1. Kako opišemo povezano in pogojno verjetnost dogodkov A in B? Kdaj sta dogodka A in B statistično povezana in kdaj neodvisna? Kaj je popolna verjetnost dogodka B? Kaj opisuje Bayesov teorem? Navedite primer uporabe Bayesovega teorema.

* <u>Povezana verjetnost dogodka</u>

$$P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A) = P(A/B) \times P(B)$$

Dva nepovezana dogodka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0$$

* <u>Pogojna verjetnost dogodka B pri pogoju A da se zgodi A je:</u>

$$P(A/B) = \frac{N_{A \cap B}}{N_B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \mathrm{P(B)} \neq 0$$

* <u>Dva povezana dogodka</u>

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ Dva dogodka sta statistično povezana če njun presek ni prazna množica

$$P[A \cap B] \neq 0$$

* <u>Neodvisna dogodka</u> Če je verjetnost dogodka A neodvisna od pogoja B in obratno če je verjetnost dogodka B neodvisna od pogoja A pravimo da sta dogodka neodvisna

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A/B) = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

* <u>Popolna verjetnost dogodka</u> B je gotova verjetnost in je enaka: $P(B) = P(S) = 1$ pri čemer je P(S)=verjetnost vzorčnega prostora

<u>Izpeljava Bayesovega teorema:</u>

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)} \quad \mathrm{P}(\mathrm{A})\neq 0$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P[B_i]=\sum_{i=1}^{n}P[B\cap A_i]$$

$$P(B)=P[B/A_i]\times P[A_i] \quad \text{apriorna vrednost}$$

$$\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}P[B\cap A_i]=P[B/A_i]\times P[A_i]$$

$$P[A_i/B]=\frac{P[A_i\cap B]}{P[B]}=\frac{P[B/A_i]\times P[A_i]}{P[B]}$$

$$P[A_i/B]=\frac{P[B/A_i]\times P[A_i]}{P[B]} \quad \text{Bayesov teorem}$$

Bayesov teorem uporabimo za izračun verjetnosti da je nek slab izdelek iz celotne proizvodnje bil narejen na nekem stroju.

2. Kaj je osnovna naloga statistike? Kako je opredeljeno povprečje $<x>_n$ in kakšne so lastnosti te cenilke? Izpeljite izraza za statistično povprečje $E[<x>_n]$ in varianco vzorčnega povprečja $Var(<x>_n)$.

* <u>Osnovna naloga statistike</u> je da glede na vzorec sklepa kakšne so lastnosti celotne populacije.

<u>* Vzorčno povprečje</u> je definirano $<x>_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

Od vzorca do vzorca se povprečje <x> spreminja zato spada med <u>naključne spremenljivke</u>.

* Pri stalni razsežnosti vzorca n lahko določimo <u>statistično povprečje</u>:

$$E[<x>_n]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i$$

$$E[<x>_n]=m$$

Ker je statistično povprečje $<x>_n$ enako vzorčnemu povprečju pravimo da je nepristranska cenilka

* <u>Raztros vzorčnega povprečja <x> opišemo z varianco</u>:

$$Var[<x>_n]=E\left[(<x>_n-m)^2\right]$$

$$Var[<x>_n]=\frac{Var[x]}{n}=\frac{\sigma_x^2}{n}\Rightarrow\sigma_{<x>}$$

$$ali \quad \sigma_{<x>}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

3. Opišite čemu je namenjen HI-kvadrat prilagoditveni test. Opredelite statistiko HI-kvadrat prilagoditvenega testa in njeno porazdelitev verjetnosti ter pojasnite, kako test poteka in kakšen je sklep. Kako je pri tem testu opredeljena napaka prve in druge vrste.

