OPIS NAKLJ. POJAVOV

LISTA B

1. KOLOKVIJ IZ OPISA NAKLJUČNIH POJAVOV 20.11.1997

1. Dolžina zvara, ki ga lahko naredimo z eno elektrodo, je normalno porazdeljena s povprečjem 1 m in standardno deviacijo 15 cm. Kolikšna je verjetnost, da bomo lahko s tremi elektrodami naredili vsaj 3.5 m dolg zvar?

2. Tekmovanja so se udeležili predstavniki treh klubov. Med predstavniki kluba A je 10 % moških, med predstavniki kluba B je 70 % žensk in med predstavniki kluba C je 50 % moških. 40 % vseh udeležencev je iz kluba A ter 40 % iz kluba B. Izmed udeležencev tekmovanja naključno izberemo eno osebo. Kolikšna je verjetnost, da je izbrana oseba član kluba B, če je moški?

3. Močan veter onemogoča vožnjo na Kanin z vzpenjačo v povprečju 4 dni na mesec. Mesec naj ima 28 dni.
   (a) Kolikšna je verjetnost, da bo veter v enem tednu vsaj en dan onemogočal obratovanje vzpenjače?
   (b) V nekem tednu je veter kar v treh dneh onemogočal vožnjo z vzpenjačo. Kolikšna je verjetnost, da se v enem mesecu pojavijo trije takšni tedni?

4. Organiziramo mednarodno konferenco. Povabili smo 1000 ljudi. Verjetnost, da se bo povabljeni konference udeležil, je 0.6. Koliko ležišč je potrebno rezervirati, da jih bo z verjetnostjo vsaj 0.95 dovolj za vse udeležence konference?

IZPIT IZ OPISA NAKLJUČNIH POJAVOV

25.5.1999

1. Kako opišemo povezano in pogojno vrejetnost? Kaj opisuje Bayesov teorem in kako ga lahko uporabimo v strojništvu? Kdaj sta dva dogodka statistično nepovezana in kdaj neodvisna? Kako je opredeljen pojem statistično neodvisnih poizkusov?

2. Kako je definirano statistično povprečje funkcije $g(x)$? Kako so definirani momenti in centralni porazdelitve? Kaj je srednja vrednost in varianca? Kako sta definirani korelacija in kovarianca? Določi kovarianco za naključni komponenti vektorja $z(x, y)$, ki ima porazdelitev verjetnosti opisano z: $f_{XY}(x, y) = A\,exp(-(x^2 + y^2))$, kjer je A konstanta. Koliko je A?

3. Kaj veste o teoriji cenilk? Opišite metodo maksimalne zanesljivosti in izpeljite z njo izraz za cenilko srednje vrednosti in standardne deviacije normalne porazdelitve. .

4. Izpeljite izraz za križnokorelacijsko funkcijo med vhodom in izhodom iz linearnega sistema. Kakšen izraz dobimo, če vzbuja sistem beli šum.

LISTA B

IZPIT IZ OPISA NAKLJUČNIH POJAVOV

26.1.1999

1. Kako sta definirani porazdelitvena funkcija verjetnosti in njena gostota za zvezni in diskretni primer? Kako določimo gostoto porazdelitve verjetnosti f_Z vsote dveh naključnih spremenljivk $Z = X + Y$, če sta poznani gostoti sumandov f_X in f_Y? H kakšni funkciji konvergira gostota vsote z naraščanjem števila naključnih sumandov?

2. Kako sta povezani vhodna in izhodna spremenljivka pri linearnem sistemu. Kako določimo frekvenčno odzivno funkcijo če poznamo diferencialno enačbo, ki opisuje sistem? Kako sta povezani srednji vrednosti vhodnega in izhodnega naključnega signala pri linearnem sistemu, ki ga opisuje enačba $y' + c\,y = x$?

3. Kaj veste o teoriji cenilk? Izpeljite z metodo momentov izraz za paremeter a v eksponentni gostoti porazdelitve verjemosti: $f(x) = \{a e^{-ax}$ za $x \geq 0;\ 0$ za $x < 0\}$

4. Opišite analizo variance in izpelji ustrezne formule.

---

1. Kolokvij iz Opisa naključnih pojavov 07.12.1998

1. V tovarni kozmetičnih sredstev so ugotovili, da sta masi škatlic in pokrovčkov za izbrano kremo normalno porazdeljeni in sicer masa škatlic s povprečjem 20 g in standardno deviacijo 2 g ter masa pokrovčkov s povprečjem 10 g in standardno deviacijo 1 g. V vsako škatlico natočijo vedno natanko 100 g kreme. Kolikšna je verjetnost, da masa naključno izbrane zaprte škatlice s kremo presega 125 g?

2. Med ljudmi, izbranimi za potrebe ankete za raziskavo trga je 20% otrok, 60% zaposlenih in 20% upokojencev. 80% izbranih otrok je ocenjevani artikel všeč, podobnega mnenja je še 60% zaposlenih ter 40% upokojencev. Naključno izberemo anketiranca, da bi ga obdarili.
   (a) Kolikšna je verjetnost, da bomo izbrali otroka?
   (b) Če izberemo anketiranca, ki mu artikel ni všeč, kolikšna je verjetnost, da gre za upokojenca?

3. V Sloveniji vsak dvajseti državljan zna tekoče govoriti francosko. Koliko ljudi moramo ustaviti, da bo z verjetnostjo vsaj 0.95 med njimi vsaj eden znal tekoče govoriti francosko?

4. Število napak na m^2 papirja je Poisson-ovo porazdeljeno s povprečjem $0.2/m^2$.
   (a) Kolikšna je verjetnost, da na $10\,m^2$ papirja ne bo več kot štirih napak?
   (b) Kupimo deset bal s po $5\,m^2$ papirja. Kolikšna je verjetnost, da sta med njimi največ dve taki, ki imata več kot dve napaki?

Opomba: Pri rešitvah je obvezen odgovor s celim stavkom. Vsak manjkajoči odgovor pomeni izgubo 1/4 točke.

IZPIT IZ OPISA NAKLJUČNIH POJAVOV

13.5.1997

A

1. Zapišite aksiome verjetnosti. Izpeljite binomsko porazdelitev in pokažite kako pridemo iz nje do Pissonove porazdelitve.

2. Kako sta povezani vhodna in izhodna spremenljivka pri linearnem sistemu. Kako sta povezani srednji vrednosti in spektralni gostoti vhodnega in izhodnega signala pri linearnem sistemu, ki ga opisuje enačba $y'' + y' = x$, če je vhodni signal šum s spektralno gostoto:

$S_{xx}(\omega) = \exp(-\omega^2)$. Skiciraj $S_{yy}(\omega)$.

3. Izpeljite z metodo mksimalne zanesljivosti izraza za parametra m in σ v normalni porazdelitvi.

4. Opišite kako s χ^2 testom preverimo naključno neodvisnost dveh vplivov

LISTA B

3.IZPIT IZ OPISA NAKLJUČNIH POJAVOV 13.05.1997

1. Za izdelavo nekega kosa lahko uporabimo dve različni zlitini. Zato da bi izmerili njuni natezni trdnosti (R_m) z nateznim preizkusom, iz zlitine A izdelamo 10 epruvet in iz zlitine B 12 epruvet. S preizkusom ugotovimo, da znaša povprečna natezna trdnost epruvet iz zlitine A 200 N/mm^2 pri deviaciji 20 N/mm^2, medtem ko znaša povprečna natezna trdnost epruvet iz zlitine B 300 N/mm^2 pri deviaciji 25 N/mm^2. Ali lahko trdimo, da ima zlitina B vsaj za 40 N/mm^2 večjo natezno trdnost kot zlitina A?

2. Delavec streže trem strojem hkrati. Verjetnost, da v eni uri delovanja delavcu ni treba posredovati pri stroju A, je 0.9. Za stroja B in C je ta verjetnost 0.8 in 0.85. Stroji delujejo neodvisno drug od drugega.

   a: Kolikšna je verjetnost, da delavcu v neki uri ni potrebno posredovati pri nobenem stroju?

   b: Kolikšna je verjetnost, da delavcu v neki uri ni potrebno posredovati pri vsaj enem stroju?

