FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4

Pisni izpit

22. junij 2012

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f(u)$ naj bo periodična, na intervalu $[-\pi, \pi]$ pa naj bo $f(u) = |u|$.

a. (10) Razvijte funkcijo v Fourierovo vrsto in utemeljite, da ta vrsta povsod konvergira proti $f(u)$.

Rešitev: Funkcija je soda, zato bo $b_n = 0$ za vse $n \geq 1$. Računamo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u|\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u\,\mathrm{d}u \\ &= \pi \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u|\cos nu\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u\,\cos nu\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{u\sin nu}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nu\,\mathrm{d}u\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos nu}{n^2}\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{((-1)^n - 1)}{n^2}\,. \end{aligned}$$

Opazimo, da so a_n različni od 0 samo za lihe n. Funkcija $f(u)$ je odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva in povsod velja $f(u+) = f(u-) = f(u)$, zato Fourierova vrsta konvergira proti funkciji $f(u)$. Zapišemo lahko

$$|u| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)u}{(2k+1)^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Sodost: 2 točki.*
- *a_0: 2 točki.*
- *Integracija per partes: 2 točki.*
- *a_n: 2 točki.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Utemeljite, da vrsta enakomerno konvergira in jo lahko členoma integriramo. Integrirajte na intervalu $[0, x]$ za $x > 0$ in uporabite rezultat za izračun vrste

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^3} - \cdots\,.$$

Rešitev: Členi v vsoti so majorizirani s konvergentno vrsto, zato vrsta enakomerno konvergira. Z integracijo po $[0, x]$ *dobimo*

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi x}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}\,.$$

Vstavimo $x = \pi/2$. *Za sode* k *dobimo* $\sin(2k+1)x = 1$ *za lihe pa* $\sin(2k+1)x = -1$. *Sledi*

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\,.$$

Vsota vrste je $\pi^3/32$.

Ocenjevanje:

- *Majoriziranje: 2 točki.*
- *Enakomerna konvergenca in utemeljitev integracije po členih: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- $x = \pi/2$: *2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Naj bo funkcija $F(x)$ dana kot integral s parametrom

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xy \, \mathrm{d}y}{(1+y^2)^2}\,.$$

Kot znano privzemite, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xy \, dy}{1+y^2} = \pi \, e^{-|x|}\,.$$

a. (10) Pokažite, da je

$$F'(x) = -\frac{\pi x}{2}\, e^{-|x|}\,.$$

Utemeljite vse vaše korake.

Rešitev: Če izraz pod integralom parcialno odvajamo po x, dobimo

$$\frac{-y \sin xy}{(1+y^2)^2}\,.$$

Ta izraz je majoriziran z $1/(1+y^2)$, zato enakomerno konvergira, kar pomeni, da je $F(x)$ odvedljiva v vsaki točki. Velja torej

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-y \sin xy \, \mathrm{d}y}{(1+y^2)^2} \\ &= \left.\frac{\sin xy}{2(1+y^2)}\right|_{-\infty}^{\infty} - \frac{x}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xy \, \mathrm{d}y}{1+y^2} \\ &= -\frac{\pi x}{2}\, e^{-|x|}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Majoriziranje: 2 točki.*
- *Per partes: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Najdite $F(x)$. Kot znano upoštevajte, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Rešitev: Za $x = 0$ je

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Velja

$$F(x) = F(0) - \frac{\pi}{2} \int_0^x u e^{-u} \, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(1 - e^{-x}(x+1))\,.$$

Funkcija $F(x)$ je soda.

Ocenjevanje:

- *Vrednost v* $x = 0$*: 2 točki.*
- *Newton-Leibniz: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Sodost: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Dana naj bo enačba

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) + \int_0^t (1+u)y(t-u)\,\mathrm{d}u\,.$$

a. (10) Izračunajte

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\right)(s)$$

za $s > 1$.

Rešitev: Ugotovimo

$$\int_0^\infty e^t e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s-1}$$

in

$$\int_0^\infty e^{-t} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+s}\,.$$

Sledi

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\right)(s) = \frac{1}{s^2-1}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvi integral: 2 točki.*
- *Drugi integral: 2 točki.*
- *Združevanje: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Poiščite funkcijo $y(t)$.

Rešitev: Potrebujemo še Laplaceovo trasformacijo funkcije

$$\mathcal{L}(1+t)(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} = \frac{s+1}{s^2}\,.$$

Integral v enačbi je konvolucija dveh funkcij. Na obeh straneh enačbe uporabimo Laplaceovo transformacijo. Dobimo

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2-1} + \mathcal{L}y(s)\cdot\frac{s+1}{s^2}\,.$$

Iz tega sledi, da je

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{s}{s^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right)\,.$$

Razberemo, da je

$$y(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z LT: 2 točki.*
- *Konvolucija: 2 točki.*
- *LT poszamznih kosov: 2 točki.*
- *LT: 2 točki.*
- *Inverz in rezultat: 2 točki.*

4. (20) Funkcija $f(t)$ naj bo dana s predpisom

$$f(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{za } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

a. (10) Pokažite, da je

$$\mathcal{F}f(s) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin^2(s/2)}{s^2}\,.$$

Kot znano privzemite, da je $1 - \cos s = 2\sin^2(s/2)$.

