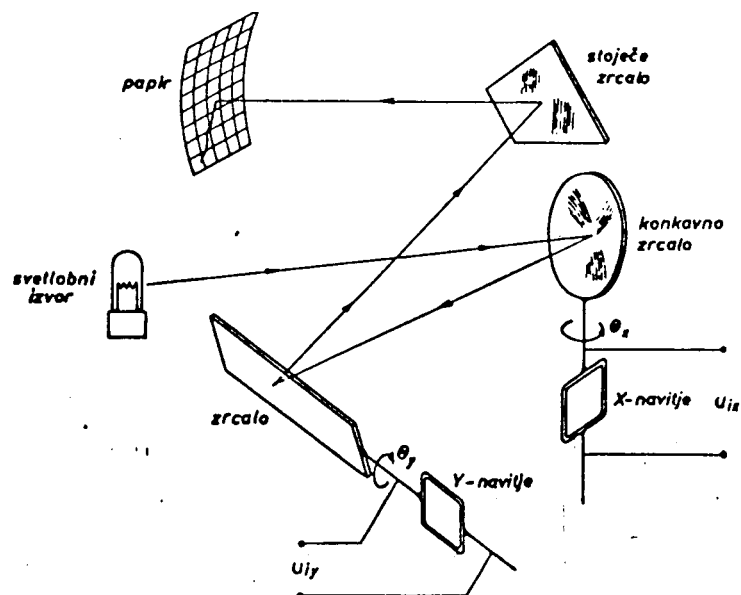




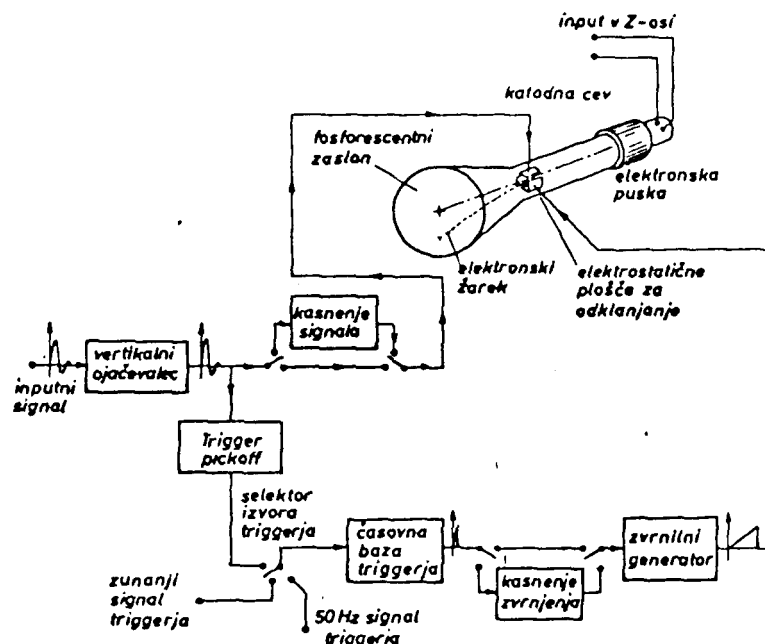
Galvanometer



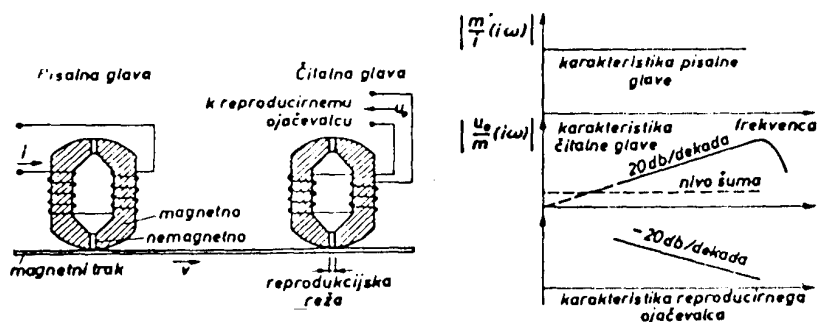
X – Y galvanometer



Osciloskop – princip delovanja



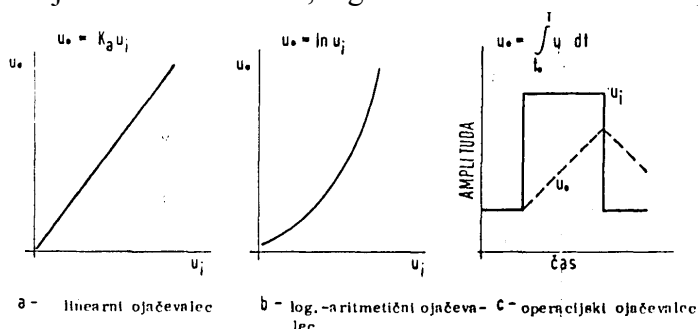
Princip delovanja merilnega magnetofona in njegove karakteristike



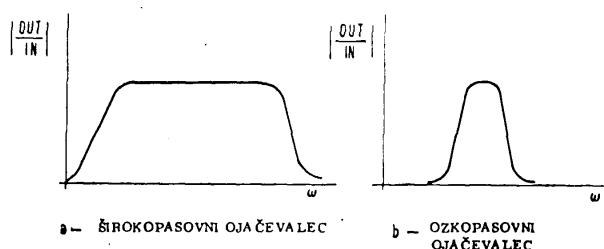
19.) Ojačevalci

Električni signal iz sekundarnega senzorja je običajno zelo nizko energetski oz. nizko napetostni. Zato jih je potrebno primerno ojačiti preden jih prenašamo po kablji ali brezžično k napravam za prikaz podatkov ali procesnemu računalniku v nadaljnjo obdelavo.

Po funkciji klasificiramo ojačevalce v linearne, logaritmično-aritmetične in operacijske.

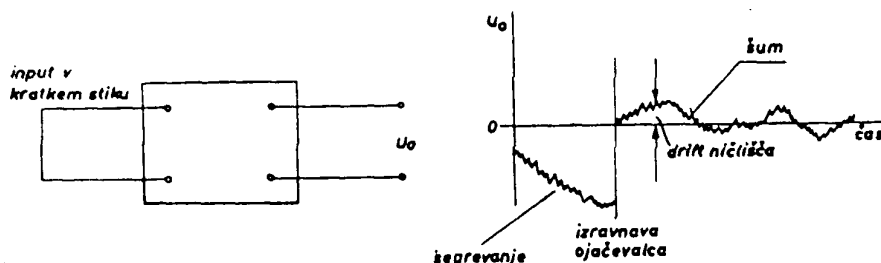


Z ozirom na frekvenčni odgovor klasificiramo ojačevalce na širokopasovne in ozkopasovne



Performančne karakteristike

Pri izbiri ojačevalcev moramo razen zgoraj naštetega upoštevati še pravilno izbiro inputne in outputne impedance ojačevalca, vpliv driftna in šuma ojačevalca na koristen signal in njegovo zavrnitveno razmerje (CMR). Zahteva se visoko inputno in zelo nizko outputno impedanco ojačevalca da zadostimo zgornjim zahtevam.

