FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4

Pisni izpit

20. januar 2012

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

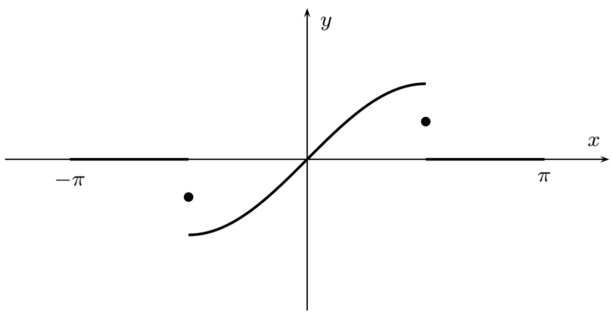
Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ naj bo definirana z

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{za } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{za } x = \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2} & \text{za } x = -\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Graf te funkcije je na spodnji sliki.



a. (10) Pokažite, da je

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n\cos(n\pi/2)}{n^2-1}\ \sin(nx)\,.$$

Utemeljite, zakaj velja zgornji enačaj za vse $x \in [-\pi, \pi]$.

Rešitev: Funkcija $f(x)$ je liha, zato je $a_n = 0$ za $n = 0, 1, \ldots$. Za $n = 1$ dobimo

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos(2x)) \, dx = \frac{1}{2}\,.$$

Za $n > 1$ računamo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} [\cos((n-1)x) - \cos((n+1)x)] \, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((n-1)x)}{n-1} - \frac{\sin((n+1)x)}{n+1}\right]_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

Pri vstavljanju upoštevamo

$$\begin{aligned} \sin((n-1)\pi/2) &= -\cos(n\pi/2) \qquad \text{in} \\ \sin((n+1)\pi/2) &= \cos(n\pi/2) \end{aligned}$$

Ko izpostavimo, dobimo

$$b_n = \frac{1}{\pi}(-\cos(n\pi/2)\cdot(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1})) = -\frac{\cos(n\pi/2)}{\pi}\cdot\frac{2n}{n^2-1}\,.$$

Fourierova vrsta konvergira v vsaki točki proti funkciji $f(x)$, ker je f odsekoma zvezna in odskoma zvezno odvedljiva in velja za vse $x \in [-\pi,\pi]$ $(f(x+)+f(x-))/2 = f(x)$.

Ocenjevanje:

- *Lihost in $a_n = 0$: 2 točki.*
- *b_1: 2 točki.*
- *Razcep produkta: 2 točki.*
- *b_n: 2 točki.*
- *Konvergenca: 2 točki.*

b. (10) Uporabite zgornjo Fourierovo vrsto za izračun vsote neskončne vrste

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2(4k+2)}{(4k+2)^2-1} = \frac{2\cdot 2}{2^2-1} - \frac{2\cdot 6}{6^2-1} + \frac{2\cdot 10}{10^2-1} - \cdots\,.$$

Rešitev: V Fourierovo vrsto zgoraj vstavimo $x=\pi/4$. Na levi dobimo $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$*. Na desni dobimo*

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n\cos(n\pi/2)}{n^2-1}\sin(n\pi/4) \\ = &\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{\pi}(-\frac{2\cdot 2}{2^2-1}+\frac{2\cdot 6}{6^2-1}-\frac{2\cdot 10}{10^2-1}+\cdots) \end{aligned}$$

Torej je vsota vrste enaka $\sqrt{2}\pi/4$.

Ocenjevanje:

- *Sklic na konvergenco za vse x: 2 točki.*
- *$x=\pi/4$: 2 točki.*
- *Ostanejo samo lihi členi: 2 točki.*
- *Urejanje: 2 točki.*
- *Vsota neskončne vrste: 2 točki.*

2. (20) Naj bo
$$f(x,y) = \frac{(1-\cos(xy))e^{-y}}{y} .$$
Definiramo
$$F(x) = \int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y .$$

a. (10) Pokažite, da je
$$F'(x) = \frac{x}{1+x^2} .$$
Utemeljite vaše korake.