Rešitev: Funkcija je soda, zato bo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (1-|t|)\cos st \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} (1-t)\cos st \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\left. \frac{(1-t)\sin st}{s} \right|_0^1 + \frac{1}{s} \int_0^1 \sin st \, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi} s} \int_0^1 \sin st \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-\cos s}{s^2} \\
&= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin^2(s/2)}{s^2}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Sodost: 2 točki.*
- *Formula: 2 točki.*
- *Per partes: 2 točki.*
- *Namig: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Po definiciji je

$$(f * f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_{-1}^{1} [f(u)]^2\,\mathrm{d}u\,.$$

Z uporabo inverzne formule in formule za Fourierovo transformacijo konvolucije izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 u \, \mathrm{d}u}{u^4}\,.$$

Privzemite, da je konvolucija $f * f$ v vsaki točki zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva.

Rešitev: Vemo, da je

$$\mathcal{F}(f * f)(s) = \sqrt{2\pi}\,(\mathcal{F}f(s))^2 \,,$$

torej

$$\mathcal{F}(f * f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{16\sin^4(s/2)}{s^4} \,.$$

Ker za konvolucijo velja inverzna formula (konvolucija je zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva) in je Fourierova transformacija soda, je

$$(f * f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{16\sin^4(s/2)}{s^4}\,\mathrm{d}s \,.$$

Po drugi stani je

$$(f * f)(0) = \frac{2}{3} \,.$$

V integralu na desni uvedemo $u = s/2$ in sledi

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 u}{u^4}\,\mathrm{d}u$$

Sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 u}{u^4}\,\mathrm{d}u = \frac{2\pi}{3} \,.$$

Ocenjevanje:

- *$(f * f)(0)$: 2 točki.*
- *Fourierova transformacija konvolucije: 2 točki.*
- *Inverzna formula za konvolucijo: 2 točki.*
- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Sklep in rezultat: 2 točki.*

5. (20) Funkcija $M(x)$ naj bo definirana s potenčno vrsto

$$M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(b)_k},$$

kjer je $(b)_0 = 1$ in $(b)_k = b(b+1)(b+2)\cdots(b+k-1)$ za $k \geq 1$. Privzemite, da je $b > 0$.

a. (10) Poiščite konvergenčni radij zgornje potenčne vrste in izpeljite, da je

$$xM''(x) + (b-x)M'(x) - M(x) = 0\,.$$

Utemeljite vaše trditve.

Rešitev: Najprej izračunamo

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(b)_k}{(b)_{k+1}} \right| = 0\,.$$

Radij konvergence je torej $R = \infty$. Potenčno vrsto lahko odvajamo po členih in dobimo

$$M'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{(b)_k}$$

in

$$M''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{(b)_k}\,.$$

Seštejemo in dobimo

$$\begin{aligned} & xM''(x) + (b-x)M'(x) - M(x) \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left(\frac{k(k+1)}{(b)_{k+1}} + \frac{b(k+1)}{(b)_{k+1}} - \frac{k}{(b)_k} - \frac{1}{(b)_k} \right) \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(b)_{k+1}} \left(k(k+1) + b(k+1) - k(b+k) - (b+k) \right) \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(b)_{k+1}} (k^2 + k + bk + b - bk - k^2 - b - k) \\ = & \ 0\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Radij konvergence: 2 točki.*
- *Prvo odvajanje po členih: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje po členih: 2 točki.*
- *Manipuliranje z vrstami: 2 točki.*
- *Zbrani koeficienti: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $b > 2$. Pokažite, da je

$$M(x) = (b-1)\int_0^1 e^{xt}(1-t)^{b-2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Utemeljite vaše korake.

Namig: Izpeljite z integracijo per partes, da je $\int_0^1 t^k(1-t)^{b-2}\,\mathrm{d}t = \frac{k!}{(b-1)(b)_k}$.

Rešitev: Vemo, da je $e^{xt} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k t^k}{k!}$. *Vstavimo to vrsto v zgornji integral in dobimo*

$$\begin{aligned}
(b-1)\int_0^1 e^{xt}(1-t)^{b-2}\,\mathrm{d}t &= (b-1)\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k t^k(1-t)^{b-2}}{k!}\mathrm{d}t \\
&= (b-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\int_0^1 t^k(1-t)^{b-2}\,\mathrm{d}t \\
&= (b-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{k!}{(b-1)(b)_k}\,.
\end{aligned}$$

Zamenjali smo neskončno vsoto in integral, kar lahko, ker je vrsta majorizirana z $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k}{k!}$, *ki seveda konvergira. Dokažimo še namig. Računamo*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^k(1-t)^{b-2}\,\mathrm{d}t &= -t^k\frac{(1-t)^{b-1}}{b-1}\Big|_0^1 + \frac{k}{b-1}\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{k(k-1)}{(b-1)b}\int_0^1 t^{k-2}(1-t)^{b}\,\mathrm{d}t \\
&= \cdots\cdots\cdots \\
&= \frac{k(k-1)\cdots 1}{(b-1)b(b+1)\cdots(b+k-2)}\int_0^1 (1-t)^{b+k-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{k!}{(b-1)(b)_k}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Razvoj eksponentne funkcije: 2 točki.*
- *Utemeljitev zamenjave seštevanja in integriranja: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Primerjava vrst: 2 točki.*
- *Dokaz namiga: 2 točki.*