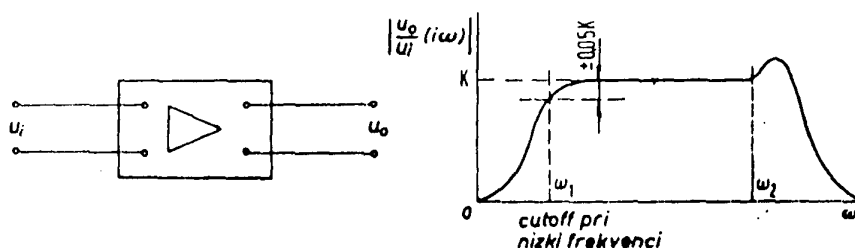


Poleg inputne in outputne impedance ojačevalca moramo upoštevati tudi frekvenčno območje z ravno karakteristiko.

AC – ojačevalec

AC – ojačevalec (AC – izmenični tok)

Konstruiranje je običajno v tranzistorski tehniki. Zelo nizkih frekvenc ne moremo primerno manipulirati. Drift ničlišča (drift ničlišča nastane zaradi sistematčne napake!) se ne pojavi. Slaba lastnost je da nizkih frekvenc (nizka frekvenca \rightarrow počasi se spreminjajoči se signal) preslabo ojači.



Ploski frekvenčni odgovor: 5 – 25 000 Hz

Dopustna toleranca: $\pm 5\%$

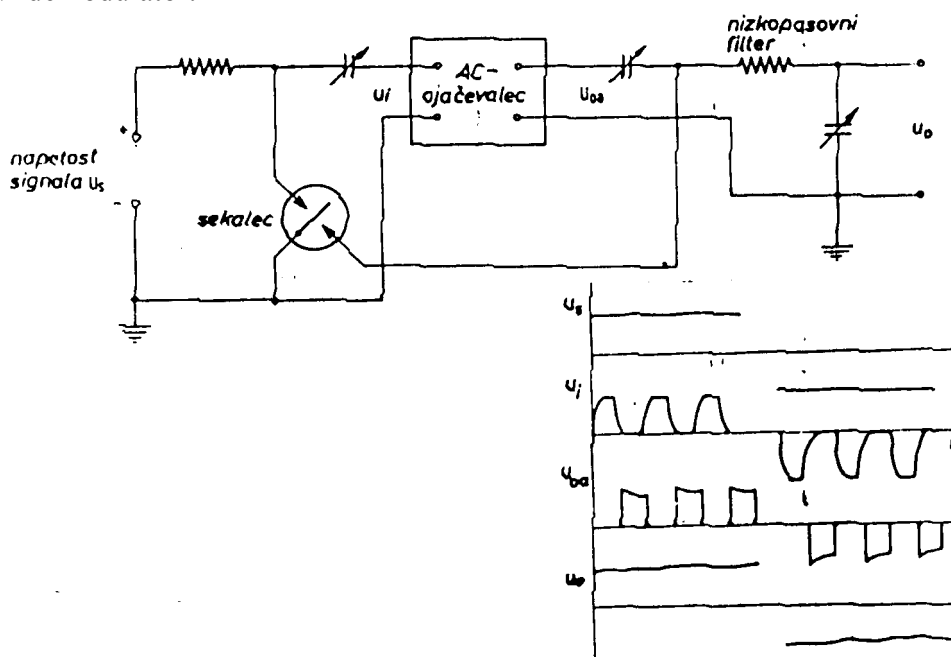
Ojačitev (K): 10 – 2000 ali še več

Inputna impedanca: 1 – 2 M Ω

Outputna impedanca: 30 k Ω

DC - ojačevalec

Ojačevanje DC – napetosti je možno v cevni ali tranzistorski tehniki. Pri tem pa nastopajo vplivi drifta ničlišča, vplivov sklapljanja stopenj in drugi faktorji, ki otežujejo uporabo DC – ojačevalcev v praksi. Zaradi tega so razvili DC – ojačevalec s sekalcem (chopperjem). Ta sprejema DC – napetosti U_s iz senzorjev, jih pretvori v AC – ojačevalcu, primerno ojači na vrednost U_{oa} . S pomočjo RC – filtra se to ojačano napetost spremeni nazaj v DC – napetost U_o . Za ugotovitev polaritete napetosti uporabljamo fazno občutljivi demodulator.



Faktor ojačanja (K): 10 – 10 000

Odgovor: ± 3 db od $\omega_s = 0 - 30$ Hz

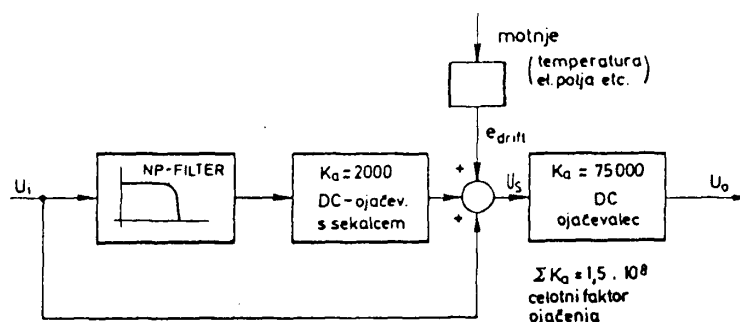
Stabilnost faktorja ojačitve: $\pm 0,1\%$

Ničelni drift: $\pm 0,5$ V/mesec

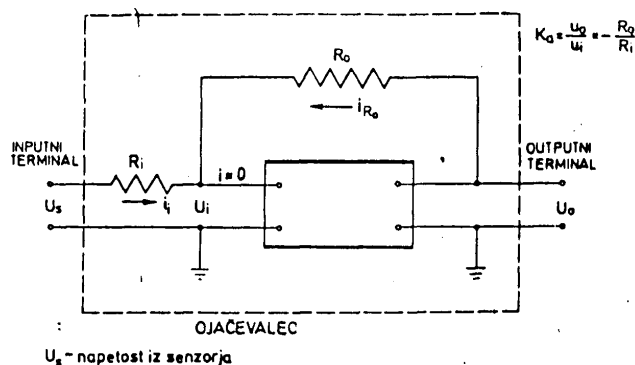
Nelinearnost: 0,1%

Šum: 0,5 V

V merilni tehniki se pogosto uporabljajo stabilizirani DC – ojačevalci s sekalcem. Ta se sestoji iz DC – ojačevalca s sekalcem in čistim DC – ojačevalcem, ki sta izbrana tako, da je drift celotnega ojačevalca zmanjšan za faktor ojačanja DC – ojačevalca s sekalcem. Širina frekvenčnega pasu v katerem ta ojačevalec deluje ni omejen s sekalno frekvenco. Dobre lastnosti so: velika širina frekvenčnega pasu in odsotnosti drifta. Ojačevalec brez povratne zveze kot je prikazan na spodnji sliki se ne uporablja iz več razlogov.



Običajna izvedba ojačevalca je prikazana na spodnji sliki, ki ima tudi povratno zvezo.