3. Nekaj mesecev smo opazovali obiskanost izbrane kinodvorane. Povprečno število obiskovalcev glede na dan v tednu je podano v tabeli.

dan	PO	TO	SR	ČE	PE	SO	NE
št. obisk.	300	340	290	400	460	500	370

   Ali je obiskanost izbrane kinodvorane med tednom enakomerno porazdeljena?

4. Ugotovljeno je, da sta v diplomskih nalogah FS v povprečju po dve slovnični napaki na tiskano A4 stran. Predpostavimo Poisson-ovo porazdelitev slovničnih napak. Naključno izberemo 20 strani izmed več naključnih izbranih diplomskih nalog. Kolikšna je verjetnost, da je med izbranimi stranmi 5 takih, na katerih je točno ena slovnična napaka?

20 13 13 17 18

1 2 3 4 5

Vprašanja iz izpitnih pol, iz teorije, od profesorja Igorja Grabca: Verjetnost in statistika, za izpit iz opisa naključnih pojavov – *ONP*, ki je bil predavan na Fakulteti za strojništvo leta 1999/2000. Odgovore pripravil Marjan Grah (za morebitne napake je kriv *tiskarski škrat*). Avtor (Marjan Grah) ne odgovarja za morebitne napake v odgovorih in vprašanjih. *Če opazite morebiti kakšne napake, ali imate le pripombe jih prosim pošljite na :*

Marjan.Grah@mailcity.com

Podana so vprašanja in takoj nato odgovori. Vseh vprašanj je 55

1. *Zapiši aksiome, s katerimi vpeljemo verjetnostni prostor ?*

   1. aksiom: Pri danem poskusu obstaja vzorčni prostor S, ki označuje množico možnih izidov poskusa, in skupina Σ podmnožic A iz S, ki označujejo dogodke.
   2. aksiom: Vsakemu dogodku iz kolekcije Σ lahko pripišemo pozitivno število $P[A] \geq 0$, ki ga imenujemo verjetnost dogodka A.
   3. aksiom: Za vsak pripis verjetnosti mora veljati $P[S]=1$ ali verjetnost gotovega dogodka je 1.
   4. aksiom: Kadar sta dogodka A in B nepovezana in je $A \cap B = 0$, mora predpis verjetnosti zadoščati pogoju: $P[A \cap B] = P[A] + P[B]$
   5. aksiom: Kadar so dogodki A_1, A_2, A_3 ..... medsebojno nepovezani in je $A_i \cap A_j = 0$ za $i \neq j$, tedaj mora predpis verjetnosti zadoščati pogoju:

   $$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = P[A_1] + P[A_2] + P[A_3] + \ldots.. = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$$

2. *Kako sta definirana pogojna verjetnost in Bayesov teorem ?*

   i) Pogojna verjetnost dogodka B, pri pogoju A, da se zgodi dogodek A je:

   $$P[B|A] = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}; \qquad P(A) \neq 0$$

   ii) Bayesov teorem:

   $$P[A_i|B] = \frac{P[B|A_i] \cdot P[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[B|A_j] \cdot P[A_j]}$$

   Za neodvisna dogodka A in B:

   $$P[A|B] = \frac{P[B|A] \cdot P[A]}{P[B]}$$

3. *Pojasni kdaj sta dogodka statično neodvisna ?*

   Kadar je verjetnost dogodka A neodvisna od pogoja B, je tudi verjetnost dogodka B neodvisna od pogoja A. V tem primeru pravimo, da dogodek A na B ne vpliva in obratno, ali oba dogodka sta v naključnem pomenu neodvisna torej: $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$ Kar pomeni, da je verjetnost statistično neodvisnih dogodkov enaka produktu verjetnosti posameznih dogodkov.

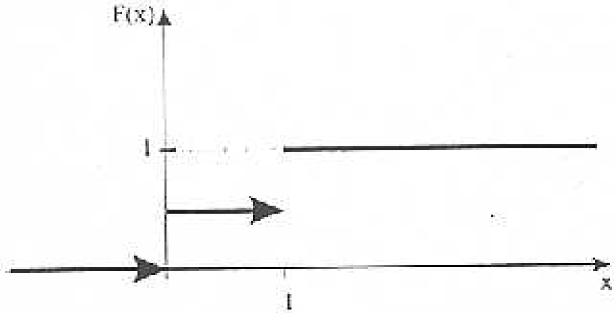
Enačba $F(x) = P[X \leq x]$ nam prikazuje verjetnost, da zavzame spremenljivka X vrednost manjšo od neke vrednosti.

b) Gostota porazdelitvene funkcije

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P[x < X \leq x + \Delta x]}{\Delta x}$$

$$f(x) = \frac{dP}{dx}$$

ii) Diskretna naključna spremenljivka



a) Kumulativna ali zbirna porazdelitvena funkcija

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot U(x - x_i)$$

b) Gostota porazdelitvene funkcije

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{dU(x - x_i)}{dx}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x) - U(x)}{\Delta x}$$

$$= \begin{cases} 0 & \Delta x > 0 \\ \infty & \Delta x < 0 \end{cases}$$

ker odvod ne eksistira, uvedemo integral

6. *Katere lastnosti kumulativne porazdelitvene funkcije poznaš ?*

i) $F_x = P[X \le +\infty] = 1$

ii) $F_x = P[X \le -\infty] = 0$

iii)

$(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$

vsota verjetnosti

$P[x \in (-\infty, b]] = P[X \in (-\infty, a]] + P[X \in (a, b]]$

$F_x(b) = F_x(a) + P[X \in (a, b]]$

verjetnost je pozitivna ali kvečjemu enaka nič, zato

$F_x(b) \ge F_x(a)$ za $b \ge a$

iv) gostota porazdelitve:

$$F_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx = 1$$

v)

$F_x(a) = F_x(a+0)$

oziroma

$\lim_{\varepsilon \to +0} F_x(a+\varepsilon) = F_x(a)$

$F_x(a) = F_x(a-0) + P[X = a]$

v primeru, ko je $P[X = a] = 0$:

$\lim_{\varepsilon \to +0} F_x(a-\varepsilon) = F_x(a)$

7. *Definiraj kumulativno porazdelitveno funkcijo in njeno gostoto ?*

Glej vprašanje 5.

8. *Za kakšne spremenljivke uporabljamo in kako izpeljemo Binomsko porazdelitev ?*

Binomsko porazdelitev uporabljamo pri poizkusih, kjer sta možna le dva različna izida poskusa, tipičen primer je met kovanca.
Izpeljava:

n .... število poskusov
x .... število ugodnih izidov
P[A] = p
P[B] = q

$$P[S] = P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

$$p + q = 1 \Rightarrow q = 1 - p$$

Verjetnost, da se pojavi dogodek A x-krat v n poskusih je enaka: $p^x \cdot q^{n-x}$.
Število vseh možnih dogodkov, kjer se A pojavi x – krat je enako številu različnih razporeditev n elementov na n mest, pri čemer je x elementov enakih A in n-x enakih B.

$$n = v_0 \cdot t$$

$$\Theta = p \cdot n = p \cdot v_0 \cdot t \qquad v = v_0 \cdot t$$

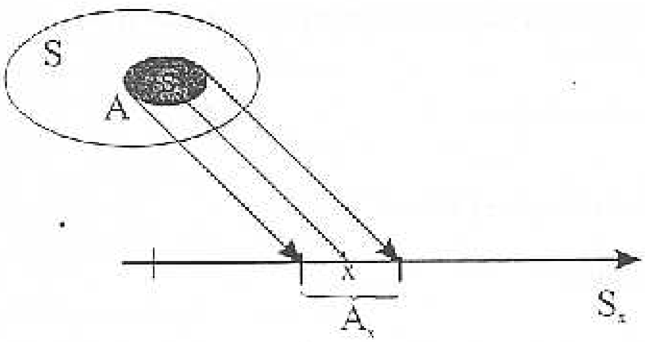
$$\Theta = v \cdot t$$

$$P[x;t] = \frac{\Theta^x}{x!} \cdot e^{-\Theta}$$

$$P[x;t] = \frac{(v \cdot t)^x}{x!} \cdot e^{-v \cdot t}$$

11. Kaj je naključna spremenljivka ?

Kadar je funkcija X definirana na vzorčnem prostoru S tako, da je verjetnost dogodka A_S določena za vsak dogodek A_X, ki si ga izberemo v razponu S_X pravimo, da je X merljiva funkcija na S in jo imenujemo naključna spremenljivka. Naključna spremenljivka je dejansko funkcija dogodka iz vzorčnega prostora S in ne neodvisna spremenljivka.