* S pomočjo HI-kvadrat prilagoditvenega testa ugotavljamo kako se empirični podatki prilagajajo neki porazdelitveni funkciji. Zamislimo si primer pri katerem smo z vzorcem razsežnosti n dobili empirično zbirno porazdelitev Fn(x) za katero domnevamo da jo je mogoče opisati s teoretično zbirno porazdelitveno funkcijo $F_0(x)$

slika

Za ugotavljanje ujemanja uporabimo metodo zavračanja H(F=F_0). Kadar vrednost statistike ki jo izračunamo ne pade v kritično področje, hipoteze ne zavrnemo.

$$H_0 : f(x) = N(\mu,\sigma) = f_0(x)$$

$$H_1 : f(x) \neq f_0(x)$$

$$n_i \approx 10$$

$$n_i > 5$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(n_i - n_{i0}\right)^2}{n_{i0}^2} \times n_{i0} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(n_i - n_{i0}\right)^2}{n_{i0}} = n \times \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(p_i - p_{i0}\right)^2}{p_{i0}}$$

$$n_i = p_i \times n$$

$$n_{i0} = p_{i0} \times n$$

Če velja $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,r-l-1} \Rightarrow H_0$ zavrnemo (to je napaka 1. reda)

* Napaka prvega reda je ko hipotezo zavrnemo kljub temu da je pravilna. Ker je vzorčno povprečje <x> naključna spremenljivka lahko zavzame vrednosti znotraj ali pa izven intervala zavračanja. Kadar je izmerjena vrednost v intervalu zavračanja hipotezo H_0 zavrnemo. Verjetnost da se to zgodi imenujemo STOPNJA ZNAČILNOSTI α.

$$P\left(< x > \in S_c\right) = \int_{S_c} f_0(x)\,dx = \alpha$$

* Napaka drugega reda je ko hipoteza ni pravilna in ni zavrnjena. Parameter β ustreza verjetnosti da izmerimo vzorčno povprečje izven kritičnega področja S_c . Zato pomeni β verjetnost sprejema napačne hipoteze kar ustreza napaki drugega reda.

4. Kako sta povezana vhodni in izhodni signal pri linearnem časovno neodvisnem sistemu? Kako sta definirani impulzna in frekvenčna odzivna funkcija linearnega sistema? Kako je opredeljena spektralna gostota stacionarnega procesa x in kakšen je njen fizikalni pomen? Kako je opredeljena spektralna gostota izhoda y linearnega sistema, če poznamo spektralno gostoto stacionarnega vhoda x.

*Kako sta povezana vhodna in izhodna spremenljivka pri časovno neodvisnem linearnem sistemu.

$x(t) \to H \to y(t)$

X(t)-naključni proces, vhodni signal
Y(t)-transformiran naključni proces, izhodni signal

H-simbolična oznaka za transformacijo oziroma vpliv sisstema (operator)

Odziv y(t) linearnega sistema je podan z linearno transformacijo vhoda x(t).

$$y(t) = H\left[x(t)\right] = H\left[\int x(t')\,\delta(t-t')\,dt'\right]$$
$$= \int x(t')\,H\delta(t-t')\,dt' = \int x(t')\,dg(t,t')$$
$$= \int x(t')\,h(t,t')\,dt'$$

*Definicija impulza

$$\lim\left[\left(t-t_1\right) \to \delta\left(t-t_1\right)\right]$$
$$I\left(t-t_1\right)\Delta t = \begin{cases} 1 : t \in \left(t_1 - \frac{\Delta t}{2}; t_1 + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ 0 : \text{ drugo} \end{cases}$$

frekvenčni odziv funkcije

$$\mathrm{x}(\mathrm{t}) = \sum x\left(t_i\right) \times I\left(t-t_i\right)\Delta t \approx \tilde{x}_{0i}$$

$$x(t) = \lim_{t\to 0} \tilde{x}_{0i}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \times \delta(t-t')\,dt'$$

t-t'=t" dt'=dt"

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t'')\,\delta(t'')\,dt''$$

$$y(t) = H\left(x(t)\right)$$
$$= H\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t') \times \delta(t-t')dt'\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \times H\left(\delta(t-t')\right)dt'$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \times h(t-t')\,dt' \quad \text{konvolucijski integral}$$

t-t'=t" dt'=dt"

$$\mathrm{y}(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t'')\,h(t'')\,dt'$$

Odziv sistema na harmonično vzbujanje x(t) =$e^{i\omega t}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t') \times h(t')\, dt$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} h(t')\, dt' = e^{i\omega(t)} h(t')\, dt$$

$$y(t) = e^{i\omega t} \times H(\omega)$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} h(t')\, dt' \quad \Rightarrow \text{frekvenčna odzivna funkcija}$$

* Spektralna gostota pomeni gostoto moči, ki o komponente s krožno frekvenco v intervalu dω okoli ω prispevajo k skupni moči signala.