U_s – napetost iz senzorja

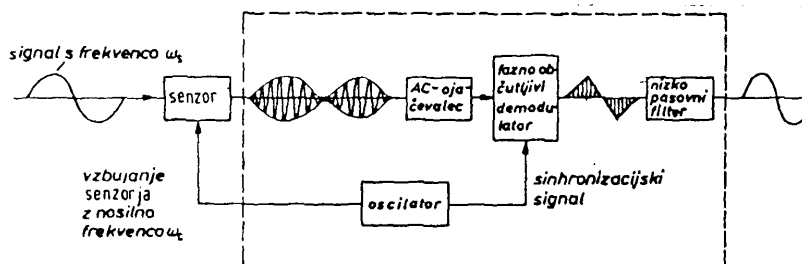
U_s napetost senzorja

$$\frac{U_s - U_i}{R_i} = -\frac{U_o - U_i}{R_o}$$

$$\frac{U_o}{U_i} = -\frac{R_o}{R_i} = K_a$$

Ojačevalec z nosilno frekvenco

Uporabljamo tam, kjer želimo meriti signale, ki se spreminjajo z zelo nizkimi frekvencami ali pa so istosmernega značaja. Sistem deluje samo s senzorji, ki jih napajamo z AC napetostjo (merilni trakovi, LVDT).



Ploski frekvenčni odgovor: 5 – 1000 Hz

Ojačitev (K): 3000

Napaka: $\pm 5\%$

Inputna upornost: 350 Ω

Outputna upornost: 12 Ω

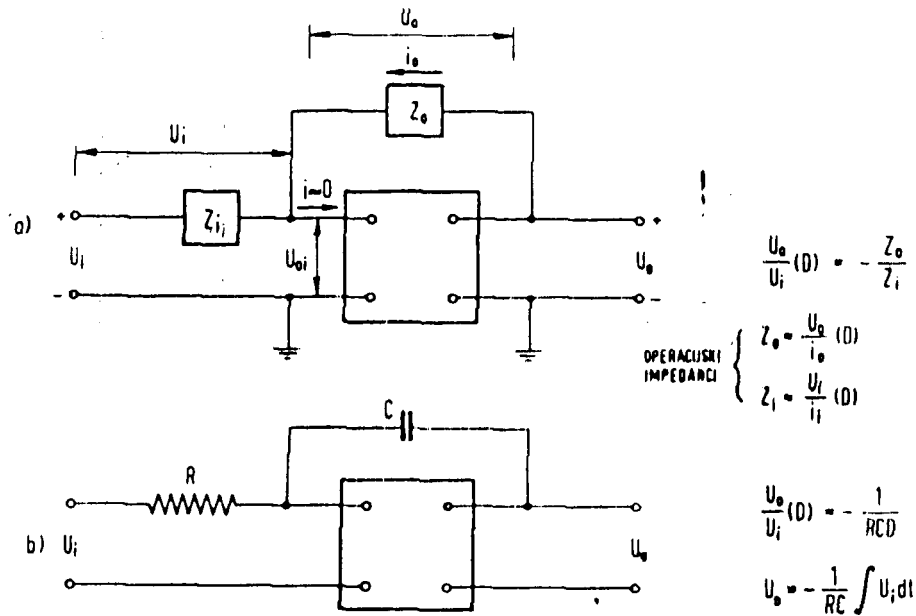
Maksimalna outputna jakost toka: 0,1 A

Nelinearnost: $\pm 2\%$

Drift ničlišča manj kot 0,5%

Operacijski ojačevalci

Te vrste ojačevalci so čisto stabilizirani DC – ojačevalci z zelo visokim faktorjem ojačanja K_a . Te komponente uporabljamo v analogni računalniški tehniki, dinamični kompenzaciji,...



Z_0 in Z_i operacijski impedanci

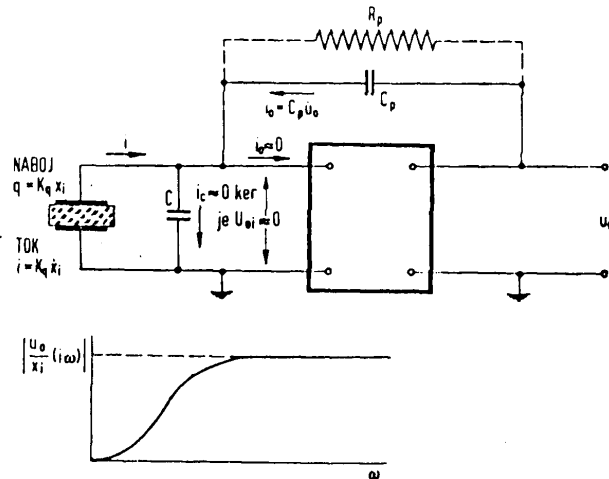
$$\frac{U_o}{U_i}(D) = -\frac{Z_0}{Z_i}$$

$$Z_0 = \frac{U_o}{i_o}(D) = \frac{1}{CD} \quad \frac{U_o}{U_i}(D) = -\frac{1}{RCD}$$

$$Z_i = \frac{U_i}{i_i}(D) = R \quad U_o = -\frac{1}{RC} \int U_i dt$$

Ojačevalec naboja

Z razvojem piezoelektričnih senzorjev za različne namene kot so to merjenje dinamičnih sil, pritiskov, pospeškov in drugih hitro se spreminjajočih parametrov je bil razvit tudi poseben ojačevalec imenovan ojačevalec naboja.



V povratno zvezo operacijskega ojačevalca vključimo kapacitivnost C_p . Pod predpostavko $i_c \approx 0$.

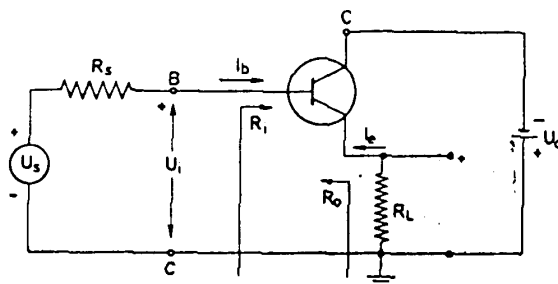
$$K_q D x_i = -C_p D U_o \quad \frac{U_o}{x_i}(D) = \frac{K \cdot \tau \cdot D}{1 + \tau D} \quad K = \frac{K_q}{C_p} [V/cm]$$

$$U_o = -\frac{K_q \cdot x_i}{C_p} \quad \tau = R_p \cdot C_p$$

Prednost ojačevalca naboja je da faktor ojačanja K in časovna konstanta τ nista odvisna od kapacitivnosti piezokristala C_{kr} in povezovalnih kablov C_{kab} .