$$A \xrightarrow{X} A_X$$

$$P[A] \xrightarrow{X} P[A_X]$$

12. Kako opišemo naključne lastnosti dvodimenzionalnih vektorjev ?

i) $F_{X,Y}(+\infty,+\infty) = 1 \Rightarrow P[S] = 1$

ii) $F_{X,Y}(-\infty,-\infty) = 0 \Rightarrow P[0] = 0$

iii)

$$F_{X,Y}(x,+\infty) = P[X \le x, Y \le +\infty] = P[X \le x] = F_X(x)$$

$$F_{X,Y}(+\infty, y) = P[X \le +\infty, Y \le y] = P[Y \le y] = F_Y(y)$$

iv) Kumulativna porazdelitvena funkcija za dvodimenzionalni primer:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x',y')dx'dy' = P[X \le x, Y \le y]$$

15. Kako je definirana gostota porazdelitve verjetnosti za dvodimenzionalen primer ?

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x',y')dx'dy'$$

S tem integralom je samo implicitno definirana gostota porazdelitve povezane verjetnosti. V primeru, ko je porazdelitvena funkcija odvedljiva, pa jo lahko eksplicitno izrazimo z:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

16. Kako izrazimo gostoto, če sta komponenti naključno neodvisni ?

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$f_{X|Y}(x) = \frac{f_X(x) \cdot f_Y(y)}{f_Y(x,y)}$$

$$f_{X|Y}(x) = f_X(x)$$

17. Pojasni kako določimo gostoto porazdelitve produkta dveh naključnih spremenljivk $Z = X \cdot Y$, če poznamo gostoto verjetnosti $f_{xy}(x,y)$?

X, Y .... sta odvisni

$$F_Z(z) = P_0(Z < z)$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{0}\int_{\frac{z}{x}}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$F_Z(z) = -\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{-\frac{z}{x}} f_{XY}(x,-y)dx(-dy) + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$Z = X \cdot Y$$
$$dZ = x \cdot dy$$
$$\frac{dz}{x} = dy$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{-\frac{z}{x}} f_{XY}(x,-y)dxdy + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{0}^{\infty} f_{XY}\left(x,\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x} - \int_{-\infty}^{0} f_{XY}\left(x,\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x}$$

za neodvisni X in Y

$$f_Z(z) = \int_{0}^{\infty} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x} - \int_{-\infty}^{0} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x}$$

ii) korelacija
Korelacija je povprečna vrednost produkta dveh naključnih spremenljivk. Prvi povezani moment imenujemo korelacija in ga definiramo:

$$R_{xy} = m_{1,1} = E[XY] = \iint xy dP(x, y)$$

21. Kako je definirana kovarianca ?

Kovarianca je prvi centralni moment, definirana z izrazom

$$K_{xy} = \operatorname{cov}[X,Y] = E[(X - m_x)\cdot(Y - m_y)] = \iint (x - m_x)\cdot(y - m_y) dP$$

22. Definicija statističnih povprečij ?

Statistično povprečje spremenljivke X dobimo, če v enačbi

$$<x> = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{N_i}{N}$$

zamenjamo relativno frekvenco N_i / N z ustrezno verjetnostjo dobimo statistično povprečje:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_i$$

23. Spremenljivka X je normalno porazdeljena s srednjo vrednostjo m in standardno deviacijo σ. Določi drugi moment funkcije $y = (x - m)^2$!

$$E[X^2] = \int x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$E[Y^2] = \int y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$E[((x - m)^2)^2] = \int (x - m)^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

24. Kaj je naključni proces in kako ga statistično okarakteriziramo ?

- naključni proces imenujemo tak pojav, pri katerem potrebujemo neskončno komponent za opis izida poskusa. Naključni proces je neskončna dimenzionalna spremenljivka (to kar je podčrtano moraš vedeti, ker tak odgovor zahteva Grabec)
- diskreten naključni proces je proces, katerega komponente lahko označimo s naravnimi števili (met kocke, met kovanca)
- zvezen naključni proces opisuje neka funkcija, ki je samo vzorec zveznega naključnega procesa in podaja odvisnost spremenljivk X od nekega parametra (čas, koordinate)
- diskreten naključni proces opišemo z neskončno – dimenzionalnim vektorjem oz. zaporedjem. Tako splošno obravnavamo spremenljivko kot funkcijo indeksa in abstraktnega dogodka »s« : X=X(i,s)

ii) Proces je stacionaren v ožjem smislu, kadar je porazdelitev povezane verjetnosti lahko odvisna le od razlike parametrov, pri katerih spremenljivko opazujemo, ni pa odvisna od vrednosti t_i

iii) Stacionarnost v širšem smislu pomeni, da je povprečna vrednost procesa neodvisna od parametra t, korelacija procesa pa le od razlike parametrov $t_2 - t_1$. Med njimi so lahko tudi procesi, ki niso stacionarni v ožjem pomenu definicije stacionarnosti

$$P[X(t_1) \le x_1] = P[X(t_1 + t_0) \le x_1] = P[X(0) \le x_1]; \qquad t_0 = -t_1$$
$$P[X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2] = P[X(t_1 + t_0) \le x_1, X(t_2 + t_0) \le x_2]$$
$$= P[X(0) \le x_1, X(t_2 - t_1) \le x_2]$$

$$E[X(t)] = \int x dP(x,t) = m_x = konst.$$
$$E[X(t_1), X(t_2)] = \iint x_1 x_2 dP(x_1, x_2; t_1, t_2)$$
$$= \iint x_1 x_2 dP(x_1, x_2; t_2 - t_1)$$
$$= R(t_2 - t_1)$$
$$= R(t_1 - t_2)$$

če je $\{m_x = \text{konst. in } R(t_1 - t_2)\}$ je proces stacionaren v širšem pomenu

iv) Proces je ergodičen, če je

$$P[\overline{f} = E[f]] = 1$$

37. Kako sta definirani srednja vrednost in korelacijska funkcija procesa in kakšni sta njuni lastnosti za stacionaren proces ?

i) srednja vrednost

$$E[X(t_1), X(t_2)] = \iint x_1 x_2 dP(x_1, x_2; t_1, t_2)$$
$$= \iint x_1 x_2 dP(x_1, x_2; t_2 - t_1)$$
$$= R(t_2 - t_1)$$
$$= R(t_1 - t_2)$$

ii) korelacijska funkcija

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1), X(t_2)]$$
$$= \iint x_1 x_2 dP(x_1, x_2; t_1, t_2)$$
$$= \iint x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

iii) lastnosti

a) $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(0, t_2 - t_1)$
b) $R_{xx}(t) = R_{xx}(-t)$
c) $R_{xx}(0) \ge R_{xx}(t)$

31. Definicija korelacijske funkcije in spektralne gostote signala !

i) Korelacijska funkcija

Korelacija funkcije signala pomeni moč signala X(t)

$$R_{yy}(t) = \iint R_{xx}(t - t_1 - t_2)h(t_2)dt_1 dt_2$$

ii) spektralna gostota procesa {X(t)}

Spektralna gostota pomeni gostoto moči, ki jo komponente s krožno frekvenco v intervalu dω okoli ω prispevajo k skupni moči signala.