Rešitev: Ker je
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(xy)e^{-y} ,$$
integral
$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y$$
enakomerno konvergira za vse x, zato je funkcija $F(x)$ odvedljiva in velja
$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty e^{-y}\sin(xy)\,\mathrm{d}y .$$
Računamo
$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty e^{-y}\sin(xy)\,\mathrm{d}y \\ &= -e^{-y}\sin(xy)\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-y}\cos(xy)\,\mathrm{d}y \\ &= x\left(-e^{-y}\cos(xy)\Big|_0^\infty - x\int_0^\infty e^{-y}\sin(xy)\,\mathrm{d}y\right) \\ &= x - x^2 I . \end{aligned}$$
Sledi
$$I = \frac{x}{1+x^2} .$$
Sledi
$$F'(x) = \frac{x}{1+x^2} .$$

Ocenjevanje:

- *Parcialni odvod: 2 točki.*
- *Omejenost: 2 točki.*
- *Enakomerna konvergenca: 2 točki.*
- *Integriranje per partes: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte $F(x)$. Utemeljite vaše korake.

Rešitev: Funkcija

$$\frac{1-\cos(xy)}{y}$$

je omejena in ima limito 0*, ko* $y \downarrow 0$*. To pomeni, da integral enakomerno konvergira za vse* x*, zato je zvezna funkcija za vse* x*. Za* $x = 0$ *dobimo* $F(0) = 0$*. Sledi*

$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\log(1+u^2)|_0^x = \frac{1}{2}\log(1+x^2)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Zveznost v* $x = 0$*: 2 točki.*
- *Newton-Leibniz: 2 točki.*
- *Vrednost v* $x = 0$*: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Funkciji $y(t)$ in $z(t)$ za $t \geq 0$ zadoščata enačbama

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2y(t) - z(t) + 1 \\ z'(t) &= 4y(t) - 2z(t) + t \end{aligned}$$

Predpostavite, da je $y(0) = 0$ in $z(0) = 1$.

a. (10) Pokažite, da velja

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}y(s) &= 2\mathcal{L}y(s) - \mathcal{L}z(s) + \tfrac{1}{s} \\ s\mathcal{L}z(s) &= 4\mathcal{L}y(s) - 2\mathcal{L}z(s) + \tfrac{1}{s^2} + 1 \end{aligned}$$

Rešitev: Uporabimo Laplaceovo transformacijo in upoštevamo pravila.

Ocenjevanje:

- *Transformacija prve enačbe: 2 točki.*
- *Transformacija druge enačbe: 2 točki.*
- *Upoštevanje pravila za odvode: 2 točki.*
- *Transformaciji* 1*in* t*: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Določite funkciji $y(t)$ in $z(t)$.

Rešitev: V prvem delu naloge smo dobili sistem enačb za Laplaceovi transformaciji. Rešimo sistem linearnih enačb in dobimo

$$\mathcal{L}y(s) = -\frac{1}{s^4} + \frac{2}{s^3}$$

in

$$\mathcal{L}z(s) = -\frac{2}{s^4} + \frac{5}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\,.$$

Vemo, da je inverz s^{-n} *enak*

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,.$$

Preberemo

$$y(t) = -\frac{t^3}{6} + t^2$$

in

$$z(t) = -\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} - 2t + 1\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da gre za sistem linearnih enačb: 2 točki.*
- *Rešitev sistema: 2 točki.*
- *Razvrstitev po potencah: 2 točki.*
- *Inverzne Laplaceove transformacije: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Naj bo funkcija $f(t)$ dana kot

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2-|t|}{4} & \text{za } -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

a. (10) Pokažite, da je

$$\mathcal{F}f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{\sin s}{s}\right)^2 .$$

Rešitev: Funkcija je soda. Računamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-its}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{2} (2-|t|)\cos(ts)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{2} (2-t)\cos(ts)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(2-t)\sin(ts)}{s}\Bigg|_0^2 + \frac{1}{s}\int_0^2 \sin(ts)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{\cos(st)}{s^2} \right)\Bigg|_0^2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1-\cos(2s)}{s^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1-\cos^2 s + \sin^2 s}{s^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\sin^2 s}{s^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin^2 s}{s^2} .
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Definicija Fourierove transformacije: 2 točki.*
- *Sodost: 2 točki.*
- *Meje integriranja: 2 točki.*
- *Per partes: 2 točki.*
- *Adicijski izrek in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Z uporabo inverzne transformacije izračunajte

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} \left(\frac{\sin s}{s}\right)^2 \mathrm{d}s\, .$$

Utemeljite še, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin s}{s}\right)^2 \mathrm{d}s = \pi \,.$$

Rešitev: Funkcija $\mathcal{F}f(s)$ je zvezna in zvezno odvedljiva, zato je po inverzni formuli