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) \times e^{-i\omega t} dt$$

Spektralna gostota y linearnega sistema če poznamo spektralno gostoto stacionarnega vhoda x?

$$R_{yy}(t) = \int\int H(\omega_1) H(\omega_2) \times \frac{e^{-i\omega_2 t}}{2\times\pi} \times \delta(\omega_1 + \omega_2) \times S_{xx}(\omega_2)\, d\omega_1 d\omega_2 \quad /\int$$

$$R_{yy}(t) = \frac{1}{2\pi}\int H(-\omega) H(\omega) e^{i\omega t} S_{xx}(\omega)\, d\omega$$

$$\mathrm{H}(-\omega) = H''(\omega)$$

$$R_{yy}(t) = \frac{1}{2\pi}\int \left|H(\omega)\right|^2 e^{i\omega t} S_{xx}(\omega)\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int S_{yy}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$S_{yy}(t) = \left|H(\omega)\right|^2 S_{xx}(\omega)$$

spektralna gostota izhodnega procesa y(t)

5.)Izpeljite Binomsko porazdelitev
Binomsko porazdelitev uporabljamo pri poizkusih, kjer sta možna le dva različna izida poskusa, tipičen primer je met kovanca.
Izpeljava :
n-število poiskusov
x-število ugodnih izidov

$$P[A] = p$$

$$P[B] = q$$

$$P[S] = P|A \cup B| = P[A] + P[B]$$

$$p + q = 1 \Rightarrow q = 1 - p$$

Verjetnost, da se pojavi A x-krat v n poizkusih je $p^x \times q^{n-x}$.Število vseh možnih zadetkov, kjer se A pojavi x-krat je enako številu različnih razporeditev n elementov na n mestih, pri čemer je x elementov v enakih A in n-x enakih B.

To število je: $\frac{n!}{x!(n-x)!} = \binom{n}{x}$

Verjetnost, da se v n poizkusih pojavi dogodek A x-krat je torej:

$$P_n(x) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x}$$

$$P_n(x) = \binom{n}{x} \times p^x \times (1-p)^{n-x}$$

Za večje vrednosti si za izračun fakultete poslužimo naslednje enačbe:

$$n! = n^n \times e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

6.)Kako pridemo iz Binomske do Poissonove porazdelitve?

$p \cdot n = 1$

$n \to \infty$

$\Theta = p \cdot n$

$p = \frac{\Theta}{n} << 1$

Θ.......povprečna vrednost

$n >> x$

$$P[x;n] \cong \frac{\cancel{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(x-1))}}{x!} \cdot \frac{\Theta^x}{\cancel{n^x}} \cdot \left(1-\frac{\Theta}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\Theta}{n}\right)^x$$

$$P[x;n] \cong \frac{\Theta^x}{x!} \cdot \left(1-\frac{\Theta}{n}\right)^n$$

$$P[x;n] \cong \frac{\Theta^x}{x!} \cdot e^{-\Theta}$$

ker je:

$$\left(1-\frac{\Theta}{n}\right)^{-x} \approx 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\Theta}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\Theta} = e^{-\Theta}$$

7.)Kako v Poissonovo porazdelitev vpeljemo časovno pogojnost ali frekvenco dogodka.