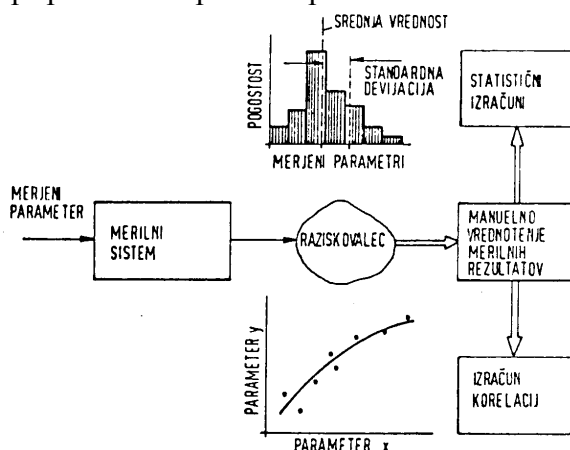
Druge enote, ki se uporabljajo v povezavi z ojačevalci so vezane predvsem na prilagajevanje impedance senzorjev (npr. piezoelektričnih, kapacitivnih in drugih visokoimpedančnih senzorskih elementov) k pisalniku. Ojačevalec mora imeti v tem primeru zelo visoko inputno impedanco, da se zmanjša obremenilni efekt. Outputna impedanca ojačevalca pa mora biti v tem primeru zelo nizka.

Kot enoto za prilagoditev impedanc uporabljamo emitterski sledilec, kot transformator impedančnih vrednosti. To omogoča transformacijo impedančne funkcije od visoke na nizko upornost v širokem območju frekvenc. Pri tem je napetostno ojačanje manjše od 1. Emitterski sledilec omogoča zvišanje moči signala brez fazne zakasnitve.



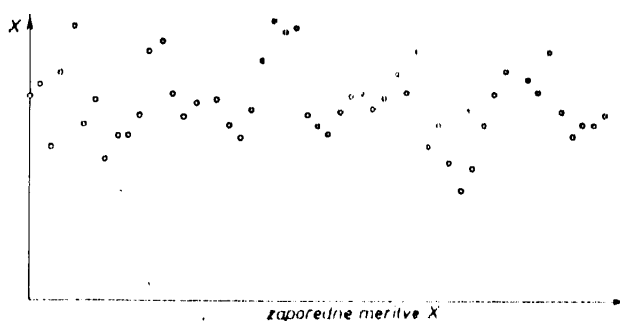
20.) Obdelava in vrednotenje merjenih informacij

Na izhodu iz merilnega sistema raziskovalec opazuje merilne signale, ki se jih s pomočjo raznih kazalnih naprav naredi vidne. V mnogih primerih je vrednotenje merjenih parametrov manualno. Opazovanje se zapisuje in s pomočjo statističnih, korelacijskih ali drugih metod komprimira v informacije kot so npr. srednja vrednost, standardna deviacija, korelacijska funkcija, regresijska premica,... Pri velikem številu informacij je manualna metoda le pogojno spremenljiva. Avtomatizaciji eksperimenta, še posebno zapisa ter vrednotenja pripada danes posebna pozornost.

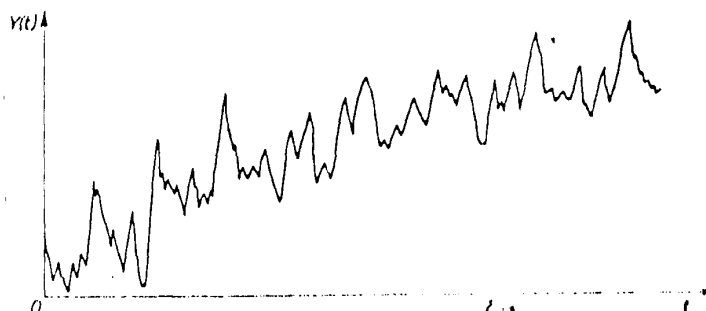
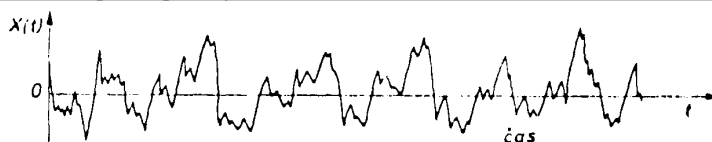


Diskretni in kontinuirani signali:

Pojavljajo se odstopanja od neke pričakovane vrednosti $E[x]$ nekega pričakovanega časovnega poteka $E[x(t)]$.



Stacionarna in nestacionarna naključni proces:

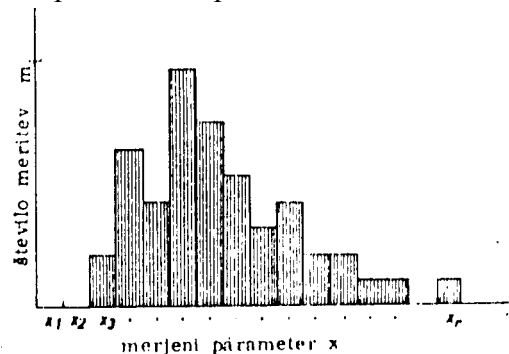
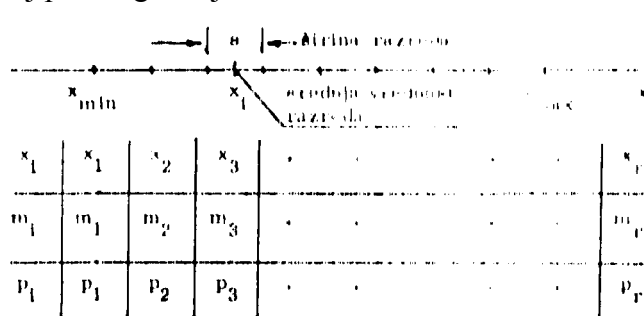


Porazdelitvene funkcije:

$X=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ zapisujemo v obliki vrste, pri čemer razdelimo območje variranja parametra v določeno število razredov r . Število razredov r v vrsti razdelitve naj bo liho število in znaša običajno med $r = 7 - 19$ razredov. Širina razreda s je enaka:

$$s = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r}$$

Sedaj pa še ugotavljamo kolikokrat neka določena vrednost parametra v posameznem razredu nastopi.



$$P(X = x_1) = p_1$$

$$P(X = x_2) = p_2$$

.

.

$$P(X = x_r) = p_r$$

$$\sum_{i=1}^r p_i = 1$$

$$p_i = \frac{m_i}{n}$$

kjer je:

p_1, p_2, \dots, p_r verjetnost s katerimi se pojavi neka vrednost parametra X v razredu definirana z vrednostjo x_1, x_2, \dots, x_r

m_i število meritev v nekem določenem razredu

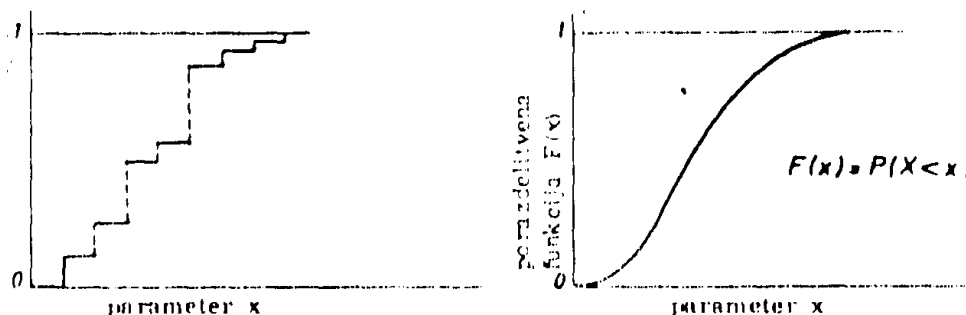
n število vseh meritev, ki tvorijo histogram

