FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4

1. kolokvij

29. november 2011

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

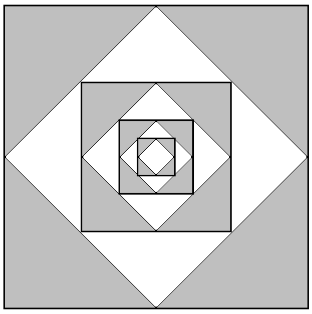
Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (20) Množico v ravnini definiramo rekurzivno kot na spodnji sliki. Prvi kvadrat naj ima stranico a. Na vsakem koraku včrtamo kvadrat z dvakrat manjšo stranico in istim središčem in v množico vključimo osenčene trikotnike.



a. (15) Izračunajte ploščino osenčenega lika, tako da seštejete neskončno vrsto.

Rešitev: Ploščina prvih 4 *osenčenih trikotnikov je* $1/2$. *Ko včrtamo naslednji kvadrat, imajo osenčeni trikotniki dvakrat manjše stranice, torej štirikrat manjšo ploščino. Vsakič, ko včrtamo manjši kvadrat se ploščina zmanjša za faktor* 4. *Sešteti torej moramo neskončno vrsto*

$$1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/16 = 1/2 \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^n .$$

Gre za neskončno geometrijsko vrsto s $q = 1/4$ *in vsoto* $1/(1-q)$. *Rezultat je* $(1/2) \cdot (4/3) = 2/3$.

Ocenjevanje:

- *Prvi osenčen del: 3 točke.*
- *Faktor za vsak naslednji: 3 točke.*
- *Opažanje, da je vrsta geometrijska: 3 točke.*
- *Formula za vsoto: 3 točke.*
- *Vstavljanje in rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte skupno dolžino roba vseh osenčenih trikotnikov.

Rešitev: Vsak naslednji včrtani osenčeni lik ima dvakrat manjšo dolžino roba. Dolžina roba prvega osenčenega lika je $4 + 2\sqrt{2}$. *Sešteti moramo*

$$(4 + 2\sqrt{2}) \cdot (1 + (1/2) + (1/4) + \cdots) = (4 + 2\sqrt{2}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n .$$

Spet gre za geometrijsko vrsto s $q = 1/2$ *in vsoto* 2. *Rezultat je* $8 + 4\sqrt{2}$.

Ocenjevanje:

- *Obseg prvega osenčenega dela: 2 točki.*
- *Faktor za vsak naslednji: 2 točki.*
- *Opažanje, da je vrsta geometrijska: 2 točki.*
- *Formula za vsoto: 2 točki.*
- *Vstavljanje in rezultat: 2 točki.*

2. (25) Funkcija $M(x)$ naj bo definirana s potenčno vrsto

$$M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! \cdot 4^k \cdot x^k}{(2k)!}.$$

a. (10) Poiščite konvergenčni radij zgornje potenčne vrste. Izrazite $M'(x)$ in $M''(x)$ s potenčno vrsto.

Rešitev: Najprej izračunamo

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{4(k+1)}{(2k+2)(2k+1)} = 0\,.$$

Radij konvergence je torej $R = \infty$. Potenčno vrsto lahko odvajamo po členih in dobimo

$$M'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! \cdot 4^k \cdot kx^{k-1}}{(2k)!}$$

in

$$M''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! \cdot 4^k \cdot k(k-1)x^{k-2}}{(2k)!}.$$

Ocenjevanje:

- *Radij konvergence: 2 točki.*
- *Prvo odvajanje po členih: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje po členih: 2 točki.*
- *Utemeljitev, zakaj lahko odvajamo: 2 točki.*
- *Utemeljitev, zakaj lahko dvakrat odvajamo: 2 točki.*

b. (15) Izpeljite, da je

$$xM''(x) + \left(\frac{1}{2} - x\right) M'(x) - M(x) = 0\,.$$

Utemeljite vaše trditve.

Rešitev: Seštejemo in dobimo

$$\begin{aligned} &xM''(x) + \left(\frac{1}{2} - x\right) M'(x) - M(x) = \\ &= \ x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!4^k k(k-1)x^{k-2}}{(2k)!} + \left(\frac{1}{2} - x\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! \cdot 4^k kx^{k-1}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!4^k \cdot x^k}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Seštejemo koeficiente pri potencah x^k. Za konstantni člen dobimo

$$\frac{4}{4} - 1 = 0\,,$$

za koeficient pri x^k *za* $k \geq 1$ *pa*

$$\frac{(k+1)^2 k^2 (k-1)! 4^{k+1}}{(2k+2)!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(k+1)^2 k! 4^{k+1}}{(2k+2)!} - \frac{k^2 (k-1)! 4^k}{(2k)!} - \frac{k! \cdot 4^k}{(2k)!} .$$

Izpostavimo

$$\frac{(k-1)! 4^k}{(2k+2)!}$$

in ostane

$$4(k+1)^2 k^2 + 2(k+1)^2 k - (2k+2)(2k+1)k^2 - k(2k+2)(2k+1) .$$

Izpostavimo še $2k(k+1)$. *Ostane*

$$2(k+1)k + k + 1 - (2k+1)k - 2k - 1 = 0 .$$

Ocenjevanje:

- *Vstavljanje: 3 točke.*
- *Konstantni člen vsote: 3 točke.*
- *Člen pri* x^k*: 3 točke.*
- *Izpostavljanje: 3 točke.*
- *Končna poenostavitev v* 0*: 3 točke.*

3. (25) Definiramo funkciji $J_0, J_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k! \cdot k! \cdot 2^{2k}} \quad \text{in} \quad J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k! \cdot (k+1)! \cdot 2^{2k+1}}$$

a. (10) Pokažite, da je radij konvergence zgornjih dveh potenčnih vrst enak $R = \infty$. Pokažite, da velja

$$\left[\left(\frac{x}{2}\right) J_1(x)\right]' = \left(\frac{x}{2}\right) J_0(x) \, .$$

Utemeljite vaše korake.

Rešitev: Za radij konvergence moramo izračunati limito

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| &= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!\ k! 2^{2k+1}}{(k+2)!(k+1)! 2^{2k+3}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4(k+2)(k+1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Radij konvergence je torej $R = \infty$. Za dokaz enakosti zapišemo

$$\left(\frac{x}{2}\right) J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2}}{(k+1)!\ k!\ 2^{2k+2}} \, .$$

Ker ta vrsta povsod konvergira, jo lahko členoma odvajamo in dobimo

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{x}{2}\right) J_1(x)\right]' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k+1) x^{2k+1}}{(k+1)!\ k!\ 2^{2k+2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!\ k!\ 2^{2k+1}} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!\ k!\ 2^{2k}} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right) J_0(x) \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula za radij konvrgence: 2 točki.*
- *Radij konvergence: 2 točki.*
- *Razvoj produkta v potenčno vrsto: 2 točki.*
- *Utemeljitev odvajanja po členih: 2 točki.*
- *Izračun in primerjava koeficientov: 2 točki.*

b. (15) Pokažite, da je

$$\int_0^x J_1(u)\,\mathrm{d}u = 1 - J_0(x)\,.$$

Utemeljite vse vaše korake.

Namig: Levo in desno stran razvijte v potenčno vrsto in primerjajte koeficiente pri x^{2k} na levi in desni za $k = 1, 2, \ldots$.

Rešitev: Razvijmo najprej v potenčno vrsto levo stran enačbe. Ker potenčna vrsta povsod konvergira, lahko zamenjamo vrstni red seštevanja in integriranja in dobimo

$$\begin{aligned}
\int_0^x J_1(u)\,\mathrm{d}u &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^{2k+1}}{(k+1)!\,k!\,2^{2k+1}}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}(k+1)!\,k!} \int_0^x u^{2k+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2(k+1)}}{2^{2k+1}\,(2k+2)(k+1)!\,k!}\,.
\end{aligned}$$

Primerjamo s koeficienti desne strani in rezultat sledi.

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev integriranja po členih: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Vstavljanje mej: 3 tpčke.*
- *Primerjanje koeficientov: 3 točke.*
- *Sklep: 3 točke.*

4. (25) Funkcija $f(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ naj bo definirana z

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{za } 0 < x < \pi \\ -\cos x & \text{za } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{za } x = 0, \pi, -\pi. \end{cases}$$

a. (15) Dokažite, da je za $0 < x < \pi$

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}\,.$$

Utemeljite, zakaj Fourierova vrsta za $0 < x < \pi$ konvergira proti $\cos x$.

Namig: Uporabite

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)\,.$$

Rešitev: Funkcija je liha, zato je $a_n = 0$ za vse $n \geq 0$. Izračunajmo najprej

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin x \,\mathrm{d}x = 0\,,$$

kot se brž prepričamo s substitucijo $2x = u$. Za $n > 0$ zapišemo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-(-1)^{n+1}+1}{n+1} + \frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Brž se prepričamo, da za lihe n dobimo $b_n = 0$, za sode pa $b_n = (1/\pi)4n/(n^2-1)$. Če sode n zapišemo kot $2k$ in seštevamo po k dobimo točno zgornji rezultat. Fourierova vrsta konvergira v vsaki točki, ker je $f(x)$ odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva in velja povsod $(f(x+) + f(x-))/2 = f(x)$.

Ocenjevanje:

- *Lihost: 3 točke.*
- *b_0: 3 točke.*
- *Razcep produkta: 3 točke.*
- *b_n: 3 točke.*
- *Konvergenca: 3 točke.*

b. (10) Uporabite a. za izračun vsote neskončne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{4(2n+1)^2-1}.$$

Rešitev: V zgornjo vrsto vstavimo $x = \pi/4$. Ostanejo samo lihi členi, ker je $\sin(k\pi) = 0$ za vsak k. V Fourierovi vrsti za $f(x)$ na levi dobimo $f(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, na desni pa iskano vrsto pomnoženo z $8/\pi$. Rezultat je $\pi\sqrt{2}/16$.

Ocenjevanje:

- *$x = \pi/4$: 3 točke.*
- *Ostanejo samo lihi členi: 3 točke.*
- *Vsota neskončne vrste: 4 točke.*