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

32. Kako sta povezani spektralni gostoti vhodnega in izhodnega signala

$$R_{YY}(t) = \iint R_{XX}(t - t_1 + t_2) \cdot h(t_1) \cdot h(t_2) dt_1 dt_2$$
$$= \iiiint R_{XX}(t - t_1 + t_2) \cdot \frac{H(\omega_1)}{2 \cdot \pi} \cdot e^{i\omega_1 t_1} \cdot \frac{H(\omega_2)}{2 \cdot \pi} \cdot e^{i\omega_2 t_2} dt dt_2 dH d\omega_2$$
$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \iint S_{XX}(\omega_2) \cdot H(\omega_1) \cdot H(\omega_2) \cdot e^{-i\omega_2 t} \cdot \delta(\omega_1 + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2$$

$\omega_1 = -\omega_2 = \omega$ ker je drugače nič uvedemo še Dirichtejelevo funkcijo δ.

$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int S_{XX}(\omega) \cdot H(-\omega) \cdot H(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \qquad H(-\omega) \cdot H(\omega) = |H(\omega)|^2$$
$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int S_{XX}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \cdot e^{-i\omega t} d\omega$$
$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int S_{YY}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$
$$S_{YY} = |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega)$$

V drugi vrstici sem razrešil dvojni integral, zato nam od štirih integralov ostaneta še dva.

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \iint R_{XX}(t - t_1 + t_2) \cdot e^{i\omega_1 t_1} \cdot e^{i\omega_2 t_2} dt_1 dt_2 \qquad \tau = t - t_1 - t_2 \Rightarrow d\tau = dt_2$$
$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \iint R_{XX}(\tau) \cdot e^{i\omega_2(\tau + t_1 - t)} dt_1 d\tau$$
$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot e^{i\omega_2 t} \iint R_{XX}(\tau) \cdot e^{i\omega_2 \tau} d\tau \cdot e^{i(\omega_1 + \omega_2)t_1} dt_1$$
$$= e^{-i\omega_2 t} \cdot \delta(\omega_1 + \omega_2) \int R_{XX}(\tau) \cdot e^{i\omega_2 \tau} d\tau \qquad S_{XX}(\omega_2) = \int R_{XX}(\tau) \cdot e^{i\omega_2 \tau} d\tau$$
$$= e^{-i\omega_2 t} \cdot \delta(\omega_1 + \omega_2) \cdot S_{XX}(\omega_2) \qquad S_{XX}(\omega_2) \ldots \text{ spektralna gostota}$$

$$x(t) \equiv \sum_i x(t_i) \cdot I(t - t_i)\Delta t = \tilde{x}_{\Delta t}$$

$$x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \tilde{x}_{\Delta t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \cdot \delta(t - t')dt'$$

$$t - t' = t''$$

$$dt' = -dt''$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t'')\delta(t'')dt''$$

$$y(t) = H(x(t))$$

$$= H\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \cdot \delta(t - t')dt'\right)$$

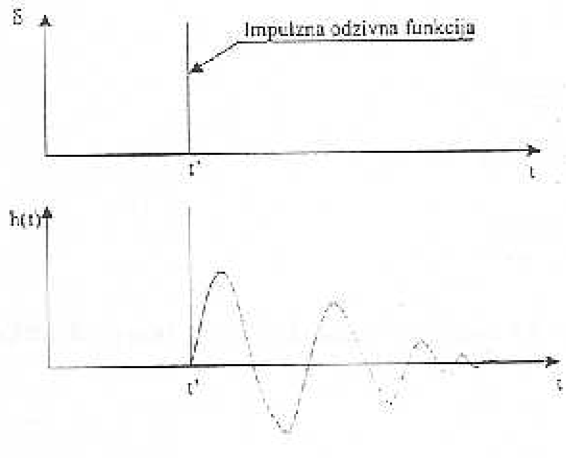
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \cdot H(\delta(t - t'))dt'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \cdot h(t - t')dt' \quad \text{konvolucijski integral}$$

$$t - t' = t''$$

$$dt' = -dt''$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t'') \cdot h(t'')dt'$$



34. Kakšen je fizikalni pomen spektralne gostote ?

Spektralna gostota pomeni gostoto moči, ki jo komponente s krožno frekvenco v intervalu dω okoli ω prispevajo k skupni moči signala.

38. Dokaži, da je vzorčno povprečje dosledna in nepristranska cenilka vrednosti m

$$E[<x>] = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} m_i$$
$$E[<x>] = m$$
$$Var(<x>) = \frac{Var(x)}{n} = \frac{\sigma_x^2}{n} = \sigma_{<x>}^2 \Rightarrow \sigma_{<x>} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Iz neenačbe Čebiševa dobimo:

$$P\left[\left|<x> - m\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\sigma_x^2}{n\cdot\varepsilon^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|<x> = m\right|\right] = 1$$

Iz tega je izhaja, da je vzorčno povprečje nepristranska in dosledna cenilka statističnega povprečja m.

39. Kolikšna sta srednja vrednost in standardna deviacija vzorčnega povprečja ?

i) srednja vrednost

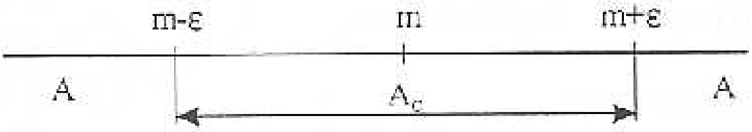
$$E[<x>] = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} m_i$$
$$E[<x>] = m$$

ii) standardna deviacija

$$\sigma_{<X>} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

40. Kaj veš o neenačbi Čebiševa in kako jo uporabiš pri opisu lastnosti vzorčnega povprečja?

$E[X]$ je končna; $E[X^2]$ je končna; $Var[X] < \infty$



$$A = \left\{\left|x - m_A\right| \geq \varepsilon\right\}$$
$$= \left\{(x - m_A)^2 \geq \varepsilon^2\right\}$$

$P[l < Z < u] = 1 - \alpha$
α .... riziko
$1 - \alpha$ .... stopnja tveganja

Interval zaupanja pri znani populaciji; interval je simetričen

$$P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ dvostransko

$$\mu < \bar{x} + z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ enostransko

Interval zaupanja pri neznanem σ^2 in

a) dovolj velikem n

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$s \leftarrow S^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2$$

b) n ni dovolj velik (n<30):

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$s \leftarrow S^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Interval zaupanja za varianco

$$P\left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

$$\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$$ dvostransko

$$\sigma^2 < \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$$ enostransko

$$z = \frac{x - np}{\sqrt{np \cdot (1-p)}}$$

$$\hat{p} = \frac{x}{\alpha}$$

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}}$$

$$\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}} < p < \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}}$$ približen interval zaupanja

43. Kdaj je statistika z cenilka parametra q ?

Statistika z je točkovna cenilka parametra q, če je pri naraščajoči razsežnosti vzorca njena vrednost s verjetnostjo blizu 1 enaka vrednosti parametra q:

$$\lim_{n \to \infty} P[|z - q| < C] = 1$$

ki mora biti izpolnjena za določeno vrednost pozitivne konstante C.

44. Kdaj je statistika dosledna in kdaj nepristranska cenilka ?

i) doslednost

Čenilka $z = z(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ je dosledna, če je za poljubno majhno pozitivno število ε izpolnjen pogoj:

$$\lim_{n \to \infty} P[|z - q| < \varepsilon] = 1$$

ii) nepristranskost

Cenilka $z = z(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ je nepristranska, če je njena statistično povprečje enako vrednosti parametra, ki ga ocenjuje: $E[z] = q$

Cenilka je asimptotsko nepristranska, če je izpolnjena enačba: $\lim_{n \to \infty} E[z] = q$

45. Kako pridemo do cenilk z metodo največje zanesljivosti ? (nismo obdelali)

Kadar imamo razsežnost vzorca (velik raztros), parametre ocenjujemo z metodo največje zanesljivosti.