ν_0-frekvenca preizkusa

ν-frekvenca dogodkov

t-čas trajanja

$n = \nu_0 \cdot t$

$\Theta = p \cdot n = p \cdot \nu_0 \cdot t$

$\nu = \nu_0 \cdot t$

$\Theta = \nu \cdot t$

$$P[x;t] = \frac{\Theta^x}{x!} e^{-\Theta}$$

$$P[x;t] = \frac{(\nu \cdot t)^x}{x!} e^{-\nu \cdot t}$$

8.)Kako opišemo naključne lastnosti dvodimenzionalnih naključnih vektorjev?Kako so opredeljene komulativna porazdelitev funkcije, njena gostota in gostota pogojne verjetnosti. Kako je opredeljena robna porazdelitvena funkcija?Kako so opredeljene povprečna vrednost vektorja,korelacija in kovarianca med obema komponentama?

- Lastnosti dvodimenzionalnega vektorja:

1.)$F_{x,y}(+\infty,+\infty) = 1 \quad P[S] = 1$

2.)$F_{y,y}(-\infty,-\infty) = 0 \quad P[S] = 0$

3.)$F_{x,y}(x,+\infty) = P[X \le x, Y \le +\infty] = P[X \le x] = F_x(x)$

$F_{x,y}(+\infty,y) = P[Y \le +\infty, Y \le y] = P[Y \le y] = F_y(y)$

4.)Komulativna porazdelitvena funkcija:

$$F_{xy}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{x,y}(x',y')dx'dy'=P\left[X\le x, Y<y\right]$$

5.)Gostota porazdelitvene verjetnosti

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$ če je F_{xy} odvedljiva

6.)Robni porazdelitvi in njuni gostoti:

$$F_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x} f_{x,y}(x',y')dx'dy'$$

$$F_y(y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x',y')dx'dy'$$

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)dy$$

$$f_y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)dx$$

Komulativna porazdelitvena funkcija:

$$F_{xy}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{x,y}(x',y')dx'dy'=P\left[X\le x, Y\le y\right]$$

Gostota porazdelitvene verjetnosti:

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{xy}(x,y)}{\partial x\partial y}$$

Povezana verjetnost, ki ustreza infinitizemalnem majhnem področju:

$$P\left[x\le X<x+dx, y<Y<y+dy\right]=P\left[x\le X\le x+dx, y\le Y\le y+dy\right]\times P\left[y<Y\le y+dy\right]$$

Pogojna verjetnost, kadar je $f_y(y)\neq 0$

$$P\left[x<X\le x+dx, y<Y\le y+dy\right]=\frac{f_{xy}(x,y)dxdy}{f_y(y)dy}=\frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)}$$

$$\frac{dP\left[x,y\right]}{dx}=\frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)}=f_{x/y}(x/y)$$

Povprečna vrednost:

$$<x>=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\times\frac{N_i}{N}=\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i$$

Korelacija je povprečna vrednost produkta dveh naključnih spremenljivk.Prvi povezani moment imenujemo korelacija in ga definiramo:

$$R_{xy}=m_{1,1}=E\left[x,y\right]=\iint xydP(x,y)$$

Kovarianca:

$$K_{xy} = \operatorname{cov}[x, y] = E\left[(x-m_x)(y-m_y)\right] = \iint (x-m_x)(y-m_y)\,d\,p$$

9.)Kako je zaznamovan test za preverjanje enakosti dveh normalnih pojavov?

V ta namen uporabimo test Kolmogorova, za kar potrebujemo vzorčne porazdelitvene funkcije. Pogosteje kot porazdelitveni funkciji pa sta znani vzorčni povprečji $< x_1 > in < x_2 >$ ter vzorčni varianci S_1^2 in S_2^2.V ta namen hipotezo o enakosti dveh porazdelitvenih funkcijah prevedemo v hipotezo enakosti srednjih vrednosti in standardne deviacije.

$$H(F_1(x) = F_2(x)) \rightarrow H(m_1 = m_2, \sigma_2 = \sigma_1)$$

Preverimo enakosti srednjih vrednosti n najprej preverimo, da je $\sigma_2 = \sigma_1 \rightarrow \sigma$

Za to uporabimo ničelno hipotezo $H_0(m_1=m_2)$

$$H_0(m_1 - m_2 = 0)$$

$$H_0(< x_1 > - < x_2 > = 0)$$

$$\sigma_{<x_1>-<x_2>} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Kot testno statistiko uporabimo standardni odklon:

$z = \dfrac{< x_1 > - < x_2 >}{\sigma < x_1 > - < x_2 >}$ če je podana standardna deviacija.