Porazdelitvena funkcija za kontinuirane naključne spremenljivke:

Ko imamo opravka s kontinuiranimi naključnimi spremenljivkami ne moremo uporabiti koncepta porazdelitve vrste. Verjetnost nekega merjenega parametra $X \leq x$ in njeno porazdelitev $F(x)$ zapišemo $F(x) = P(X \leq x)$. Njeni lastnosti sta naslednji:

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(\infty) = 1$$

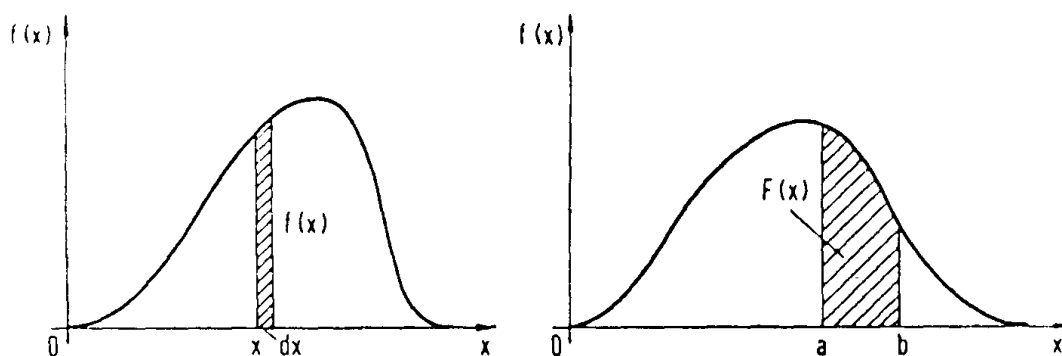


Velja pa še povezava:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Gostota porazdelitve

Če definiramo porazdelitveno funkcijo $F(x)$, dobimo gostoto porazdelitve $f(x)$ kar pomeni $F'(x) = f(x)$.



Verjetnost, da vrednost parametra X pade v meje med $x = a$ in $x = b$, je enaka

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx$$

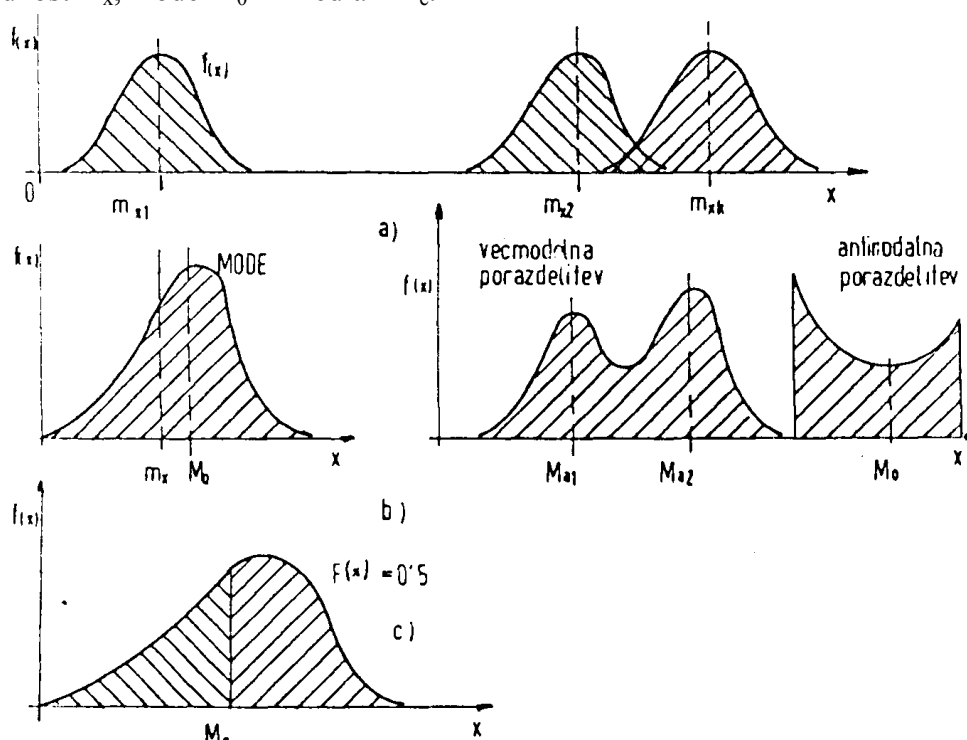
$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

21.) Karakteristike naključno porazdeljenih merilnih veličin

V krmilnih procesih ni smiselno manipulirati s takšnim volumenom informacij (podatki v obliki vrste ali histograma ali gostote porazdelitve). Zato komprimiramo število informacij z izračunom karakteristik porazdelitve naključnih spremenljivk. Te so definirane tako, da opisujejo položaj in oblike porazdelitve merjenih vrednosti s tako imenovano položajnimi oz. centralnimi karakteristikami.

Položajne karakteristike

Z njimi definiramo lego gostote porazdelitve $f(x)$, parametra X na njegovi osi. Položajne karakteristike so: srednja vrednost m_x , mode M_0 in median M_e .



Srednja vrednost za diskretne primere

$$E[X] = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_r \cdot p_r}{p_1 + p_2 + \dots + p_r} = \frac{\sum_{i=1}^r x_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^r p_i} = \sum_{i=1}^r x_i \cdot p_i$$

kjer je : $\sum_{i=1}^r p_i = 1$

Za praktični primer:

$$m_x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

n število meritev pri poizkusih

x_i Posamične vrednosti merjenega parametra

Za zvezen primer:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Mode M_0

Mode M_0 neke naključne spremenljivke X je definiran kot njena najverjetnejša vrednost. Pri praktičnih poizkusih lahko nastopajo tudi večmodalne ali pa tudi antimodalne porazdelitve.

Median Me

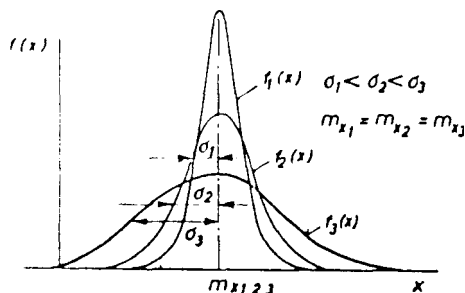
Median Me je tista položajna karakteristika, ki razdeli porazdelitev $f(x)$ na dva enaka dela, pri čemer velja: $P(X < Me) = P(X > Me)$. V primeru, da je porazdelitev simetrična velja $Me = m_x$

Centralne karakteristike

Ko smo določili položajno karakteristiko porazdelitve $f(x)$, nastopi vprašanje kakšne so oblike $f(x)$ in s kakšnimi karakteristikami te oblike lahko opišemo.