Naključni spremenljivki X naj pripada gostota porazdelitve verjetnosti f(x,q) z neznanim parametrom $q = (q_1, q_2, \ldots)$. Naključni vzorec izbrane spremenljivke X naj bo nabor vrednosti $V = (X_1, X_2, \ldots)$. Gostota verjetnosti naključnega vzorca lahko opišemo s produktom verjetnosti gostot njegovih komponent:

$$L(V, q) = f(X_1, q) \cdot f(X_2, q) \cdot f(X_3, q) \cdot \ldots \cdot f(X_n, q)$$ funkcija zanesljivosti vzorca

Po metodi največje zanesljivosti ocenimo parameter q tako, da poiščemo neko vrednost q^* pri kateri ima funkcija zanesljivosti vzorca maksimum.

$$\beta = P[\bar{x} > \mu_c]$$

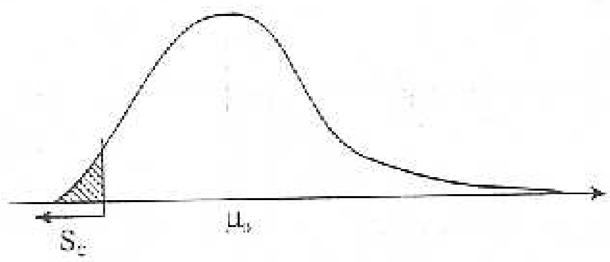
$$= \int_{-\infty}^{\mu_c} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)}{2\sigma_{\bar{x}}^2}} dx \qquad a = \frac{\bar{x} - \mu_1}{2 \cdot \sigma_{\bar{x}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{\mu_1 - \mu_c}{\sigma_{\bar{x}}}} e^{-\frac{u^2}{2}} dx$$

$$\beta = \frac{1}{2} - \phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_c}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$$

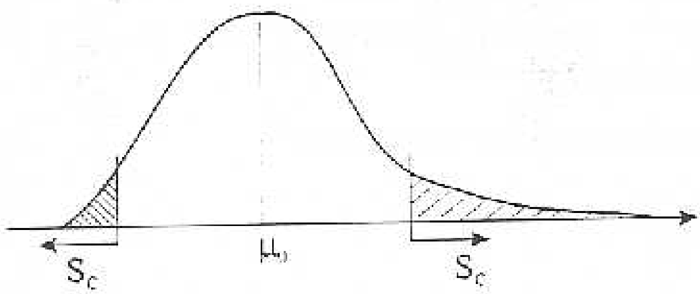
ii) Levo enostranski test

H_0: $\mu = \mu_0$
H_1: $\mu < \mu_0$

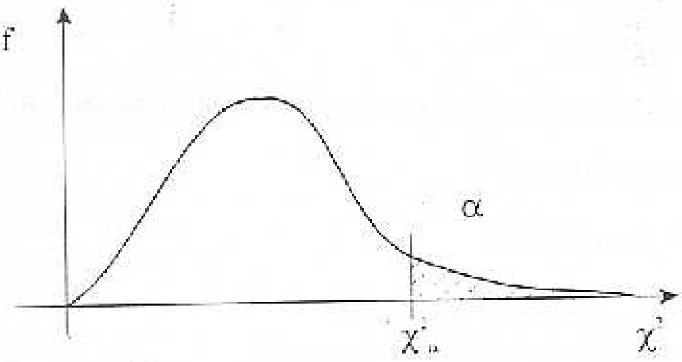


iii) Dvostranski test

H_0: $\mu = \mu_0$
H_1: $\mu \neq \mu_0$



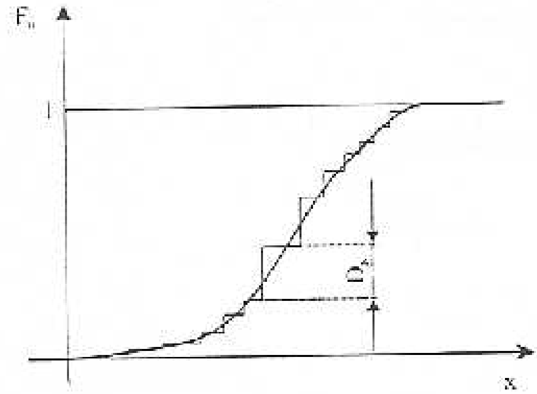
n_{i0} .... n_i po teoriji
n .... velikost vzorca
r .... število razredov



$\chi > \chi^2_{\alpha,r-l-1} \Rightarrow H_0$ zavrnemo

l (črka l) ..... število ocenjenih parametrov porazdelitve funkcije

a. Opiši še test Kolmogorova



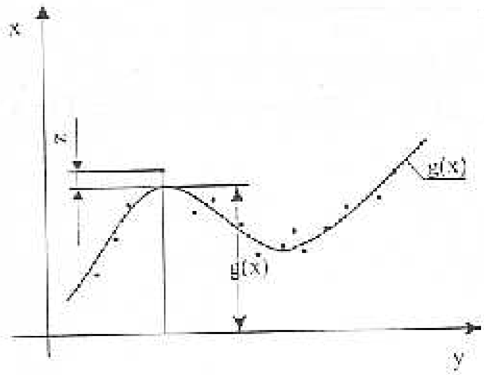
D_n ..... največja detektirana razlika

$$H_0: \quad f(x) = f_0(x)$$
$$H_1: \quad f(x) \neq f_0(x)$$

$$D_n = \max\left|F_0(x) - F_n(x)\right|$$
$$\Lambda = D_n \cdot \sqrt{n}$$
$$\lim_{n \to \infty} P[\Lambda < \lambda] = Q(\lambda)$$
$$Q(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow \lambda_\alpha$$

n_{ij}. ..... predpostavljeni
n_{ij} ...... izmerjeni

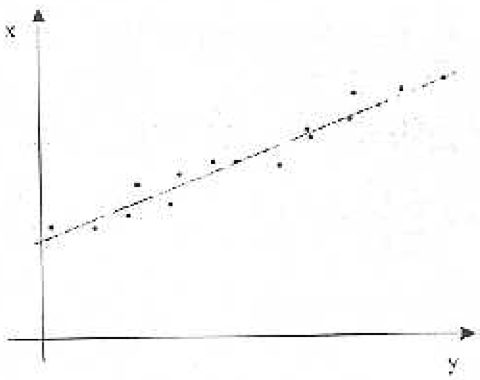
50. Kaj je cenilka funkcije in kako jo določimo ?



$$y = g(x) + z$$
$$z = y - g(x)$$
$$= Y - Y_c$$
$$E[z^2] = E[(Y - g(x))^2] = \Delta^2$$
$$E[z^2] = \iint (Y - g(x))^2 \cdot f_{XY} \, dxdy$$
$$E[z^2] = I(g)$$
$$I(g_0) = \min I$$

Variacijski postopek

$$I(\delta g) = I(g_0 + \delta g) - I(g_0) \qquad \delta g = \varepsilon \cdot \mathrm{h}(x)$$
$$I(\delta g) = \left.\frac{\partial I}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon$$
$$\left.\frac{\partial I}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{ne glede na h(x)}$$
$$I(g_0 + \varepsilon \cdot h) = \iint (y - g_0 - \varepsilon \cdot h)^2 \cdot f_{XY} dxdy$$
$$\left.\frac{\partial I}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$
$$-2 \cdot \iint (y - g_0) \cdot h(x) \cdot f_{XY} dxdy = 0$$
$$\iint y \cdot h(x) \cdot f_{XY} dxdy = \iint g_0(x) \cdot h(x) \cdot f_{XY} dxdy = \int g_0(x) \cdot h(x) \cdot f_X(x) dx \qquad f_{XY} = f_{Y|X} \cdot f_X$$
$$\iint y \cdot h(x) \cdot f_{Y|X} \cdot f_X dxdy = \int g_0(x) \cdot h(x) \cdot f_X(x) dx$$
$$g_0(x) = \int y \cdot f_{Y|X} dy = E[Y|X = x]$$



Končna napaka Δ^2:

$$\Delta^2 = (1 - r^2) \cdot Var(Y_c)$$

52. Opišite postopek analize variance !

	$j \rightarrow$					
$i \downarrow$		A	B	C	....	E
	1					
	2					
	3			x_{ij}		
	.					
	.					
	.					
	n_j					

