FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4

Pisni izpit

25. januar 2013

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo $b > 1$ dana konstanta. Funkcija $F(x)$ naj bo za $|x| < 1$ dana z

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1-tx}\,\mathrm{d}t\,.$$

a. (10) Pokažite, da za $|x| < 1$ velja

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{b+k}\,.$$

Utemeljite vaše korake.

Rešitev: Zapišimo

$$\frac{t^{b-1}}{1-tx} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{k+b-1}x^k\,.$$

Ta vrsta za $|x| < 1$ enakomerno konvergira kot funkcija t za vse $t \in [0,1]$, ker je majorizirana z vrsto $\sum_{k=0}^{\infty} |x|^k$. Z integracijo po členih dobimo

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \int_0^1 t^{k+b-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{b+k}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Razvoj integranda v vrsto: 2 točki.*
- *Utemeljitev enakomerne konvergence: 4 točki.*
- *Zamenjava seštvanja in integriranja: 2 točki.*
- *Končna vrsta: 2 točki.*

b. (10) Dokažite, da za $|x| < 1$ velja

$$x(1-x)F''(x) + (b+1-(b+2)x)F'(x) - bF(x) = 0\,.$$

Rešitev: S kvocientnim kriterijem se prepričamo, da je radij konvergence vrste za $F(x)$ enak

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{b+k}{b+k+1} = 1\,.$$

Znotraj radija konvergence lahko vrsto poljubno mnogokrat odvajamo po členih. Dobimo

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{b+k} \\ F''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{b+k} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo

$$x(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)x^{k-2}}{b+k}+(b+1-(b+2)x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{kx^{k-1}}{b+k}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{bx^k}{b+k}\,.$$

Zberimo koeficiente za posamezne potence. Dobimo

$$\frac{b+1}{b+1}-\frac{b}{b}+x(\frac{2}{b+2}+\frac{2(b+1)}{b+2}-\frac{b+2}{b+1}-\frac{b}{b+1})\;+$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}x^k\left(\frac{(k+1)k}{b+k+1}-\frac{k(k-1)}{b+k}+\frac{(b+1)(k+1)}{b+k+1}-\frac{(b+2)k}{b+k}-\frac{b}{b+k}\right)\,.$$

Neskončno vrsto poenostavimo in dobimo

$$\sum_{k=2}^{\infty}x^k\left(\frac{(k+1)k+(k+1)(b+1)}{b+k+1}-\frac{k(k-1)-k(b+2)-b}{b+k}\right)=$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}x^k\left(\frac{(k+1)(b+k+1)}{b+k+1}-\frac{(k+1)(b+k)}{b+k}\right)=0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Radij konvergence: 2 točki.*
- *Odvajanje po členih: 2 točki.*
- *Zbiranje koeficientov: 2+2 točki.*
- *Končni izračun: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $f(x)$ naj bo periodična s periodo 2π in na intervalu $[-\pi, \pi]$ dana z

$$f(x) = \pi - |x|\,.$$

a. (10) Razvijte funkcijo v Fourierovo vrsto in utemeljite, da je funkcija v vsaki točki enaka vsoti svoje Fourierove vrste.

Rešitev: Funkcija je soda, zato je $b_n = 0$ za $n = 1, 2, \ldots$. Računamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)\,\mathrm{d}x = 2\pi - \pi = \pi$$

in

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{n^2\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right) \\ &= \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\,. \end{aligned}$$

Ker je funkcija zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, je

$$\pi - |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\cos(nx)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Sodoset: 2 točki.*
- *a_0: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *a_n: 2 točki.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Z uporabo Fourierove vrste izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Rešitev: V Fourierovi vrsti opazimo, da za sode n velja $b_n = 0$. Za lihe n je $\cos(n\pi) = -1$. Vstavimo v vrsto π in dobimo

$$f(\pi) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}\,.$$

Sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Ocenjevanje:

- $b_n = 0$ *za sode* n*: 2 točki.*
- $x = \pi$*: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Redukcija na vsoto: 2 točki.*
- *Vsota: 2 točki.*

3. (20) Dana naj bo linearna diferencialna enačba drugega reda

$$y'' + \frac{1}{4x^2}\, y = g(x)$$

na intervalu $[1, \infty)$.

a. (10) Pokažite, da sta funkciji $y_1(x) = \sqrt{x}$ in $y_2(x) = \sqrt{x}\log x$ linearno neodvisni rešitvi homogene enačbe.

