FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4

Pisni izpit

7. junij 2013

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (20) Definirajte funkcijo $I(x)$ s predpisom

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\, e^{xu}\, \mathrm{d}u\,.$$

a. (10) Pokažite, da je

$$I(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2^{2m+1} m!(m+1)!}\,.$$

Kot znano privzemite, da je

$$\int_{-1}^{1} u^k \sqrt{1-u^2}\, \mathrm{d}u = 0$$

za lihe k, če pa je $m = 0, 1, 2, \ldots$, pa je

$$\int_{-1}^{1} u^{2m} \sqrt{1-u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{(2m)! \cdot \pi}{2^{2m+1} m!(m+1)!}\,.$$

Rešitev: Za fiksen x vrsta

$$e^{xu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xu)^k}{k!}$$

konvergira enakomerno za $u \in [-1, 1]$, zato enakomerno konvergira tudi vrsta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xu)^k}{k!} \cdot \sqrt{1-u^2}\,.$$

Zamenjamo vrstni red integriranja in seštevanja. Sledi

$$\begin{aligned}
I(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\, e^{xu}\, \mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} u^k \sqrt{1-u^2}\, \mathrm{d}u \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} u^{2m} \sqrt{1-u^2}\, \mathrm{d}u \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} u^{2m} \sqrt{1-u^2}\, \mathrm{d}u \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2^{2m+1} m!(m+1)!}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Vrsta za eksponentno funkcijo: 2 točki.*

- *Enakomerna konvergenca: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Krajšanje in poenostavitev: 2 točki.*
- *Razultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo

$$I_1(x) = xI(x)\,.$$

Izračunajte radij konvergence za potenčno vrsto za $I_1(x)$ in izračunajte

$$x^2 I_1''(x) + xI_1'(x) - (x^2+1)I_1(x)\,.$$

Rešitev: *Velja*

$$I_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2^{2m+1} m!(m+1)!}\,.$$

Izluščimo, da je

$$c_{2m+1} = \frac{1}{2^{2m+1} m!(m+1)!}$$

in

$$\lim_{m\to\infty} \left|\frac{c_{2m+3}}{c_{2m+1}}\right| = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{4(m+1)(m+2)} = 0\,.$$

Radij konvergence je $R = \infty$*. Računamo*

$$I_1'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \cdot \frac{x^{2m}}{2^{2m} m!(m+1)!}$$

in

$$I_1''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(2m) \cdot \frac{x^{2m-1}}{2^{2m} m!(m+1)!}\,.$$

V izrazu $x^2 I_1''(x) + xI_1'(x) - (x^2+1)I_1(x)$ *bodo nastopale samo potence* x^{2m+1}*. Preverimo najprej koeficient pri* x*. Dobimo*

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Koeficient pri x^{2m+1} *za* $m = 1, \ldots$ *bo*

$$\frac{2m(2m+1)}{2^{2m} m!(m+1)!} + \frac{2m+1}{2^{2m} m!(m+1)!} - \frac{1}{2^{2(m-1)}(m-1)!m!} - \frac{1}{2^{2m} m!(m+1)!}\,.$$

Izpostavimo in sledi, da je koeficient pri x^{2m+1} *enak*

$$\frac{1}{2^{2m} m!(m+1)!}\left(2m(2m+1) + 2m + 1 - 4(m+1)m - 1\right) = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Radij konvergence: 2 točki.*
- *Odvajanje po členih: 2 točki.*
- *Koeficient pri* x*: 2 točki.*
- *Zbiranje členov pri* $x^{2m=1}$*: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

2. (20) Naj bo funkcija $f(x)$ periodična s periodo 2π in naj za $x \in [-\pi, \pi]$ velja $f(x) = e^{-a|x|}$ za nek $0 < a < 1$.

a. (10) Razvijte funkcijo $f(x)$ v Fourierovo vrsto. Za katere točke Fourierova vrsta konvergira proti $f(x)$? Kot znano upoštevajte

$$\int e^{ax} \cos(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{e^{ax}(a\cos(bx) + b\sin(bx))}{a^2 + b^2}.$$