H_0: $\mu_A = \mu_B = ... = \mu_E$

H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ za vsaj en par (i, j)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{N} \qquad N = \sum_{j=1}^{a} n_j$$

$$\sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{n_j} ((x_{ij} - \bar{x}_j) + (\bar{x}_j - \bar{x}))^2$$

$$= \sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + 2 \sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j) \cdot (\bar{x}_j - \bar{x}) + \sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{x}_j - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{j=1}^{a} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + \sum_{j=1}^{a} n_j \cdot (\bar{x}_j - \bar{x})^2$$

$$= q_2 + q_1$$

q_2 .... variabilnost zaradi eksperimenta

q_1 .... variabilnost zaradi parametra (faktorja)

$$S_{yy} = |H(\omega)|^2 \cdot S_{xx} \qquad S_{xx} = S_0$$

$$S_{yy} = \frac{S_0}{(1-\omega^2)^2}$$

54. Linearni sistem, ki ga opišemo z diferencialno enačbo $\ddot{y} + \dot{y} + y = x$, vzbujamo s signalom, ki mu ustreza korelacijska funkcija $R_{xx}(t) = C_0\,\sigma(t)$, kjer je C_0 konstanta. Določi spektralno gostoto odziva ?

$$R_{xx}(t) = C_0 \cdot \delta(t)$$

$$S_{xx} = C_0$$

$$x(t) = e^{i\omega t}$$

$$y = H(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

$$\dot{y} = i \cdot \omega \cdot H(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 \cdot H(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = x$$

$$-\omega^2 \cdot H(\omega) \cdot e^{i\omega t} + i \cdot \omega \cdot H(\omega) \cdot e^{i\omega t} + H(\omega) \cdot e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

$$H(\omega) \cdot (-\omega^2 + i \cdot \omega + 1) \cdot e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

$$H(\omega) \cdot (-\omega^2 + i \cdot \omega + 1) = 1$$

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i \cdot \omega + 1}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 - i \cdot \omega + 1}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{(1-\omega^2) + i \cdot \omega} \cdot \frac{1-\omega^2 - i \cdot \omega}{1-\omega^2 - i \cdot \omega}$$

$$H(\omega) = \frac{1-\omega^2 - i \cdot \omega}{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}$$

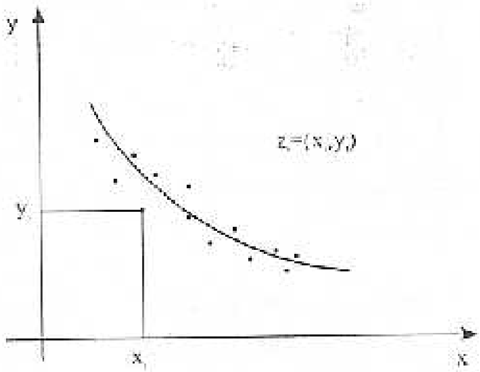
$$|H(\omega)|^2 = \frac{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}{((1-\omega^2)^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{1 - 2 \cdot \omega^2 + \omega^4 + \omega^2}$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1-\omega^2 + \omega^4}$$

$$S_{yy} = |H(\omega)|^2 \cdot S_{xx}$$

$$S_{yy} = \frac{C_0}{1-\omega^2+\omega^4}$$

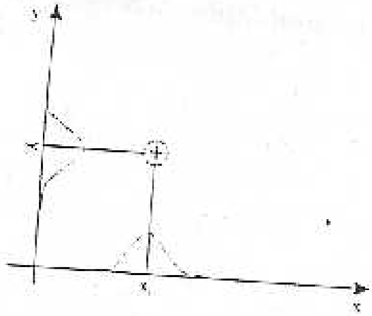
a. Neparametrična cenilka funkcije (predaval Grabec in povedal, da je zelo zelo pomembno!)



$$y = g(x) + z$$
$$E[z^2] \Rightarrow \min$$
$$g(x) = E[y|x] = \hat{y} \qquad \hat{y} \text{........cenilka}$$
$$= \frac{\int y f(y,x)dy}{\int f(x,y)dy}$$

$$(x_1,y_1);(x_2,y_2);....;(x_n,y_n) = z_n \rightarrow f(x,y)$$
$$E[h(z)] = \iint h(z)\cdot f(z)dxdy$$
$$= \iint h(x,y)\cdot f(x,y)dxdy$$
$$= \iint f(x,y)\cdot \hat{f}(x,y)dxdy$$

$$< h(z) > = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} h(x_i,y_i)$$
$$\hat{f} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta(x-x_i)\cdot\delta(y-y_i)$$
$$\hat{f} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta(z-z_i)$$
$$\hat{y}(x) = g(x) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\int y\sum_{i=1}^{n}\delta(x-x_i)\cdot\delta(y-y_i)dy}{\frac{1}{n}\cdot\int\sum_{j=1}^{n}\delta(x-x_j)\cdot\delta(y-y_j)dy}$$
$$\hat{y}(x) = \frac{\sum_i y_i\cdot\delta(x-x_i)}{\sum_j \delta(x-x_j)}$$



$$\delta(x - x_i) \rightarrow W(x - x_i; \delta)$$
$$\delta(y - y_i) \rightarrow W(y - y_i; \delta)$$

neparametrična cenilka:

$$\hat{y}(x, \sigma) = \frac{\sum_i y_i \cdot W(x - x_i; \sigma)}{\sum_j W(x - x_j; \sigma)}$$

empirično modeliranje naravnih podatkov

Če dobim na izpitu za teorijo za več parametrično, npr: $z = (\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ rečemo, da je $\underline{x} = \varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n$ in $\underline{y} = \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$
S tem, da sta $\underline{x}$ in $\underline{y}$ vektorja. Naprej računamo kot zgoraj samo, da namesto x in y pišemo $\underline{x}$ in $\underline{y}$.
Rezultat je tako:

$$\hat{\underline{y}}(\underline{x}, \sigma) = \frac{\sum_i \underline{y}_i \cdot W(\underline{x} - \underline{x}_i; \sigma)}{\sum_j W(\underline{x} - \underline{x}_j; \sigma)}$$

55. Izpeljite z metodo momentov izraz za parameter q v eksponentni gostoti porazdelitve verjetnosti f(x) !

$$f(x) = \{q \cdot e^{-qx} \quad \text{za } x \geq 0; \quad 0 \text{ za } x < 0\}$$

$$m_r(q) = \int x^r dF(x) = \int x^r f(x) dx$$

$$m_1 = \int_0^{+\infty} x \cdot q \cdot e^{-qx} dx$$

$$= q \cdot \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-qx} dx \qquad \text{per partes}$$

$$= q \cdot \left(x \cdot \left(\frac{-1}{q} \right) e^{-qx} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(\frac{-1}{q} \right) \cdot e^{-qx} dx \right)$$

$$= q \cdot \left(\frac{-1}{q} \cdot \infty \cdot e^{-q \cdot \infty} + \frac{1}{q} \cdot 0 \cdot e^{-q \cdot 0} + \frac{1}{q} \cdot \int_0^{\infty} e^{-qx} dx \right)$$

$$= q \cdot \left(\frac{-1}{q^2} \cdot e^{-q \cdot x} \Big|_0^{+\infty} \right)$$

$$= q \cdot \left(\frac{-1}{q^2} \cdot e^{-q \cdot \infty} + \frac{-1}{q^2} \cdot e^{-q \cdot 0} \right)$$

$$m_1 = \frac{1}{q} \Rightarrow q = \frac{1}{m_1}$$

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot e^{-qx} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{e^{qx}} \right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{q \cdot e^{qx}} = 0$$

Razrešitev integrala per partes:

$$\int f \cdot g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx$$

$$f = x \qquad g' = e^{-q \cdot x}$$

$$f' = 1 \qquad g = -\frac{1}{q} \cdot e^{-q \cdot x}$$

$$\sum_{j=1}^{a}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_j)\cdot(\bar{x}_j-\bar{x})=\sum_{j=1}^{a}(\bar{x}_j-\bar{x})\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-n_j\cdot\bar{x}_j)$$

$$=n_j\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ij}}{n_j}-n_j\cdot\bar{x}_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}n_j\cdot\bar{x}_j-n_j\cdot x_j$$

$$\sum_{j=1}^{a}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_j)\cdot(\bar{x}_j-\bar{x})=0$$

$$S_1^2=\frac{q_1}{a-1}\qquad S_2^2=\frac{q_2}{N-a}\qquad F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$F>F_{\alpha,a-1,N-a}\Rightarrow$ v tem primeru zavržemo H_0