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its}\, \mathcal{F}f(s)\, \mathrm{d}s = f(t)$$

za vsak t. Vstavimo in sledi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} \left(\frac{\sin s}{s}\right)^2 \mathrm{d}s = f(t)\,.$$

Če vstavimo $t = 0$, je $e^{its} = 1$, torej je

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin s}{s}\right)^2 \mathrm{d}s = f(0) = \frac{1}{2}\,.$$

Sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin s}{s}\right)^2 \mathrm{d}s = \pi \,.$$

Ocenjevanje:

- *Inverzna formula: 2 točki.*
- *Upoštvanje integrabilnosti: 2 točki.*
- *Konvergenca inverzne formule po točkah: 2 točki.*
- *$t = 0$: 2 točki.*
- *Rezultat integrala: 2 točki.*

5. (20) Naj bo $f(x)$ periodična funkcija s periodo 2π, ki je na intervalu $[-\pi, \pi]$ dana z

$$f(x) = \cos(\mu x)\,.$$

a. (10) Dokažite, da je Fourierova vrsta za $f(x)$ enaka

$$\frac{\sin(\mu\pi)}{\mu\pi} + \frac{2\mu\sin(\mu\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\cos(nx)}{\mu^2-n^2}\,.$$

Utemeljite, zakaj ta Fourierova vrsta konvergira proti $f(x)$ za vsak x.

Rešitev: Najprej ugotovimo, da je $f(x)$ soda funkcija, torej je $b_n = 0$ za vse $n \geq 1$. Računamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\mu x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\sin(\mu\pi)}{\mu\pi}$$

in

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\mu x\cos nx\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(\mu+n)x + \cos(\mu-n)x\right]\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(\mu+n)x}{\mu+n} + \frac{\sin(\mu-n)x}{\mu-n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{2\sin\mu\pi\cos n\pi}{\mu+n} + \frac{2\sin\mu\pi\cdot\cos n\pi}{\mu-n}\Big) \\
&= \frac{(-1)^n\sin\mu\pi}{\pi}\Big(\frac{1}{\mu+n} + \frac{1}{\mu-n}\Big) \\
&= \frac{2(-1)^n\sin\mu\pi}{\pi}\frac{\mu}{\mu^2-n^2}\,.
\end{aligned}$$

Funkcija $f(x)$ je zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, Fourierova vrsta torej konvergira proti $f(x)$ za vse x.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je funkcija soda in $b_n = 0$: 2 točki.*
- *Predstavitev $\cos\mu x\cos nx$ s kosinusi: 2 točki.*
- *Izračun b_n: 4 točke.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Če v Fourierovo vrsto v a. vstavimo $x = \pi$, predpostavimo $\mu \in (0, 1)$ in delimo s $\sin\mu\pi$, dobimo

$$\operatorname{ctg}(\mu\pi) = \frac{1}{\mu\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu}{\mu^2-n^2}\,.$$

Pokažite, da za $\mu \in (1/2-\alpha, 1/2+\alpha)$, $\alpha < 1/2$ vrsta na desni enakomerno konvergira v μ. Z integriranjem po členih pokažite, da je za $x \in (1/2-\alpha, 1/2+\alpha)$

$$\log(\sin \pi x) = \log(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log(1 - \frac{x^2}{n^2}) - \log(1 - \frac{1}{4n^2}) \right] .$$

Rešitev: Dovolj je pokazati, da je na danem intervalu funkcijska vrsta majorizirana s konvergentno vrsto. Ker je $|\mu| < 1$ dobimo za $n > 1$

$$\left| \frac{\mu}{\mu^2 - n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 - 1} .$$

Vrsta na desni konvergira. Zato lahko integriramo členoma. Dobimo

$$\begin{aligned}
\int_{1/2}^{x} \operatorname{ctg}(\mu\pi)\,\mathrm{d}\mu &= \frac{1}{\pi}\log(\sin \pi x) \\
&= \frac{1}{\pi}\log(2x) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/2}^{x} \frac{2\mu}{\mu^2 - n^2}\,\mathrm{d}\mu \\
&= \frac{1}{\pi}\log(2x) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log(1 - \frac{x^2}{n^2}) - \log(1 - \frac{1}{4n^2}) \right] .
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Enakomerna konvergenca: 4 točke.*
- *Integriranje leve strani: 2 točki.*
- *Integriranje desne strani: 2 točki.*
- *Ureditev: 2 točki.*