Če standardna deviacija ni podana jo ocenimo z vzorčno varianco S_1^2 in S_2^2 Variance σ^2 pa ne ocenimo z:

$$\sigma^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_0^2}{(n_1-1)(n_2-1)} = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - < x_1 >)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i} - < x_2 >)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Tako dobimo normalni odklon, ki ima Studentovo porazdelitev n_1+n_2-2 prostostno stopnjo.

$$T = \frac{< x_1 > - < x_2 >}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

2.)Preverimo še varianco:

$H_0(\sigma_1 = \sigma_2) = H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ Kot cenilko variance uporabimo vzorčno varianco S^2.Nato mu na podlagi izračunanih varianc S_1^2 in S_2^2 zavrnemo s tveganjem α hipotezo $H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$

Kot statistiko uporabimo razmerje $F = S_1^2 / S_2^2$

Tej statistiki pripadata dve prostostni stopnji $p_1=n_1-1$, $p_2=n_2-1$

Imenuje se Snedelorjeva porazdelitev ali F porazdelitev.

$$F_{p_1,p_2,\alpha} \leftrightarrow P(F > F_{p_1,p_2,\alpha}) = \alpha_{kritični}$$

10.)Kako sta povezani vhodna in izhodna spremenljivka pri časovno neodvisnem linearnem sistemu?Kako določimo frekvenčno odzivno funkcijo, če poznamo diferencialno enačbo, ki opisuje sistem: $\ddot{y} + ky = x$?

<u>Kako sta povezana vhodna in izhodna spremenljivka pri časovno neodvisnem linearnem sistemu.</u>

$x(t) \to H \to y(t)$
X(t)-naključni proces, vhodni signal
Y(t)-transformiran naključni proces, izhodni signal
H-simbolična oznaka za transformacijo oziroma vpliv sisstema (operator)
Odziv Y(t) linearnega sistema je podan z linearno transformacijo vhoda x(t).

$$y(t) = H[x(t)] = H\left[\int x(t')\delta(t-t')dt'\right]$$

$$= \int x(t')H\delta(t-t')dt' = \int x(t')dg(t,t')$$

$$= \int x(t')h(t,t')dt'$$

Kako določimo odzivno funkcijo, če poznamo diferencialno enačbo, ki opisuje sistem:

$$\ddot{y} + ky = x?$$

$$\ddot{y} + ay = x(t)$$

Najprej določimo frekvenčno odzivno funkcijo H(ω) za harmonski vhod x(t)=$e^{i\omega t}$

$$y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$$

$$H(\omega)(i\omega + a) = 1$$

$$H(\omega) = \frac{1}{i\omega + a}$$

Impulzno odzivno funkcijo h(t) določimo iz
1.)Z inverzno transformacijo:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}d\omega}{i\omega + a}$$

2.)Z direktno integriranjem sistema od vzbujanja δ(t) za +<0 je δ(t)=0

Z integriranjem enačbe:

$$\dot{y} + ay = x(t) = \delta(t)$$

$$\Delta y + \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} aydt = \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \delta(t)dt = 1$$

$$za\ \Delta t \to 0$$

$$\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} aydy \to 0 \leftrightarrow \Delta y = 1 \quad za\ t = 0$$

$$za\ \Delta t > 0$$

$$\dot{y} + ay = x(t) = 0$$

$$ki\ ima\ rešitev\ y(t) = c \times e^{-at}$$

$$začetni\ \ pogoj \quad y(0) = 1\ je\ C = 1$$

$$h(t) = y(t) = 0\ za\ t < 0$$

$$\qquad e^{-at}\ \ za\ t > 0$$

11.)Koherenčna funkcija in njen pomen.
Za analizo vpliva v kolikšni meri je izhodni signal posledica vhodnega signala merimo s koherenčno funkcijo:

$$\gamma_{xy}(\omega) = \frac{\left|S_{xy}(\omega)\right|^2}{S_{xy}(\omega)S_{yy}(\omega)}$$