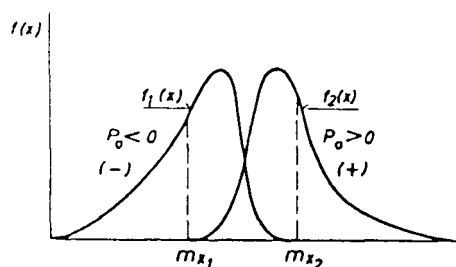
Karakteristika trosenja

Opisuje pri enakih srednjih vrednosti $m_{x1} = m_{x2} = m_{x3}$ različne širine porazdelitve $f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)$. Iz oblike porazdelitve je razvidno, da so te v vseh treh primerih simetrične.



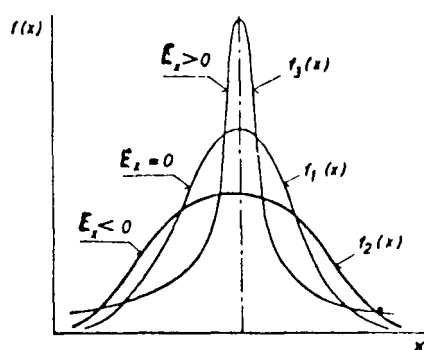
Poševnost porazdelitve

Poševnost porazdelitve je takrat, ko ima krivulja v eno ali drugo smer potegnjeno obliko. Poševnost P_0 je lahko večja ali manjša od nič.



Eksces

Pri normalni porazdelitvi je vrednost ekscesa $E_x = 0$, če je $E_x < 0$ ali $E_x > 0$ dobimo odstopanja oblike porazdelitve.



Centralni moment:

Karakterizira oblikovne posebnosti porazdelitve funkcije $f(x)$.

Uvedemo centrirano naključno veličino:

$$\dot{X} = X - m_x$$

Centralni moment μ_s , ki karakterizira oblikovne posebnosti porazdelitve $f(x)$ je lahko različnega velikostnega reda s:

$$\mu_s[X] = E[\dot{X}^s] = E[(X - m_x)^s]$$

S pomeni velikostni red eksponenta, ki definira tudi red centralnega momenta. V splošnem izrazimo centralni moment reda velikosti s:

Za diskretne naključne spremenljivke X

$$\mu_s = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^s \cdot p_i$$

Za kontinuirane naključne spremenljivke X

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_x)^s \cdot f(x) dx$$

Prvi centralni moment μ_1 , $s = 1$

Prvi centralni moment predstavlja srednjo aritmetično odstopanje CLA. Primer uporabe je npr. hrapavost površin, ...

Za diskretne naključne spremenljivke:

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^n |(x_i - m_x)| \cdot p_i$$

Za kontinuirane naključne spremenljivke:

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |(x_i - m_x)| \cdot f(x) dx$$

Drugi centralni moment $D[X]$

Drugi centralni moment ali varianca $D[X] = \sigma_k^2$ karakterizira razsipanje parametra X in ga v splošnem izrazimo kot:

$$\mu_2 = D[X] = E[\dot{X}^2] = \sigma_x$$

$$D[X] = E[(X - m_x)^2]$$

Za diskretne naključne spremenljivke:

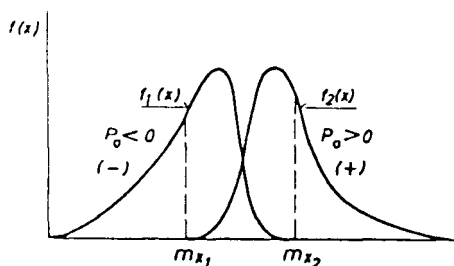
$$D[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 \cdot p_i$$

Za kontinuirane naključne spremenljivke:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx$$

Tretji centralni moment μ_3

Normiranemu tretjemu centralnemu momentu pravimo tudi mera poševnosti P_0 . Vrednost za poševnost je lahko pozitivna ali negativna.



Za diskretno naključno spremenljivko

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^3 \cdot p_i$$

Za kontinuirano naključno spremenljivko

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^3 f(x) dx$$

Normirani centralni moment μ_3 nam da mero poševnosti

$$P_0 = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

Četrty centralni moment μ_4

Normirani četrti centralni moment μ_4 nam poda eksces E_x .

Za diskretno naključno spremenljivko:

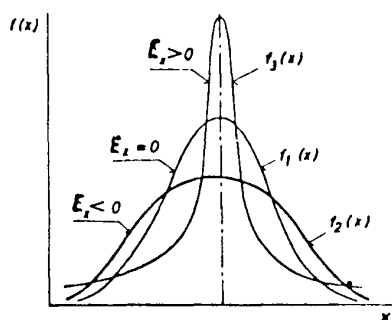
$$\mu_4 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^4 \cdot p_i$$

Za kontinuirano naključno spremenljivko:

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^4 f(x) dx$$

Normirana oblika četrtega centralnega momenta (eksces E_x)

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$$



Gostota porazdelitve

Diskretne ali kontinuirane naključne spremenljivke X so lahko porazdeljene po različnih zakonitostih $f(x)$. Najbolj pogoste v tehniki so:

- enakomerna porazdelitev $f(x)$
- normalna porazdelitev $f(x)$
- Maxwelllova porazdelitev $f(R)$
- porazdelitev diferenčnega modula $f(Q)$
- in še druge porazdelitve...

Njihov pomen v eksperimentalnem delu je v tem, da:

- ugotovimo verjetnosti s katerimi določene naključne spremenljivke nastopajo.
- zgradimo modele za nadaljnjo matematično obdelavo zakonitosti nekega pojava ali procesa.

Enakomerna gostota porazdelitve

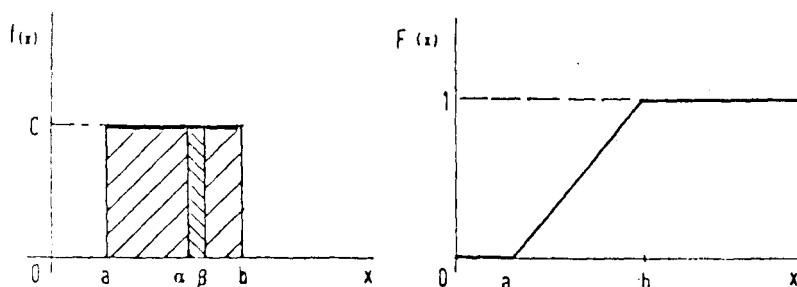
Ta porazdelitev nastopa posebno pri pojavih, kjer nastopajo sistematični vplivi na potek procesa kot npr. obraba, temperaturni vplivi, ...

