FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4

2. kolokvij

9. januar 2013

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Masna točka se pod vplivom težnosti giblje po krivulji, dani kot graf funkcije $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. V trenutku $t = 0$ je masna točka v točki $(0, h)$ in ima hitrost c. Funkcija y ustreza diferencialni enačbi

$$\dot{y} = -\sqrt{2g(h-y)}\,.$$

kjer je g zemeljski pospešek.

a. (15) Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe za funkcijo y.

Rešitev: Prepišemo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2g(h-y)}} = -1\,,$$

integriramo in dobimo

$$\sqrt{(h-y)} = \sqrt{\frac{g}{2}}(t+d)$$

za neko konstanto d. Izračunamo

$$h - y = \frac{g}{2}(t+d)^2\,,$$

torej

$$y = h - \frac{g(t+d)^2}{2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Izračun $\dot{y}$: 3 točke.*
- *Prepis za integriranje: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Konstanta na pravem mestu: 3 točke.*
- *Izračun y: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev diferencialne enačbe, ki ustreza začetnim pogojem.

Rešitev: Z vstavljanjem začetnih pogojev dobimo

$$0 = \frac{gd^2}{2}\,,$$

torej $d = 0$. Sledi

$$y = h - \frac{gt^2}{2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Kam bi del začetne pogoje: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Enačba za d: 2 točki.*
- *d: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

2. (25) Dana naj bo linearna diferencialna enačba oblike

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = f(x)\,.$$

a. (10) Preverite, da sta funkciji

$$y_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \qquad \text{in} \qquad y_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

linearno neodvisni rešitvi homogene enačbe ($f(x) = 0$).

Rešitev: Najprej preverimo, da sta y_1 in y_2 res rešitvi diferencialne enačbe. Z odvajanjem dobimo

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\left(-\frac{\cos x}{2} - x\sin x\right) \\ y_1''(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x^5}}\left(\frac{3\cos x}{4} - x^2\cos x + x\sin x\right) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\left(x\cos x - \frac{\sin x}{2}\right) \\ y_2''(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x^5}}\left(-x\cos x + \frac{3\sin x}{4} - x^2\sin x\right)\,. \end{aligned}$$

Odvode vstavimo v enačbo in se prepričamo, da sta dani funkciji res rešitvi. Izračunamo še determinanto Wronskega.

$$\begin{aligned} W(x) &= \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\pi}\det\begin{pmatrix} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} & \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \\ \frac{1}{\sqrt{x^3}}(-\frac{\cos x}{2} - x\sin x) & \frac{1}{\sqrt{x^3}}(x\cos x - \frac{\sin x}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\pi x} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prvi odvodi: 2 točki.*
- *Drugi dovodi: 2 točki.*
- *Preverjanje: 2 točki.*
- *Determinanta Wronskega: 2 točki.*
- *Sklep o neodvisnosti: 2 točki.*

b. (15) Poiščite partikularno rešitev zgornje enačbe, če je $f(x) = x^{3/2}$.

Rešitev: Vemo, da dobimo partikularno rešitev po formuli

$$y_p(x) = -y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(u) \cdot f(u)}{u^2 W(u)} \,\mathrm{d}u + y_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(u) \cdot f(u)}{u^2 W(u)} \,\mathrm{d}u \,.$$

Integriramo:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y_1(x) \int^{x} \sin u \,\mathrm{d}u + \sqrt{\frac{\pi}{2}} y_2(x) \int^{x} \cos u \,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 4 točke.*
- *Pravilno vstavljanje v nastavek: 4 točki.*
- *Integriranje: 3 točki.*
- *Rešitev: 4 točki.*

3. (25) Dana naj bo linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x\,.$$

a. (15) Poiščite splošno rešitev te enačbe.

Rešitev: Ničli karakterističnega polinoma sta $-1+i$ in $-1-i$. Nastavek za partikularno rešitev je $y_p = Axe^{(-1+i)x}$. Z odvajanjem dobimo enačbo

$$A(2(-1+i) + x(-1+i)^2 + 2 + 2x(-1+i) + 2x) = 1\,.$$

Krajšamo in sledi $2Ai = 1$, torej $A = -i/2$. Rešitev je torej

$$y = -\frac{x}{2}e^{-x}\cos x + c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ničli: 3 točke.*
- *Nastavek: 3 točke.*
- *Odvodi: 3 točke.*
- *A: 3 točke.*
- *Rešitev: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev, za katero je $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$.

