FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4

Pisni izpit

7. februar 2013

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos u}\cos(2u)\,\mathrm{d}u\,.$$

a. (10) Pokažite, da je

$$I(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+2}}{2^{2k+2}\cdot k!\cdot (k+2)!}\,.$$

Utemeljite vaše korake. Kot znano upoštevajte, da je za celo število $m \geq 1$

$$\int_0^\pi \cos^{2m} u\cos(2u)\,\mathrm{d}u = \frac{(2m)!\cdot\pi}{2^{2m}\,(m-1)!\cdot(m+1)!}\,.$$

in

$$\int_0^\pi \cos^{2m-1} u\cos(2u)\,\mathrm{d}u = 0\,.$$

Rešitev: Razvijemo

$$e^{x\cos u} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k\cos^k u}{k!}\,.$$

Vrsta

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k\cos^k u\cos(2u)}{k!}$$

konvergira enakomerno na $[0,\pi]$, *ker je majorizirana z vrsto za* $e^{|x|}$. *Integriramo lahko zato po členih.*

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}\cdot\int_0^\pi \cos^k u\cos(2u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Za lihe k *je integral* 0. *Konstantni člen je prav tako enak* 0. *Iz besedila naloge dobimo pri potenci* $2k+2$ *koeficient tako, da vstavimo* $m = k+1$ *v znan integral in dobimo*

$$c_{2k+2} = \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}\cdot(2k+2)!\cdot k!\cdot(k+2)!}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Razvoj eksponentne funkcije: 2 točki.*
- *Enakomerna konvergenca: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Krajšanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Za potenčno vrsto

$$I(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+2}}{2^{2k+2}\cdot k!\cdot (k+2)!}$$

izračunajte radij konvergence in

$$x^2 I''(x) + xI'(x) - (x^2+4)I(x)\,.$$

Rešitev: Radij konvergence je $R=\infty$. Računamo

$$I''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)(2k+1)x^{2k}}{2^{2k+2}\cdot k!\cdot (k+2)!}$$

in

$$I'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)x^{2k+1}}{2^{2k+2}\cdot k!\cdot (k+2)!}\,.$$

V izrazu $x^2I''(x)+xI'(x)-(x^2+4)I(x)$ nastopajo samo sode potence x, konstanega člena pa ni. Pri potenci x^{2k+2} dobimo koeficient

$$\frac{(2k+2)(2k+1)}{2^{2k+2}\cdot k!\cdot(k+2)!}+\frac{(2k+1)}{2^{2k+2}\cdot k!\cdot(k+2)!}-\frac{1}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}-\frac{4}{2^{2k+2}k!(k+2)!}=0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Radij konvergence: 2 točki.*
- *Odvajanje po členih: 2 točki.*
- *Konstantni člen in lihe potence: 2 točki.*
- *Zbiranje členov: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $f(x)$ naj bo na intervalu $[-\pi, \pi]$ definirana z

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{za } 0 < x < \pi \\ -\cos x & \text{za } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{za } x = 0, \pi, -\pi. \end{cases}$$

a. (10) Dokažite, da je za $0 < x < \pi$

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1} .$$

Utemeljite, zakaj Fourierova vrsta za $0 < x < \pi$ konvergira proti $\cos x$.

Namig: Uporabite

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right) .$$

Rešitev: Funkcija je liha, zato je $a_n = 0$ za vse $n \geq 0$. Izračunajmo najprej

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin x \, \mathrm{d}x = 0 ,$$

kot se brž prepričamo s substitucijo $2x = u$. Za $n > 1$ zapišemo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)}{2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-(-1)^{n+1}+1}{n+1} + \frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}\right] . \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Brž se prepričamo, da za lihe n dobimo $b_n = 0$, za sode pa $b_n = (1/\pi)4n/(n^2-1)$. Če sode n zapišemo kot $2k$ in seštevamo po k dobimo točno zgornji rezultat. Fourierova vrsta konvergira v vsaki točki, ker je $f(x)$ odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva in velja povsod $(f(x+) + f(x-))/2 = f(x)$.

Ocenjevanje:

- *Lihost: 2 točki.*
- *b_0: 2 točki.*
- *Razcep produkta: 2 točki.*
- *b_n: 2 točki.*
- *Konvergenca: 2 točki.*

b. (10) Uporabite a. za izračun vsote neskončne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{4(2n+1)^2 - 1} .$$

Rešitev: V zgornjo vrsto vstavimo $x = \pi/4$. Ostanejo samo lihi členi, ker je $\sin(k\pi) = 0$ za vsak k. V Fourierovi vrsti za $f(x)$ na levi dobimo $f(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, na desni pa iskano vrsto pomnoženo z $8/\pi$. Rezultat je $\pi\sqrt{2}/16$.