Gostota porazdelitve je:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x < a \text{ ali } x > b \end{cases}$$

Porazdelitvena funkcija $F(x)$ pa je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



Sedaj lahko zapišemo še statične momente

Srednja vrednost m_x

$$m_x = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx$$

$$m_x = \frac{a+b}{2}$$

Median $M_e = m_x$

Mode $M_0 = 0$

Varianca

$$D_x = \int_a^b (x - m_x)^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 dx$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Poševnost $P_0 = 0$

Eksces

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$$

$$E_x = -1,2$$

Srednja aritmetična sredina

$$\mu_1 = CLA = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx$$

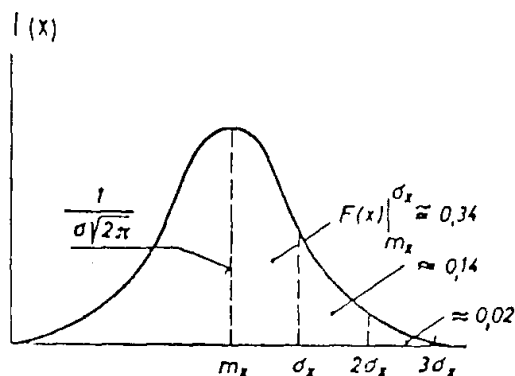
$$CLA = \frac{b-a}{4}$$

Verjetnost, da se nahaja naključna spremenljivka X v mejah med α in β je

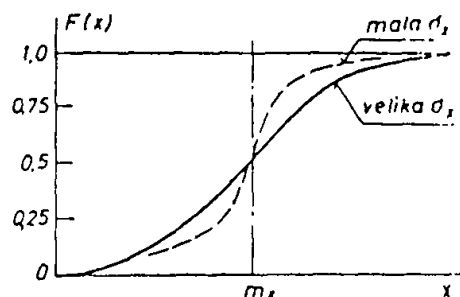
$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Normalna ali Gaussova gostota porazdelitve

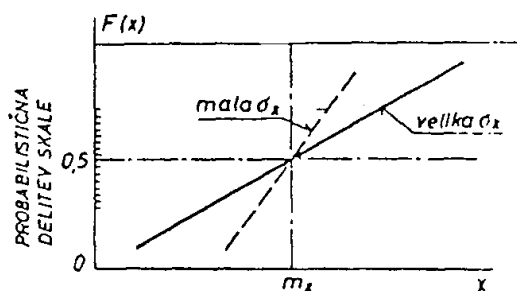
Normalna porazdelitev nastopa v praksi zelo pogosto, npr. odstopanje dolžinskih mer in kotnih dimenzij, trdota, gostota protikorozijskih prevlek, sila pri rezalnih procesih, ...



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$



b)



Gostota porazdelitve $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Drugi centralni moment: $\mu_2 = \sigma_x$

Tretji centralni moment, poševnost $P_0 = 0$

Četrti centralni moment, eksces $E_x = 0$

Verjetnost, da se nahaja naključna spremenljivka X v mejah med a in b je enaka:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx; \quad t = \frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}$$

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a-m_x}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{b-m_x}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt$$

Izraz $e^{-t^2} dt$ ni mogoče izraziti z elementarnimi funkcijami zato je bila razvita Laplacejeva funkcija $\Phi(x)$, ki je tabelarično podana. Tako je matematično definirana Laplacejeva funkcija:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

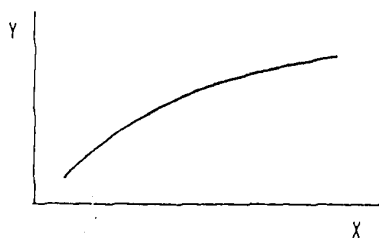
Tako se nam pa integral spremeni:

$$P(a < X < b) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{b-m_x}{\sigma_x \sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x \sqrt{2}}\right) \right]$$

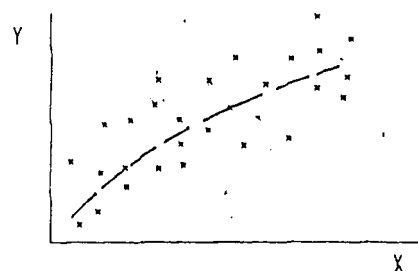
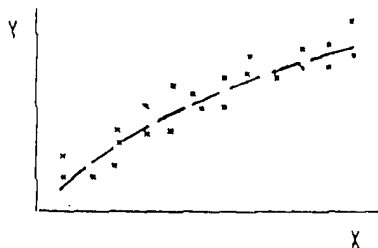
22.) Vrednotenje dveh med seboj povezanih spremenljivk

Spremenljivki X in Y sta med seboj v določeni korelaciji. Lahko imamo štiri primere, ki kvalitativno interpretirajo pojem korelacije med dvema naključnima spremenljivkama:

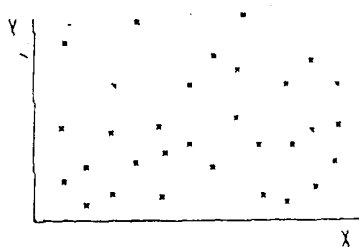
- če obstaja za vsako vrednost $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ samo ena ali edina vrednost $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ potem je korelacija med obema spremenljivkama popolna in zveza je funkcija.



- če se pri ponavljanju meritev pojavita za vsako vrednost X dve ali več vrednosti Y govorimo o tesnejši ali šibkejši korelaciji med X in Y.



- če pa med spremenljivkama X in Y ne obstaja nobena korelacija potem ne obstaja nikakršna zveza med X in Y.



Merila za ocenjevanje korelacije med naključnimi spremenljivkami so t.i. ničelni in centralni momenti.

Ničelni moment α :

$$\alpha_{k,s} = E[X^k Y^s]$$

Centralni moment m :

$$\mu_{k,s} = E[\dot{X}^k \cdot \dot{Y}^s]$$

$$\dot{X} = X - m_x$$

$$\dot{Y} = Y - m_y$$

za diskretne naključne spremenljivke

$$\alpha_{k,s} = \sum_i \sum_j x_i^k \cdot y_j^s \cdot p_{ij}$$

$$\mu_{k,s} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k \cdot (y_j - m_y)^s \cdot f(x, y) dx dy$$

kjer je: p_{ij} verjetnost s katero nastopa pri vrednosti x_i neka vrednost y_j za kontinuirane naključne spremenljivke

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y) dx dy$$

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x,y) dx dy$$

kjer je: $f(x,y)$ dvodimenzionalna gostota porazdelitve naključnih spremenljivk X in Y .

Pri praktičnih vrednotenjih pridejo v poštev samo prvi ničelni moment, drugi centralni moment in korelacijski moment $\mu_{1,1}$