Rešitev: Računamo

$$y_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \textit{in} \qquad y_1''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}\,,$$

ter

$$y_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\log x}{2\sqrt{x}} \qquad \textit{in} \qquad y_2''(x) = -\frac{\log x}{4x^{3/2}}\,.$$

To, da sta obe funkciji rešitvi homogene enačbe, preverimo z vstavljanjem. Zlahka tudi izračunamo

$$W(x) = 1\,,$$

tako da sta rešitvi linearno neodvisni na $[1, \infty)$.

Ocenjevanje:

- *Prvi odvodi: 2 točki.*
- *Drugi odvodi: 2 točki.*
- *Vstavljanje prve rešitve: 2 točki.*
- *Vstavljanje druge rešitve: 2 točki.*
- *Linearna neodvisnost: 2 točki.*

b. (10) Rešite enačbo, če je $g(x) = 1/x^{3/2}$ in funkcija y zadošča začetnima pogojema $y(1) = y'(1) = 0$.

Rešitev: Po formuli je partikularna rešitev

$$y_p(x) = -y_1(x)\int^x \frac{y_2(u)g(u)}{W(u)}\,\mathrm{d}u + y_2(x)\int^x \frac{y_1(u)g(u)}{W(u)}\,\mathrm{d}u\,.$$

V konkretnem primeru dobimo

$$y_p(x) = -\sqrt{x}\int^x \frac{\log u}{u}\,\mathrm{d}u + \sqrt{x}\log x\int^x \frac{1}{x}\,\mathrm{d}u\,.$$

Integracija nam da

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x}\log^2 x + \sqrt{x}\log^2 x = \frac{1}{2}\sqrt{x}\log^2 x\,.$$

Splošna rešitev enačbe je

$$y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}\log^2 x + c_1\sqrt{x} + c_2\sqrt{x}\log x\,.$$

Iz začetnih pogojev sledi

$$0 = y(1) = c_1 \qquad \text{in} \qquad 0 = y'(1) = \frac{c_1}{2} + c_2 \,.$$

Sledi $c_1 = 0$ *in* $c_2 = 0$. *Končna rešitev je*

$$y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}\log^2 x \,.$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Splošna rešitev: 3 točke.*
- *Enačbi za konstante: 3 točke.*
- *Končna rešitev: 3 točke.*

4. (20) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y'' + 2y' + 5y = 4\,e^{-x}\sin(2x)\,.$$

a. (10) Poiščite partikularno rešitev diferencialne enačbe.

Rešitev: Karakteristični polinom $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ *ima dve kompleksno konjugirani rešitvi* $-1+2i$ *in* $-1-2i$*. V enačbi desno stran nadomestimo z*

$$4\,e^{(-1+2i)x}\,.$$

Ker je koeficient pred x *v eksponentu ničla* $P(\lambda)$ *(enojna), iščemo rešitev z nastavkom*

$$y_p(x) = Axe^{(-1+2i)x}\,.$$

Odvajamo in dobimo

$$y_p'(x) = A(1 + x(-1+2i))e^{(-1+2i)x}$$

in

$$y_p''(x) = A(2(-1+2i) + x(-1+2i)^2)e^{(-1+2i)x}\,.$$

Vstavimo v enačbo in preuredimo.

$$A\left[x((-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 5) + 2(-1+2i) + 2\right]e^{(-1+2i)x} = 4\,e^{(-1+2i)x}\,.$$

Zmnožimo in sledi

$$4i\cdot A = 4\,,$$

torej

$$A = -i\,.$$

Partikularna rešitev bo imaginarni del produkta

$$(-i)\cdot x\cdot e^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x)\,,$$

torej

$$y_p(x) = -xe^{-x}\cos 2x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ničle karakterističnega polinoma: 2 točki.*
- *Nastavek: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Konstanta A: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe, ki ustreza začetnima pogojema $y(0) = y'(0) = 0$.