Rešitev: Funkcije je soda, zato je $b_n = 0$ za vse $n \geq 1$. Računamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-a|x|}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi a}\left(1 - e^{-a\pi}\right).$$

Računamo

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-a|x|} \cos(nx)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} e^{-ax} \cos(nx)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{e^{-ax}}{a} \cos(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{n}{a} \int_0^{\pi} e^{-ax} \sin(nx)\, \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{a}\left(1 - (-1)^n e^{-a\pi}\right) + \frac{n}{a^2} e^{-ax} \sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{n^2}{a^2} \int_0^{\pi} e^{-ax} \cos(nx)\, \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{a}\left(1 - (-1)^n e^{-a\pi}\right) - \frac{n^2 \pi a_n}{2a^2} \right).
\end{aligned}$$

Sledi

$$a_n \left(1 + \frac{n^2}{a^2}\right) = \frac{2}{\pi a}\left(1 - (-1)^n e^{-a\pi}\right).$$

Sledi

$$a_n = \frac{2a\left(1 - (-1)^n e^{-a\pi}\right)}{\pi(n^2 + a^2)}.$$

Funkcija $f(x)$ je zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva. Ker velja $f(-\pi) = f(\pi)$, Fourierova vrsta v vsaki točki konvergira proti $f(x)$. Velja torej

$$f(x) = \frac{1}{\pi a}(1 - e^{-\pi a}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a\left(1 - (-1)^n e^{-a\pi}\right)\cos(nx)}{\pi(n^2 + a^2)}.$$

Ocenjevanje:

- *Sodost: 2 točki.*
- *a_0: 2 točki.*
- *a_n: 2 točki.*
- *Vrsta: 2 točki.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{a^2 + (2m)^2}\,.$$

Rešitev: V Fourierovo vrsto za $f(x)$ vstavimo $x = \pi/2$. Po prvem delu sledi

$$e^{-\pi a/2} = \frac{1}{\pi a}(1 - e^{-a\pi}) + \frac{2a(1 - e^{-a\pi})}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{a^2 + (2m)^2}\,.$$

Delimo obe strani z $1 - e^{-a\pi}$ in množimo s $\pi/(2a)$. Sledi

$$\frac{\pi e^{-\pi a/2}}{2a(1 - e^{-a\pi})} - \frac{1}{2a^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{a^2 + 4m^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Izbira x: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Uporaba konvergence: 2 točki.*
- *Preurejanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Na intervalu $[1, \infty)$ naj bo dana linearna diferencialna enačba

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}\,y = \frac{\log x}{x^2}\,.$$

a. (10) Preverite, da sta funkciji

$$y_1(x) = \cos(\log x) \qquad \text{in} \qquad y_2(x) = \sin(\log x)$$

linearno neodvisni rešitvi homogene diferencialne enačbe.

Rešitev: Ugotovimo, da je

$$y_1'(x) = -\sin(\log x)/x \qquad \textit{in} \qquad y_1''(x) = -\cos(\log x)/x^2 + \sin(\log x)/x^2\,.$$

Da funkcija ustreza enačbi ugotovimo z vstavljanjem. Izračunamo še

$$w(x) = y_1y_2' - y_1'y_2 = \frac{1}{x}\,.$$

Funkciji sta linearno neodvisni, ker je $w(x) \neq 0$.

Ocenjevanje:

- *Odvodi y_1: 2 točki.*
- *Odvodi y_2: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Vronski: 2 točki.*
- *Sklep o neodvisnosti: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev prvotne enačbe pri začetnih pogojih $y(1) = y'(1) = 0$.

Rešitev: Po formuli je partikularna rešitev enaka

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{g(x)y_2(x)}{w(x)}\,\mathrm{d}x + y_2(x)\int \frac{g(x)y_1(x)}{w(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

V integralih uvedemo novo spremenljivko $\log x = u$ in integriramo per partes. *Sledi*

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \cos(\log x)\,(\log x\cos(\log x) - \sin(\log x)) + \\ &\quad + \sin(\log x)\,(\log x\sin(\log x) + \cos(\log x)) = \log x\,. \end{aligned}$$

Splošna rešitev je

$$y = y_p + c_1\cos(\log x) + c_2\sin(\log x)\,.$$

Vstavimo točko $x = 1$. Dobimo enačbi

$$y(0) = c_1 = 0 \qquad \textit{in} \qquad y'(0) = 1 + c_2 = 0\,.$$

Sledi $c_1 = 0$ in $c_2 = -1$. Končna rešitev je

$$y(x) = \log x - \sin(\log x)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Enačbe za konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

4. (20) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x}\cos x\,.$$

a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje enačbe.