Ocenjevanje:

- *$x = \pi/4$: 2 točki.*
- *Ostanejo samo lihi členi: 2 točki.*
- *Vsota neskončne vrste: 4 točke.*

3. (20) Na intervalu (a,b) z $0 < a < b < 1$ naj bo dana diferencialna enačba

$$x(1-x)\,y'' + (1-3x)\,y' - y = 0\,.$$

a. (10) Preverite, da sta $y_1(x) = 1/(1-x)$ in $y_2(x) = \log x/(1-x)$ linearno neodvisni rešitvi homogene enačbe.

Rešitev: Z vstavljanjem preverimo, da sta y_1 in y_2 rešitvi enačbe. Linearno neodvisnost preverimo tako, da izračunamo

$$w(x) = \frac{1}{x(1-x)^2} \neq 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Preverjanje 1: 2 točki.*
- *Preverjanje 2: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *w: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Rešite še nehomogeno enačbo

$$x(1-x)\,y'' + (1-3x)\,y' - y = 1-4x\,.$$

Enačbo najprej delite z $x(1-x)$. Kot znano upoštevajte

$$\int \log x\,\mathrm{d}x = x(\log x - 1) \quad \text{in} \quad \int x\log x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{x^2}{4}\,.$$

Rešitev: Vemo, da dobimo partikularno rešitev po formuli

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)\cdot f(x)}{w(x)}\,\mathrm{d}x + y_2(x)\int \frac{y_1(x)\cdot f(x)}{w(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Po deljenju imamo na desni strani izraz $(1-4x)/(x(1-x))$. Vstavimo in dobimo

$$y_p(x) = x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Dana naj bo linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti

$$y'' - 2y' + y = f(x)\,.$$

a. (10) Naj bo $f(x) = e^x$. Poiščite rešitev enačbe pri začetnih pogojih $y(0) = y'(0) = 0$.

Rešitev: Karakteristični polinom $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ *ima dvojno ničlo* $\lambda = 1$. *Rešitvi homogene enačbe sta* e^x *in* xe^x. *Partikularno rešitev iščemo z nastavkom* ax^2e^x. *Nastavek vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo*

$$ae^x(2 + 4x + x^2 - 4x - 2x^2 + x^2) = 1\,.$$

Iz tega razberemo $a = 1/2$. *Splošna rešitev nehomogene enačbe je*

$$y(x) = \frac{x^2e^x}{2} + c_1e^x + c_2xe^x\,.$$

Začetnim pogojem bo zadoščeno, če bo

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 \\ y'(0) &= c_1 + c_2 = 0\,, \end{aligned}$$

torej $c_1 = c_2 = 0$.

Ocenjevanje:

- *Rešitvi homogene enačbe: 3 točke.*
- *Nastavek za nehomogeno enačbo: 3 točke.*
- *Rešitev, ki ustreza robnim pogojem: 4 točke.*

b. (10) Naj bo $f(x) = e^x\cos(x)$. Poiščite rešitev enačbe pri začetnih pogojih $y(0) = y'(0) = 0$.

Rešitev: Enačbo rešujemo v kompleksni obliki. Partikularna rešitev bo realni del rešitve enačbe

$$y'' - 2y' + y = e^x(\cos x + i\sin x) = e^{(1+i)x}\,.$$

Kompleksno število $\mu = 1 + i$ *ni koren karakterističnega polinoma, zato rešitev iščemo z nastavkom* $Ae^{\mu x}$. *Vstavimo v enačbo in dobimo po krajšanju z* $e^{\mu x}$

$$A(1+i)^2 - 2A(1+i) + A = A(1+i-1)^2 = -A = 1\,.$$

Realni del $-e^{(1+i)x}$ *je* $-e^x\cos x$. *Splošna rešitev bo oblike*

$$y(x) = -e^x\cos x + c_1e^x + c_2xe^x\,.$$

Začetnima pogojema bo zadoščeno, če bo

$$\begin{aligned} -1 + c_1 &= 0 \\ -1 + c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Iz tega izračunamo $c_1 = 1$ *in* $c_2 = 0$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek za nehomogeno enačbo: 4 točke.*
- *Izračun potrebne konstante A: 3 točke.*
- *Rešitev, ki ustreza robnim pogojem: 4 točke.*

5. (20) Sistem diferencialnih enačb naj bo dan z

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - by + w \\ \dot{y} &= bx + ay + z\,, \end{aligned}$$

kjer sta w in z dani funkciji.

a. (10) Privzemite, da je $w = z = 0$. S pomočjo Laplaceove transformacije poiščite funkciji x in y pri začetnih pogojih $x(0) = 1$ in $y(0) = 0$.