Rešitev: Vemo, da je splošna rešitev oblike

$$y(x) = -xe^{-x}\cos 2x + c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\sin 2x\,.$$

Določiti moramo konstante tako, da bo zadoščeno začetnima pogojema, torej

$$y(0) = c_1 = 0$$

in

$$y'(0) = -1 - c_1 + 2c_2 = 0\,.$$

Sledi $c_1 = 0$ *in* $c_2 = 1/2$. *Rešitev je torej*

$$y(x) = -xe^{-x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Enačbi za koeficiente: 2 točki.*
- *Koeficienta: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

5. (20) Dan naj bo sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2x + y \\ \ddot{y} &= x - 2y + \sin t \end{aligned}$$

z začetnimi pogoji $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ in $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. Kot znano upoštevajte, da je

$$\mathcal{L}(\sin at)(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}\,.$$

a. (10) Izračunajte $\mathcal{L}x(s)$ in $\mathcal{L}y(s)$.

Rešitev: Z upoštevanjem začetnih pogojev dobimo

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}x(s) &= -2\mathcal{L}x(s) + \mathcal{L}y(s) \\ s^2\mathcal{L}y(s) &= \mathcal{L}x(s) - 2\mathcal{L}y(s) + \tfrac{1}{s^2+1}\,. \end{aligned}$$

Enačbi seštejemo in sledi

$$(s^2 + 1)(\mathcal{L}x(s) + \mathcal{L}y(s)) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

ali

$$\mathcal{L}x(s) + \mathcal{L}y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

Iz tega sledi

$$(s^2 + 2)\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} - \mathcal{L}x(s)$$

oziroma

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2(s^2 + 3)}\,.$$

Sledi še

$$\mathcal{L}y(s) = -\frac{1}{(s^2 + 1)^2(s^2 + 3)} + \frac{1}{(s^2 + 1)^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja: 2 točki.*
- *Upoštevanje pravil za odvode: 2 točki.*
- *Prekladanje: 2 točki.*
- *$\mathcal{L}x(s)$: 2 točki.*
- *$\mathcal{L}y(s)$: 2 točki.*

b. (10) Kot znano upoštevajte, da je za $f(t) = \sin t$

$$(f * f)(s) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

in

$$\frac{1}{(s^2 + 1)^2(s^2 + 3)} = \frac{1}{4\,(s^2 + 3)} - \frac{1}{4\,(s^2 + 1)} + \frac{1}{2\,(s^2 + 1)^2}\,.$$

Izračunajte $x(t)$ in $y(t)$.

Namig: Kaj je $\mathcal{L}(f * f)(s)$?

Rešitev: Opazimo, da je

$$\mathcal{L}(f * f)(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}\,,$$

torej znamo poiskati funkcijo, ki ima desno stran zgornje enačbe za Laplaceovo transformacijo. Razberemo

$$x(t) = \frac{1}{4\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t) - \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4}(\sin t - t\cos t)\,.$$

Poenostavimo in sledi

$$x(t) = \frac{1}{4\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t) - \frac{t}{4}\cos t\,.$$

Razberemo še

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{1}{2(s^2+1)^2} - \frac{1}{4\,(s^2+3)} + \frac{1}{4\,(s^2+1)}\,,$$

torej

$$y(s) = \frac{1}{4}(\sin t - t\cos t) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{4}\sin t\,.$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo za konvolucijo: 2 točki.*
- *Obrat $1/(s^2+1)^2$: 2 točki.*
- *Obrati posameznih členov v parcialnih ulomkih: 2 točki.*
- *$x(t)$: 2 točki.*
- *$y(t)$: 2 točki.*