Kadar sta X in Y linearno odvisna je:

$$\gamma^2{}_{xy}(\omega) = \frac{\left|H(\omega)S_{xy}(\omega)\right|^2}{S_{xx}(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 S_{xx}(\omega)} = 1$$

Za nekorelirana signala je $R_{xy}(t)=0$ posledično $S_{xy}(\omega)=0$ ter zato:

$$\gamma^2{}_{xy}(\omega) = \frac{\left|S_{xy}(\omega)\right|^2}{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)} = 0$$

Vrednosti med 0 in 1 so lahko posledica naslednjih vzorcev.

- Zveza med X in Y ni linearna.
- V meritvah X in Y je prisoten šum.
- Na izhodu Y poleg vhoda X plivajo tudi drugi signali.

12.) ***Kdaj je statistika z cenilka parametra q?***
Kdaj je cenilka dosledna in kdaj pristranska?
Kako je definirano vzorčno povprečje naključne spremenljivke in kolikšna je njegova pričakovana vrednost ter varianca?
Kako uporabimo neenačbo Čebiševa pri opisu lastnosti cenilke vzorčnega povprečja naključne spremenljivke?

*Statistika z je točkovna cenilka parametra q, če je pri naraščajoči razsežnosti vzorca njena vrednost z verjetnostjo blizu 1, enaka vrednosti parametra q:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|z-q\right| < C\right] = 1$$

ki mora biti izpolnjena za določeno vrednost pozitivne konstante C.

* Kdaj je statistika dosledna in kdaj nepristranska cenilka?

1.) doslednost

Cenilka $z = z(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ je dosledna, če je za poljubno majhno pozitivno število ε izpolnjen pogoj:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|z-q\right| < \varepsilon\right] = 1$$

2.)nepristranskost

Cenilka $z = z(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ je nepristranska, če je njeno statistično povprečje enako vrednosti parametra, ki ga ocenjuje: $E[z] = q$

Cenilka je asimptotsko nepristranska, če je izpolnjena enačba: $\lim_{n\to\infty} E[z] = q$

*Kako je definirano vzorčno povprečje naključne spremenljivke in kolikšna je pričakovana vrednost ter varianca?

$$E\left[<x>\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[x_i\right]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i$$

$$E\left[x\right]=m$$

$$Var\left(<x>\right)=\frac{Var(x)}{n}=\frac{Gx^2}{n}=G^2{}_{<x>}\Rightarrow G<x>=\frac{Gx}{\sqrt{n}}$$

*Kako uporabimo neenačbo Čebiševa pri opisu lastnosti cenilke vzorčnega povprečja naključne spremenljivke?

$E\left[X\right]$ je končna, $E\left[X^2\right]$je končna; $Var\left[X\right]<\infty$

*

$$A=\left\{\left|x-m_A\right|\geq\varepsilon\right\}$$

$$=\left\{\left|x-m_A\right|^2\geq\varepsilon^2\right\}$$

$$Var(x)=\int(x-m_A)^2dP(x)$$

$$\int_A(x-m_A)^2dP(x)+\int_{AC}(x-m_A)^2dP(x)$$

$$Var(x)>\int_A(x-m_A)^2dP(x)>\varepsilon^2\times\int_A dP(x)=\varepsilon^2P\left[A\right]$$

Neenačba Čebiševa je torej: $P\left[\left|x-m_x\right|>\varepsilon\right]\leq\frac{Var(x)}{\varepsilon^2}$

S pomčjo te neenačbe lahko hitro dokažemo, da je vzorčno povprečje dosledna in nepristranska cenilka srednje vrednosti m:

$$P\left[\left|<x>-m\right|\geq\varepsilon\right]\leq\frac{Gx^2}{n\varepsilon}$$

$$\lim P\left[\left|<x>=m\right|\right]=1$$

13.)Pojasni, kdaj je naključni proces stacionaren v ožjem in kdaj v širšem smislu? Kako sta definirani avtokorelacijska funkcija in spektralna gostota stacionarnega naključnega prcesa?