Rešitev: V splošno rešitev in njen odvod vstavimo $x = 0$. Dobimo enačbi

$$y(0) = c_1 = 0 \qquad \text{in} \qquad y'(0) = -\frac{1}{2} - c_1 + c_2 = 1\,.$$

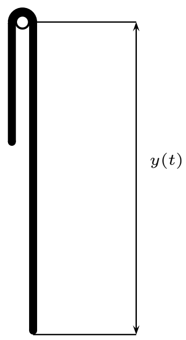
Sledi $c_1 = 0$ in $c_2 = 3/2$, torej je končna rešitev enaka

$$y = -\frac{x}{2}e^{-x}\cos x + \frac{3}{2}\,e^{-x}\sin x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Uporaba splošne rešitve: 2 točki.*
- *Vrednost v $x = 0$: 2 točki.*
- *Vrednost odvoda v $x = 0$: 2 točki.*
- *Enačbi za konstanti: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

4. (25) Veriga dolžine L visi na palici in drsi brez trenja. Označimo z $y(t)$ dolžino dela verige na desni strani kot na sliki 1.



Slika 1 Položaj verige v trenutku t.

a. (15) Naj bo m masa verige. Po Newtonovem zakonu funkcija $y(t)$ za $y > L/2$ ustreza diferencialni enačbi

$$m\ddot{y} = \left(\frac{2y - L}{L}\right) mg\,.$$

Poiščite splošno rešitev enačbe.

Rešitev: Pokrajšamo m in enačbo prepišemo v

$$\ddot{y} - \frac{2g}{L} \cdot y = -g\,.$$

Enačba je nehomogena linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti. Označimo $2g/L = \omega^2$. Homogena enačba ima linearno neodvisni rešitvi

$$y_1(t) = \cosh(\omega t) \qquad \textit{in} \qquad y_2(t) = \sinh(\omega t)\,.$$

Potrebujemo še partikularno rešitev. Na levi strani je konstanta, zato bo tudi partikularna rešitev konstanta. Z vstavljanjem sledi $y_p(t) = L/2$. Splošna rešitev bo torej

$$y(t) = \frac{L}{2} + c_1 y_1 + c_2 y_2\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe v običajno obliko: 3 točke.*
- *Opazka, da je enačba nehomogena linearna: 3 točke.*
- *Rešitvi homogene enačbe: 3 točke*
- *Partikularna rešitev: 3 točke.*
- *Splošna rešitev: 3 točke.*

b. (10) V kolikšnem času bo veriga zdrsnila s palice ($y(t) = L$), če je $y(0) = a > L/2$ in $\dot{y}(0) = 0$.

Rešitev: V splošni rešitvi iz a. izberemo konstanti c_1 in c_2, da bo zadoščeno začetnima pogojema. Dobimo enačbi

$$L/2 + c_1 = a \qquad \textit{in} \qquad c_2\,\omega = 0$$

Sledi

$$y(t) = \frac{L}{2} + \left(a - \frac{L}{2}\right)\cosh(\omega t)\,.$$

V času t_0, ko bo veriga zdrsnila s palice, bo $y(t_0) = L$. Vstavimo v enačbo in dobimo

$$L = \frac{L}{2} + \left(a - \frac{L}{2}\right)\cosh(\omega t_0)\,.$$

Sledi

$$\frac{L}{2a - L} = \cosh(\omega t_0)$$

ali

$$t_0 = \frac{1}{\omega}\log\left(\frac{L}{2a-L} + \sqrt{\left(\frac{L}{2a-L}\right)^2 - 1}\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Enačbi za konstante: 2 točki.*
- *Rešitev enačbe: 2 točki.*
- *Enačba za čas: 2 točki.*
- *Pretvorba enačbe na čisto obliko: 2 točki.*
- *Končna formula: 2 točki.*