Položajna karakteristika in prvi ničelni moment

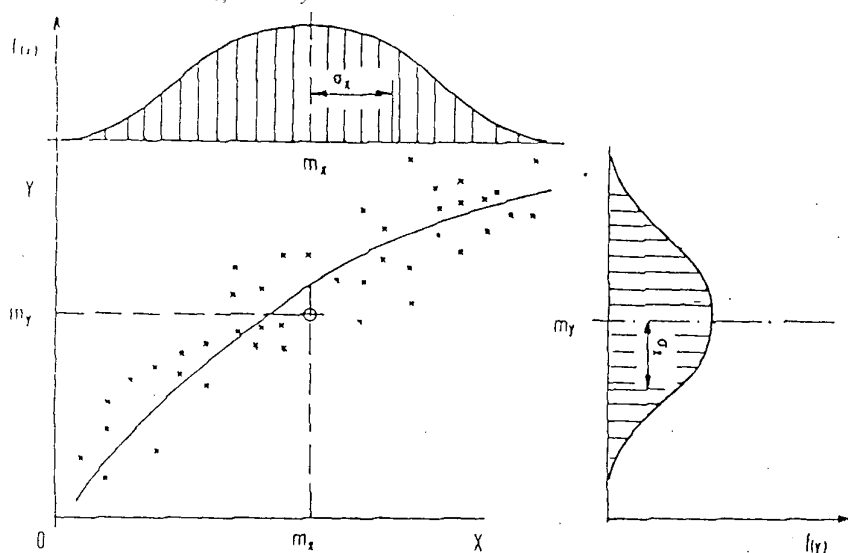
$$\alpha_{1,0} = m_x = E[X^1 Y^0] = E[X]$$

$$\alpha_{0,1} = m_y = E[X^0 Y^1] = E[Y]$$

Varianca kot drugi centralni moment

$$\mu_{2,0} = D_x = E[\dot{X}^2 \dot{Y}^0] = E[\dot{X}^2] = D[X]$$

$$\mu_{0,2} = D_y = E[\dot{X}^0 \dot{Y}^2] = E[\dot{Y}^2] = D[Y]$$



Korelacijski moment $K_{xy} = \mu_{11}$

Definicijo korelacijskega momenta μ_{11} zapišemo:

$$\mu_1 = E[\dot{X}\dot{Y}] = E[(X - m_x)(Y - m_y)] = K_{xy}$$

Za diskretne naključne spremenljivke:

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}$$

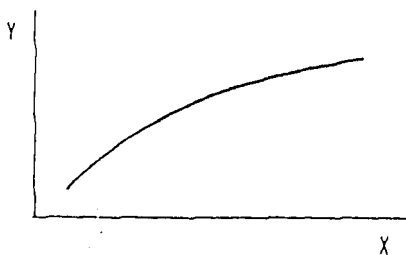
Za kontinuirane naključne spremenljivke:

$$K_{xy} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x,y) dx dy$$

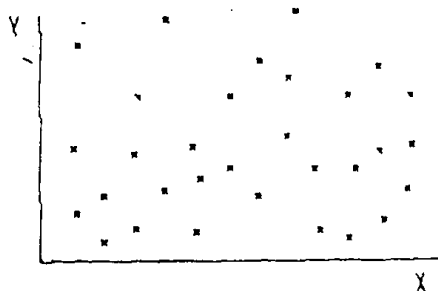
Korelacijski koeficient

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Vrednost r_{xy} variira lahko med $-1 \leq r_{xy} \leq 1$. To pomeni, če je $r_{xy} = \pm 1$ potem obstaja med spremenljivkama X in Y čista funkcijska zveza.



če pa je $r_{xy} = 0$ sta spremenljivki X in Y med seboj neodvisni.



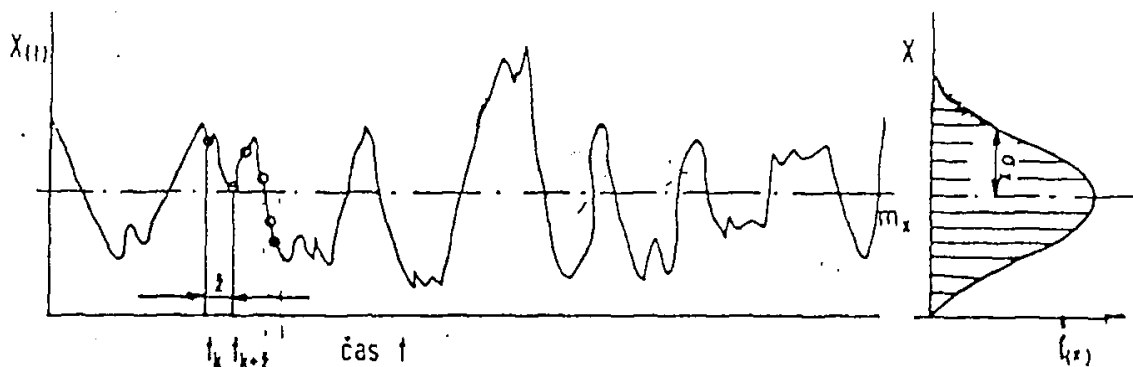
Regresijska premica

V mnogih primerih obstaja linearna statistična odvisnost med spremenljivkama X in Y, kar zapišemo z regresijsko premico.

$$Y = m_y + r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot (x - m_x)$$

23.) Vrednotenje naključnih procesov

Časovni potek spreminjanja naključne spremenljivke $X(t)$ imenujemo naključni ali stohastični proces.



Naključni proces ocenimo v dveh smereh:

- v smeri ordinate $X(t)$: m_x , D_x in σ_x
- v časovni osi t : $0 < t < T$: $K_x(t)$ in $S_x(\omega)$

Lastnosti naključnega procesa v časovni osi t pa karakteriziramo z izračunom korelacijske funkcije $K(\tau)$. Ta se sestoji iz diskretnih vrednosti korelacijskih momentov $K_x(\tau_1)$, $K_x(\tau_2)$, ..., $K_x(\tau_k)$, ki jih izračunamo po naslednjem obrazcu:

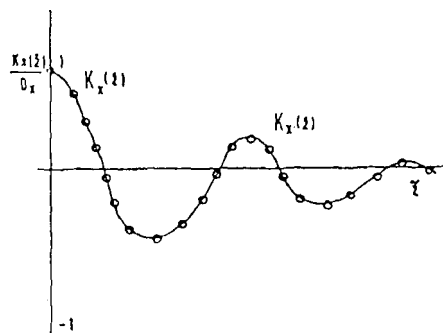
$$K_x(\tau) = E[\dot{X}(t)\dot{X}(t+\tau)]; \quad \dot{X}(t) = X(t) - m_x$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \dot{X}(t)\dot{X}(t+\tau)dt$$

Pri praktičnih izračunih predpostavimo $m_x = 0$. Korelacijsko funkcijo $K_x(\tau)$ normiramo $k_x(\tau)$

$$k_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{D_x}$$

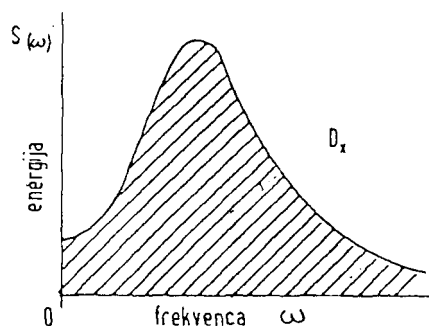
Ta variira med vrednostmi ± 1 . To pomeni, da je verjetnost ordinate korelacijske funkcije $K_x(\tau; \tau=0)$ enaka varianci D_x .



S Fourierjevo transformacijo korelacijske funkcije $k_x(\tau)$ dobimo izraz za energijski spekter $S_x(\omega)$ naključnega procesa $X(t)$

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$$

$$D_x = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$



Interpretacija energijskega spektra $S_x(\omega)$: varianca D_x , ki se v naključnem procesu pojavlja kot ploskev z višino $S_x(\omega)$ in širino $\Delta\omega$ pri frekvenci ω_k niha v povprečju s to frekvenco