FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4

Pisni izpit

8. junij 2012

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f(x)$ naj bo periodična s periodo 2π in na $[-\pi, \pi]$ dana z

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\mu x} + e^{-\mu x}\right) ,$$

kjer je $\mu \in (0, 1)$.

a. (10) Razvijte $f(x)$ v Fourierovo vrsto in utemeljite, da ta vrsta konvergira proti funkciji $f(x)$ za vse $x \in [-\pi, \pi]$. Kot znano privzemite

$$\int e^{ax} \cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}(a\cos(bx) + b\sin(bx))}{a^2 + b^2} .$$

Rešitev: Najprej opazimo, da je funkcija soda, torej je $b_n = 0$ za vse $n \geq 1$. Računamo

$$\begin{aligned} a_0 &= \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(e^{\mu x} + e^{-\mu x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi\mu}\left(e^{\mu x} - e^{-\mu x}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi\mu}\left(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}\right) . \end{aligned}$$

Za $n \geq 1$ uporabimo znan integral iz besedila naloge. Računamo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{\mu x} + e^{-\mu x}\right) \cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^{\mu x}(\mu\cos nx + n\sin nx) + e^{-\mu x}(-\mu\cos nx + n\sin nx)}{2\pi(\mu^2 + n^2)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2\mu e^{\mu\pi}\cos n\pi - 2\mu e^{-\mu\pi}\cos n\pi}{2\pi(\mu^2 + n^2)} \\ &= \frac{\mu(-1)^n(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi})}{\pi(\mu^2 + n^2)} . \end{aligned}$$

Sledi

$$a_n = \frac{\mu(-1)^n(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi})}{\pi(\mu^2 + n^2)} .$$

Fourierova vrsta konvergira za vse $x \in [-\pi, \pi]$, ker je funkcija zvezna in zvezno odvedljiva in velja $f(x) = (f(x+) + f(x-))/2$.

Ocenjevanje:

- *Sodost: 2 točki.*
- *a_0: 2 točki.*
- *Integracija: 2 točki.*

- *a_n: 2 točki.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2+1} .$$

Namig: $\mu = 1/\sqrt{2}$.

Rešitev: Velja

$$f(x) = \frac{e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}}{2\pi\mu} + \frac{\mu(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi})}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{\mu^2 + n^2} .$$

Izberimo $x = 0$ in $\mu = 1/\sqrt{2}$. Zaradi konvergence vrste je

$$1 = \frac{e^{\pi/\sqrt{2}} - e^{-\pi/\sqrt{2}}}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2+1} \right) .$$

Iz te enakosti izračunamo želeno vrsto.

Ocenjevanje:

- *Izbira $x = 0$: 2 točki.*
- *Izbira $\mu = 1/\sqrt{2}$: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Preoblikovanje izraza: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $F(x)$ naj bo za $x > 0$ dana kot integral s parametrom

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-y})e^{-xy}}{y} \, \mathrm{d}y \, .$$

a. (10) Utemeljite, da za $x > 0$ velja

$$F'(x) = -\int_0^\infty (1 - e^{-y})e^{-xy} \, \mathrm{d}y \, .$$

Rešitev: Formula sledi z odvajanjem po x pod integralskim znakom. Utemeljiti moramo le enakomerno konvergenco za vse $x \geq a > 0$ za vsak $a > 0$. Parcialni odvod izraza pod oklepajem je dominiran z e^{-ax}. Ker ta funkcija konvergira, lahko za $x \geq a$ odvajamo pod integralskim znakom.

Ocenjevanje:

- *Parcialni odvod: 2 točki.*
- *Citiranje enakomerne konvergence: 2 točki.*
- *Dominiranost: 2 točki.*
- *Integral dominiranosti: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte $F(x)$.

Rešitev: Ker je

$$F'(x) = -\int_0^\infty (1 - e^{-y})e^{-xy} \, \mathrm{d}y \, ,$$

z integriranjem dobimo za $x > 0$

$$F'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \, .$$

Sledi

$$F(x) = -\log x + \log(x+1) + c$$

za neko konstanto c. Določiti moramo še konstanto c. Funkcija

$$\frac{1 - e^{-y}}{y}$$

je za $y \geq 0$ omejena z neko konstanto M, zato je

$$F(x) \leq M \int_0^\infty e^{-xy} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{x} \, .$$

Očitno je potem, da

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 0 \, .$$

Opazimo, da je

$$\lim_{x \to \infty} (-\log x + \log(1+x) + c) = \lim_{x \to \infty} \log\left(\frac{1+x}{x}\right) + c = c \, .$$

Sledi $c = 0$.