Proces $\left\{X(t),t\in T\right\}$ je stacionaren, če so vse porazdelitve povezanih verjetnosti invariantne na premik parametra t. Za poljuben premik velja:

$$P\left[X(t_1)\leq x_1,X(t_2)\leq x_2....\right]=P\left[X(t_1+t_0)\leq x_1,X(t_2+t_0)\leq x_2,...\right]$$

-Proces je stacionaren v ožjem smislu, kadar je porazdelitev povezane verjetnosti lahko odvisna le od razlike parametrov pri katerih spremenljivko opazujemo ni pa odvisna od vrednosti t1.

-Stacionarna v širšem smislu pomeni, da je povprečna vrednost procesa neodvisna od parametra t, korelacija procesa pa le od razlike parametrov t2-t1. Med njimi so lahko tudi procesi, ki niso stacionarni v ožjem pomenu definicije stacionarnosti.

$P[X(t_1) \le x_1] = P[X(t_1+t_0) \le x_1] = P[X(0) \le x_1]; t_0 = -t_1$

$P[X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2] = P[X(t_1+t_0) \le x_1, X(t_2+t_0) \le x_2]$

$P[X(0) \le x_1; X(t_2+t_1) \le x_2]$

$E[X(t)] = \int x dP(x,t) = m_x$

$E[X(t_1), x(t_2)] = \iint x_1 x_2 dP(x_1, x_2; t_1, t_2)$

$= \iint x_1 x_2 dP(x_1, x_2, t_2 - t_1)$

$= R(t_2 - t_1)$

$= R(t_1 - t_2)$

Če je $\{ mx = konst \, in \, R(t_1 - t_2) \}$ je proces stacionaren v širšem pomenu.

-Proces je ergodičen , če je $P\left[\bar{f} = E[f] \right] = 1$

14.)Kako sta definirani avtokorelacijska funkcija in spektralna gostota stacionarnega naključnega procesa?

Spektralna gostota je definirana $Syy(t) = |H(\omega)|^2 \, Sxx(\omega)$

Z inverzno transformacijo doimo $Rxx(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Sxx(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

Za t = 0 je avtokorelacijska funkcija enaka drugemu momentu procesa $\{x(t)\}$,ki predstavlja moč signala $\{x(t)\}$?

15.)*Kaj veste o analizi variance? Izpeljite ustrezne formule in podajte primer uporabe analize variance v strojništvu.*

Z analizo variance ugotavljamo ali med pojavi obstaja kakšna povezanost. Primer: Ali nočna izmena delavcev naredi več napak kot podnevi. Ali kajenje vpliva na pljučna obolenja? Podatke tabeliramo:

*

$H_0 : \mu_A = \mu_B = ... \mu_E$

$H_1 : \mu_i \ne \mu_j \quad za \; vsaj \; en \; par(i, j)$

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{ni} x_{ij}}{N} \quad N = \sum_{j=1}^{a} nj$

$\sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{ni} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = \sum_{i=1}^{ni} \sum_{j=1}^{a} ((x_{ij} - \bar{x}_j) + (\bar{x}_j - x))^2$

$= \sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{Aj} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + 2 \sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{ni} (x_{ij} - \bar{x}_j)(\bar{x}_j - \bar{x}) + \sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{ni} (\bar{x}_j - \bar{x}_?)$

$= \sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{ni} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + \sum_{j=1}^{a} n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$