Rešitev: Najprej poiščemo linearno neodvisni rešitvi homogene enačbe. Karakteristični polinom je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

z ničlama $\lambda_1 = 2 + i$ in $\lambda_2 = 2 - i$. Linearno neodvisni rešitvi sta

$$y_1(x) = e^{2x}\cos x \qquad in \qquad y_2(x) = e^{2x}\sin x\,.$$

Partikularno enačbo rešujemo tako, da izraz na desni nadomestimo najprej z $4e^{(2+i)x}$. Ker je konstanta v eksponentu ničla karakterističnega polinoma, bomo rešitve iskali z nastavkom

$$y_p(x) = Axe^{(2+i)x}\,.$$

Potrebujemo

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ae^{(2+i)x}(1 + x(2+i)) \\ y_p''(x) &= Ae^{(2+i)x}(2(2+i) + x(2+i)^2)\,. \end{aligned}$$

Vstavimo in pokrajšamo $e^{(2+i)x}$. Dobimo

$$A\left((2(2+i) + x(2+i)^2) - 4(1 + x(2+i)) + 5x\right) = 2$$

Preračunamo in dobimo

$$A \cdot 2i = 2\,,$$

torej $A = -i$. Iskana rešitev je realni del $Axe^{(2+i)x}$, kar je $y_p(x) = xe^{2x}\sin x$. Splošna rešitev je oblike

$$y(x) = xe^{2x}\sin x + c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom in ničle: 2 točki.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*
- *Nastavek za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Konstanta A: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe, ki ustreza pogojema $y(0) = 0$ in $y'(0) = 2$.

Rešitev: Iz začetnih pogojev moramo določiti konstanti c_1 in c_2 v splošni rešitvi. Dobimo

$$y(0) = c_1 \qquad in \qquad y'(0) = 2c_1 + c_2\,.$$

Rešitev sistema je $c_1 = 0$ in $c_2 = 2$.

Ocenjevanje:

- *Odvod: 3 točke.*
- *Sistem enačb za konstanti: 3 točke.*
- *Rešitev sistema enačb: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Naj za $t \geq 0$ funkcija $y(t)$ zadošča enačbi

$$y(t) = \cos(3t) - 3\int_0^t y(u)e^{3(t-u)}\,\mathrm{d}u\,.$$

Kot znano predpostavite

$$\mathcal{L}(\sin bt)(s) = \frac{b}{s^2+b^2} \quad \text{in} \quad \mathcal{L}(\cos bt)(s) = \frac{s}{s^2+b^2}\,.$$

a. (10) Izračunajte Laplacovo transformacijo funkcije $y(t)$ za $s > 3$.

Rešitev: Hitro se prepričamo, da je

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\right)(s) = \frac{1}{s-a}$$

za $s > a$. Integral na desni v enačbi za $y(t)$ je konvolucija funkcije $y(t)$ in e^{3t}. Sledi

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{s}{s^2+9} - \frac{3\mathcal{L}y(s)}{s-3}\,.$$

Iz te enačbe izračunamo

$$\mathcal{L}y(s)\left(1+\frac{3}{s-3}\right) = \frac{s}{s^2+9}$$

in

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{s-3}{s^2+9}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Laplacova transformacije $\cos 3t$: 2 točki.*
- *Laplaceova transformacija e^{3t}: 2 točki.*
- *Konvolucija: 2 točki.*
- *Enačba: 2 točki.*
- *Laplaceova transformacija: 2 točki.*

b. (10) Poiščite $y(t)$.

Rešitev: Razberemo, da je

$$y(t) = \cos(3t) - \sin(3t)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Razstavljenje: 2 točki.*
- *Koeficienti: 2 točki.*
- *Inverzne transformacije členov: 2 točki.*
- *Linearnost: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*