Vir variabilnosti	Vsota kvadratov	Št. produktov	Povprečni kvadrat odstopanja	Statistika F
Faktor	q_1	a - 1	$\frac{q_1}{a-1}$	$\frac{q_1\cdot(N-a)}{q_2\cdot(a-1)}$
Eksperiment	q_2	N - a	$\frac{q_2}{N-a}$	
Vsota	q	N - 1		

53. Linearni sistem, ki ga opisuje enačba $\ddot{y}+y=x(t)$ vzbujamo z belim šumom, ki ima spektralno gostoto S_0. Izpeljite izraz za spektralno gostoto izhodnega naključnega signala

$$\ddot{y}+y=x(t)$$

$$x(t)=e^{i\omega t}$$

$$y=H(\omega)\cdot e^{i\omega t}$$

$$\dot{y}=i\cdot\omega\cdot H(\omega)\cdot e^{i\omega t}$$

$$\ddot{y}=-\omega^2\cdot H(\omega)\cdot e^{i\omega t}$$

$$\ddot{y}+y=x(t)$$

$$-\omega^2\cdot H(\omega)\cdot e^{i\omega t}+H(\omega)\cdot e^{i\omega t}=e^{i\omega t}$$

$$H(\omega)\cdot(1-\omega^2)=1$$

$$H(\omega)=\frac{1}{1-\omega^2}$$

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{(1-\omega^2)^2}$$

51. Izpelji izraz za regresijsko premico !

$$Y_c = a \cdot X + b$$
$$E[(Y - Y_c)^2] \to \min.$$
$$E[(Y - a \cdot X - b)^2] \to \min.$$

$$\frac{\partial E[(Y - a \cdot X - b)^2]}{\partial a} = 0$$
$$-2 \cdot E[X \cdot (Y - a \cdot X - b)] = 0$$
$$E[XY] - a \cdot E[X^2] - b \cdot E[X] = 0$$

$$\frac{\partial E[(Y - a \cdot X - b)^2]}{\partial b} = 0$$
$$-2 \cdot E[Y - a \cdot X - b] = 0$$
$$E[Y] - a \cdot E[X] - b = 0 \Rightarrow b = E[Y] - a \cdot E[X]$$

$$E[XY] - a \cdot E[X^2] - E[X] \cdot E[Y] + a \cdot E[X]^2 = 0$$
$$a \cdot (E[X^2] - E[X]^2) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$
$$a \cdot Var(X) = Cov(X,Y)$$
$$a = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$$

Torej y je

$$Y_c = a \cdot X + b$$
$$Y_c = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} \cdot X + E[Y] - \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} \cdot E[X]$$
$$\frac{Y_c - E[Y]}{\sigma_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \cdot \frac{X - E[X]}{\sigma_X}$$

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

r .... korelacijski koeficient

$|r| \approx 1$ .... obstaja med x in y deterministična zveza

$|r| \geq 0,8$ ...... je linearna regresija smiselna

$|r| < 0.5$ ...... je linearna regresija nesmiselna

48. Opiši test Romanovskega !

V zvezi s testom hi-kvadrat se pogosto uporablja test Romanovskega. Pri tem upoštevamo, da je porazdelitev χ^2 za velike vrednosti k približno normalna s srednjo vrednostjo k in varianco 2·k. Če je standardizirani odklon

$$\frac{\left|\chi^2 - k\right|}{\sqrt{2 \cdot k}} > 3$$

hipotezo pri tem testu zavrnemo. Temu ustreza stopnja zavračanja reda velikosti 10^{-3}

49. Kako testiramo neodvisnost dveh vplivov ?

Uporabimo test neodvisnost dveh pojavov.

B

A	1	2	3	......	5	
1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	......	n_{1k}	$n_{1\cdot}$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
r	r_{r1}	r_{r2}	r_{r3}	......	r_{rk}	$r_{r\cdot}$
	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$n_{\cdot 3}$	......	$n_{\cdot k}$	$n_{\cdot\cdot}$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$

$\underbrace{p_1 \quad p_2 \quad p_3 \qquad\qquad p_k}$

$$p_i = \frac{n_{\cdot j}}{k}$$

A in B sta kriterija

$$n_{1\cdot} = \sum_{j=1}^{c} n_{ij}$$

$$n_{\cdot\cdot} = n$$

$$\left.\begin{aligned} p_{1\cdot} &= \frac{n_{1\cdot}}{n} \\ p_{r\cdot} &= \frac{n_{r\cdot}}{n} \end{aligned}\right\} p_{i\cdot} = \frac{n_{i\cdot}}{k}$$

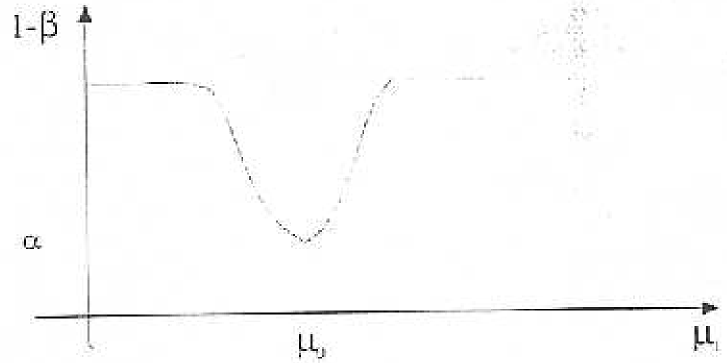
$$H_0: \qquad p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$$

$$H_1: \qquad p_{ij} \neq p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{ij} - n_{ij0})^2}{n_{ij0}} \qquad p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$$

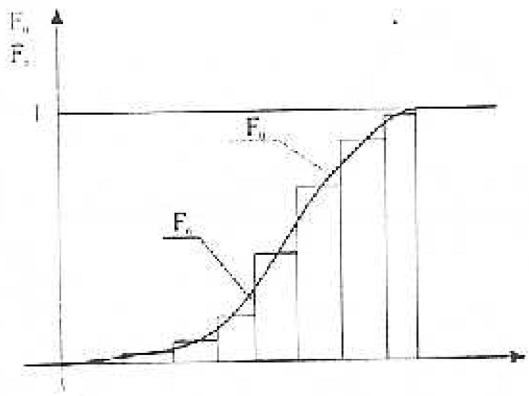
$$\chi^2 > \chi^2_{\alpha,(r-1)(c-1)} \Rightarrow H_0 \text{ zavrnemo} \qquad n_{ij\cdot} = \frac{p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}}{n} = \frac{p_{ij\cdot}}{n}$$

Moč testa



47. Kaj veš o testu HI – KVADRAT ?

S HI-KVADRAT (χ^2) testom obravnavamo neparametrične hipoteze, ki se nanašajo na obliko porazdelitve funkcije.



$$H_0: \quad f(x) = N(\mu,\sigma) = f_0(x)$$
$$H_1: \quad f(x) \neq N(\mu,\sigma) = f_e(x)$$

primerjamo vzorčno s teoretično!

n_i .... število elementov v i - tem intervalu Δx_i

$n_i \approx 10$ velikostni red

$n_i > 5$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n_{i0})^2}{n_{i0}^2} \cdot n_{i0} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n_{i0})^2}{n_{i0}} = n \cdot \sum_{i=1}^{r} \frac{(p_i - p_{i0})^2}{p_{i0}}$$

$$n_i = p_i \cdot n$$
$$n_{i0} = p_{i0} \cdot n$$

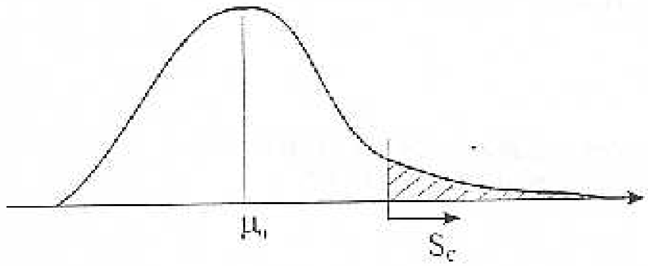
Parameter q^* je cenilka neznanega parametra po metodi največje zanesljivosti, če velja za dani vzorec V: $L(V,q^*) \geq L(V,q)$. (Nad q - jem je zvezdica).