Namig: Kot znano predpostavite

$$\mathcal{L}(\sin bt)(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} \quad \textit{in} \quad \mathcal{L}(\cos bt)(s) = \frac{s}{s^2 + b^2}\,.$$

Kaj je

$$\mathcal{L}(e^{at} \sin bt)(s) \quad \textit{in} \quad \mathcal{L}(e^{at} \cos bt)(s)\ ?$$

Rešitev: Po pravilih za uporabo Laplaceove transformacije je

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}x(s) - 1 &= a\mathcal{L}x(s) - b\mathcal{L}y(s) \\ s\mathcal{L}y(s) &= b\mathcal{L}x(s) + a\mathcal{L}y(s) \end{aligned}$$

Enačbi prepišemo v

$$\begin{aligned} (s-a)\mathcal{L}x(s) + b\mathcal{L}y(s) &= 1 \\ -b\mathcal{L}x(s) + (s-a)\mathcal{L}y(s) &= 0\,. \end{aligned}$$

Enačbe rešimo in dobimo

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \qquad \textit{in} \qquad \mathcal{L}y(s) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}\,.$$

Iz definicij takoj sledi

$$\mathcal{L}(e^{at} \sin bt)(s) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \quad \textit{in} \quad \mathcal{L}(e^{at} \cos bt)(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}\,.$$

Razberemo, da je

$$x(t) = e^{at} \cos bt \quad \textit{in} \quad y(t) = e^{at} \sin bt\,.$$

Ocenjevanje:

- *Pravila za Laplaceovo transformacijo: 2 točki.*
- *$\mathcal{L}x$ in $\mathcal{L}y$: 2 točki.*
- *Upoštevanje namiga: 2 točki.*
- *Inverz $\mathcal{L}x$: 2 točki.*
- *Inverz $\mathcal{L}y$: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $w(t) = -\cos bt$ in $z(t) = \sin bt$. Poiščite rešitev enačbe pri pogoju $x(0) = y(0) = 0$.

Namig: Kot znano upoštevajte, da je

$$-\frac{-as+b^2+s^2}{(b^2+s^2)\left((s-a)^2+b^2\right)} = \frac{-a(s-a)-2b^2}{(a^2+4b^2)\left((s-a)^2+b^2\right)} + \frac{as-2b^2}{(a^2+4b^2)(b^2+s^2)}$$

in

$$-\frac{ab}{(b^2+s^2)\left((s-a)^2+b^2\right)} = \frac{-ab-2bs}{(a^2+4b^2)(b^2+s^2)} + \frac{2b(s-a)-ab}{(a^2+4b^2)\left((s-a)^2+b^2\right)}$$

Rešitev: Uporabimo Laplaceovo transformacijo in dobimo enačbe

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}x(s) &= a\mathcal{L}x(s) - b\mathcal{L}y(s) - \tfrac{s}{s^2+b^2} \\ s\mathcal{L}y(s) &= b\mathcal{L}x(s) + a\mathcal{L}y(s) + \tfrac{b}{s^2+b^2} \end{aligned}$$

Rešitvi sta

$$\mathcal{L}x(s) = -\frac{b^2+s^2-as}{(b^2+s^2)(a^2-2as+b^2+s^2)}$$

in

$$\mathcal{L}y(s) = -\frac{ab}{(b^2+s^2)\left((s-a)^2+b^2\right)}\,.$$

Razberemo

$$x(t) = \frac{1}{a^2+4b^2}\left(a\cos bt - 2b\sin bt - ae^{at}\cos bt - 2be^{at}\sin bt\right)$$

in

$$y(t) = \frac{1}{a^2+4b^2}\left(-a\sin bt - 2b\cos bt + 2be^{at}\cos bt - ae^{at}\sin bt\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Uporaba pravil ya Laplaceovo transformacijo: 2 točki.*
- *$\mathcal{L}x(s)$ in $\mathcal{L}x(s)$: 2 točki.*
- *Uporaba namiga: 2 točki.*
- *x: 2 točki.*
- *y: 2 točki.*