Ocenjevanje:

- *Integriranje prvič: 2 točki.*
- *Integriranje drugič: 2 točki.*
- *Ideja, da je treba določiti konstanto: 2 točki.*
- *Ideja z limito: 2 točki.*
- *Izpeljava ideje z limito:*

3. (20) Kot znano privzemite

$$\mathcal{L}(\sin at)(s) = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad \text{in} \qquad \mathcal{L}(\cos at)(s) = \frac{s}{s^2+a^2}\,.$$

a. (10) Izračunajte $\sin t * \cos 2t$ z uporabo Laplaceove trasformacije.

Rešitev: Vemo, da je

$$\mathcal{L}(\sin t * \cos 2t)(s) = \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+4}\,.$$

Produkt razcepimo na parcialne ulomke in dobimo

$$\mathcal{L}(\sin t * \cos 2t)(s) = \frac{s}{3\,(s^2+1)} - \frac{s}{3\,(s^2+4)}\,.$$

Razberemo

$$\sin t * \cos 2t = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t\,.$$

Ocenjevanje:

- *Uporaba prve transformacije: 2 točki.*
- *Uporaba druge transformacije: 2 točki.*
- *Parcialni ulomki: 2 točki.*
- *Prva inverzija: 2 točki.*
- *Druga inverzija: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte

$$\sin t * \sin 2t * \sin 3t * \cdots * \sin nt\,.$$

Upoštevajte, da je

$$\frac{1}{(s^2+1^2)}\cdot\frac{1}{(s^2+2^2)}\cdots\cdot\frac{1}{(s^2+n^2)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{n-i+1}2i^2}{(n+i)!(n-i)!(s^2+i^2)}\,.$$

Rešitev: Označimo iskano konvolucijo z $f(t)$. Dobimo

$$\mathcal{L}f(s) = \prod_{i=1}^{n}\frac{i}{s^2+i^2}\,.$$

Produkt na desni moramo razcepiti na parcialne ulomke, torej

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{s^2+i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s^2+i^2}\,.$$

Uporabimo razcep in dobimo

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{n-i+1}2i^2}{(n+i)!(n-i)!}\,\sin(it)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Uporaba transformacije: 2 točki.*
- *Parcialni ulomki: 2 točki.*
- *Parcialni ulomki nadaljevanje: 2 točki.*
- *Inverzija: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Naj bo funkcija $f(t)$ dana z

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

a. (10) Izračunajte Fourierovo transformacijo $\mathcal{F}f$ funkcije $f(t)$.

Rešitev: Po formuli je

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-its}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{e^{-its}}{is} \right) \Bigg|_{-1}^{1} \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-is} - e^{is}}{s} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\sin s}{s} \,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Integriranje in De Moivre: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) S pomočjo inverzne formule pokažite, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos s \cdot \sin s}{s}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}\,.$$

Namig: Upoštevajte sodost $\mathcal{F}f(s)$ in vstavite $t = 1$.

Rešitev: Funkcija $f(t)$ je odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, zato je po inverzni formuli

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{its}\,\mathcal{F}f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Vstavimo $t = 1$. Fourierova transformacija je soda funkcija s, zato lahko e^{its} nadomestimo s $\cos(ts)$. Ker je

$$\frac{f(1+) + f(1-)}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

sledi

$$\frac{1}{2} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos s \cdot \frac{2\sin s}{s} \, \mathrm{d}s \,.$$

Sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos s \cdot \sin s}{s} \, \mathrm{d}s = \frac{\pi}{2} \,.$$

Ocenjevanje:

- *Inverzna formula: 2 točki.*
- *Utemeljitev inverzne formule: 2 točki.*
- $t = 1$*: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Naj bo funkcija $f(x)$ definirana s potenčno vrsto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n!)^2}.$$

a. (10) Poiščite radij konvergence zgornje potenčne vrste.

Rešitev: Računamo

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0.$$

Potenčna vrsta konvergira za vse $x \in \mathbb{R}$.

Ocenjevanje:

- *Kriterij: 2 točki.*
- *a_n: 2 točki.*
- *Kvocient: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da je

$$xf''(x) - f(x) = 0$$

za vse $x \in \mathbb{R}$.

Rešitev: Ker potenčna vrsta povsod konvergira, jo lahko členoma odvajamo. Za $x = 0$ sta leva in desna stran enaki 0. Koeficient na levi pri potenci x^n za $n \geq 1$ je

$$(n+1)n \cdot \frac{n+1}{((n+1)!)^2} - \frac{n}{(n!)^2} = 0.$$

Trditev torej drži.

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev, da lahko členoma odvajamo: 2 točki.*
- *Utemeljitev, da ni konstantnega člena: 2 točki.*
- *Ideja s primerjanjem koeficientov: 2 točki.*
- *Pravi koeficient: 2 točki.*
- *Račun in sklep: 2 točki.*