$= q_2 + q_1$

q_2 ...variabilnost zaradi eksperimenta

q_1 ... variabilnost zaradi parametra (faktorja)

$$\sum_{j=1}^{a}\sum_{i=1}^{ni}(x_{ij}-\bar{x}_j)(\bar{x}_j \times \bar{x}) = \sum_{j=1}^{ni}(\bar{x}_j - \bar{x})\sum(x_{ij}-\bar{x}_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-n_j\bar{x}_j)$$

$$= n_j\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-n_j\bar{x}_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} n_j \times \bar{x}_j - n_j x_j)$$

$$\sum_{j=1}^{a}\sum_{i=1}^{ni}(x_{ij}-\bar{x}_j)(\bar{x}_j-\bar{x}) = 0$$

$$S_1^2 = \frac{q_1}{a-1} \quad S_2^? = \frac{q_2}{N-a} \quad F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$F > F_{\alpha,a-1,N-2} \Rightarrow$ v tem primeru zavrnemo H_0

Vir varjebilnosti	vsota kvadratov	Št. Produktov	Povprečni kvadrat odstopanja	Statistika F
Faktor	Q_1	a-1	Q_1/(a-1)	Q_1(U-a)
Eksperiment	Q_2	N-a	Q_2/(N-a)	Q_2 (a-1)
vsota	Q	N-1		

16.)Kaj veste o cenilkah funkcij?

Funkcija $Yc = g(x)$ običajno imenujemo cenilka funkcije ali prediktor medsebojne odvisnosti naključne spremenljivke X in Y, ustrezen graf pa regresijska krivulja.

<u>*Kdaj je cenilka optimalna?</u>
.r = korelacijski element
$|r| = 1$ je cenilka optimalna

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{Gx \times Gy}$$

<u>*Kdaj je cenilka parametrična in zakaj ne?</u>

$$Yc = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\omega(x-x_i,G)}{\sum_{j=1}^{n}\omega(x-x_j,G)}$$ neparametričnost regresije

$$\omega(x-x_i,G)$$

*<u>*Izpeljava izraza za regresijsko premico</u>*

$$Yc = a \cdot x + b$$
$$E\left[(Y - Yc)^2\right] \to \min$$
$$E\left[(Y - a \cdot X - b)^2\right] \to \min$$
$$\frac{\partial E\left[(Y - a \cdot X - b)^2\right]}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial E\left[(Y - a \cdot X - b)^2\right]}{\partial b} = 0$$
$$-2E\left[X(y - a \cdot x - b)\right] = 0 \qquad -2E\left[(y - a \cdot x - b)^2\right] = 0$$
$$E[XY] - aE[X] - bE[X] = 0$$
$$E[Y] - a \cdot E[X] - b = 0 \Rightarrow b = E[Y] - aE[X]$$
$$E[XY] - aE\left[X^2\right] - E[X]E[Y] + aE[X]^2 = 0$$
$$a = \left(E[X]^2 - E[X]^2\right) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$
$$a \cdot Var(X) = Cov(X, Y)$$
$$a = \frac{Cov(X, Y)}{Var(x)}$$

$$Y_C = a \cdot X + b$$
$$Y_C = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)} \cdot X + E[Y] - \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)} E[X]$$

Torej je $\frac{Y_C - E[Y]}{Gx} = \frac{Cov(X, Y)}{GxGy} \times \frac{X - E[X]}{Gx}$

$$r = \frac{Cov(X, Y)}{GxGy}$$

.r =korelacijski element

$|r| \cong 1$ odstopanje med x in y –deterministična zveza

17.)Kaj je potreben pogoj za kaotičen sistem in kaj je osnvna lastnost kaotičnega sistema?

Nelinearnost sistema je potreben pogoj, da je sistem kaotičen.
Lastnosti kaotičnega sistema:
Dinamiko n dimenzionalnega kaotičnega sistema opišemo s sistemom n avtonomnih diferencialnih enačb prvega reda, ki mu pravimo dinamski sistem:

$$\dot{x} = F(x, p)$$

Kjer je
xi....prostora stanj (fazna spremenljivka)

$p = (p_1, p_2, \dots p_n)$ parametri sistema

$x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ vektor stanj