46. Statistična sklepanja (hipoteze) ...

To so predpostavke o porazdelitvi funkcije F(x).
Domene:

sestavljena	H:	$f(x) = N(\mu, \sigma)$
enostavna	M:	$f(x) = N(0, 1)$
parametrična	H:	$\mu = 20$
neparametrična	H:	$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$
Osnovna hipoteza:	H_0:	$\mu = \mu_0$
Alternativna hipoteza:	H_1:	$\mu > \mu_0$

i) Desno enostranski test:

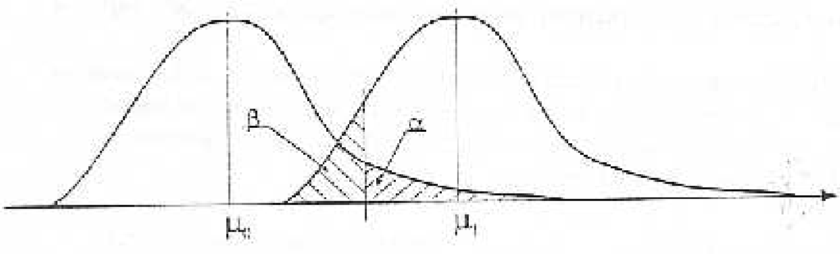


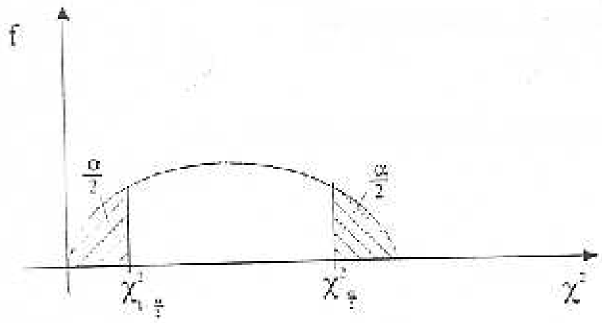
Možna sta dva tipa napak:

	H_0 ne zavrnemo	H_0 zavrnemo
H_0 drži	nobena napaka	napaka 1. vrste
H_0 ne drži	napaka 2. vrste	nobena napaka

P[napaka 1. vrste] = α
P[napaka 2. vrste] = β

α ..... riziko proizvajalca (stopnja značilnosti testa)
β ..... riziko kupca





Interval ocene za normalno porazdelitev in n > 30:

$$N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)})$$

$$N(p, \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}})$$

$\hat{p}$.... ocena

x ..... število

$$z = \frac{x - np}{\sqrt{np \cdot (1-p)}}$$

$$\hat{p} = \frac{x}{\alpha}$$

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}}$$

$$\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}} < p < \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}}$$ približen interval zaupanja

Napaka ocene

$$E = |\bar{x} - \mu| = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

42. Kako določimo interval zaupanja za srednjo vrednost in standardno deviacijo pri normalno porazdeljeni populaciji ?

Interval ocene za normalno porazdelitev in n > 30:

$$N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)})$$

$$N(p, \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}})$$

$\hat{p}$.... ocena

x ..... število

$$Var(X) = \int (x - m_x)^2 dP(x)$$
$$= \int_A (x-m_x)^2 dP(x) + \int_{\bar{A}} (x - m_x)^2 dP(x)$$
$$Var(X) > \int_A (x - m_x)^2 dP(x) > \varepsilon^2 \cdot \int_A dP(x) = \varepsilon^2 \cdot P[A]$$

Neenačba Čebiševa je torej

$$P\left[|x - m_x| > \varepsilon\right] \leq \frac{Var(x)}{\varepsilon^2}$$

Neenačba Čebiševa nam označuje verjetnost, da je naključna spremenljivka X zunaj območja (m - ε, m - ε).
S pomočjo te neenačbe lahko hitro dokažemo, da je vzorčno povprečje dosledna in nepristranska cenilka srednje vrednosti m:

$$P\left[|<x> - m| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\sigma_x^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} P\left[<x> = m\right] = 1$$

41. Kaj veš o točkovnem ocenjevanju parametrov in kaj o intervalnem ocenjevanju ?

i) Točkovno ocenjevanje:

Statistika $z = z(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ je točkovna cenilka parametra q, če je pri naraščajoči razsežnosti vzorca njena vrednost z verjetnostjo blizu 1 približno enaka vrednosti parametra:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|z - q| < C\right] = 1$$

Splošno lahko za cenilke uporabljamo različne statistike. Cenilka je tem boljša čim manjšo vrednost konstante C dopušča v zgornji enačbi.
Lastnosti cenilk:

1) doslednost

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|z - q| < \varepsilon\right] = 1$$ vzorčno povprečje

2) nepristranskost

$$E[z] = q$$ vzorčno povprečje

3) asimptotsko nepristranskost

$$\lim_{n\to\infty} E[z] = q$$ vzorčna varianca

ii) intervalno ocenjevanje

Statistika, ki je uporabljena kot cenilka parametrov, so naključne spremenljivke, zato je ocena parametra le približna.

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

35. Kako sta definirani in medsebojno povezani težnostne impulzna in frekvenčna odzivna funkcija linearnega sistema ?

i) frekvenčna odzivna funkcija

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-i\omega t'} dt'$$

ii) Impulzna odzivna funkcija izražena s frekvenčno odzivno funkcijo

$$h(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

36. Kako izrazimo križno spektralno gostoto med vhodom in izhodom iz sistema ?

$$R_{XY}(\tau) = \int R_{XY}(\tau - t) h(t) dt \qquad z = \tau - t$$

$$\begin{aligned}
S_{XY} &= \int R_{XY}(\tau) \cdot e^{i\omega t} d\tau \\
&= \iint R_{XY}(\tau - t) \cdot h(t) \cdot e^{i\omega t} d\omega dt \qquad z = \tau - t \\
&= \iint R_{XY}(z) \cdot h(t) \cdot e^{i\omega z} \cdot e^{i\omega t} dz dt \\
&= \int R_{XY}(z) \cdot H(\omega) \cdot e^{i\omega z} dz \\
&= S_{CY} \cdot H(\omega)
\end{aligned}$$

$$S_{XY} = H(\omega) \cdot S_{CY}$$

37. Kako je definirano vzorčno povprečje ?

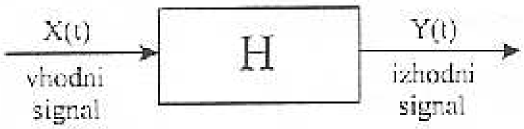
Vzorčno povprečje definiramo s izrazom:

$$< x > = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Od vzorca do vzorca se povprečje <x> splošno spreminja in spada zato med naključne spremenljivke.

33. Kaj je linearni sistem in kako zapišemo njegov odziv v časovni domeni ?

Transformacijo procesa v sistemu v tehniki prikažemo s blokovno shemo:



H ..... transformacija – vpliv sistema

Zapišemo: Y(t) = H(X(t))

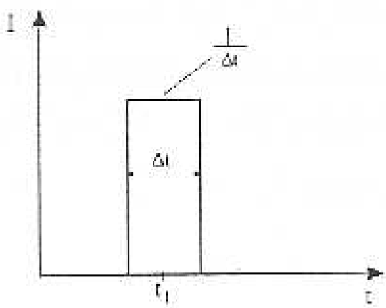
Sistem je linearen takrat, ko lahko naredimo sledeče

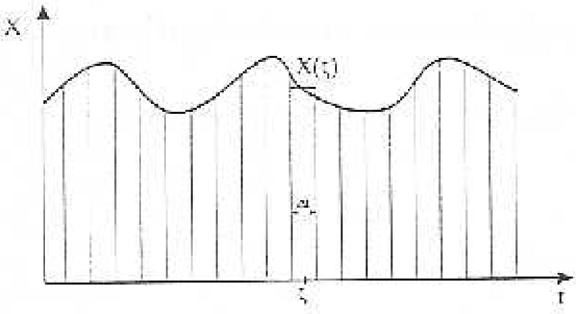
$$H(a \cdot x_1(t) - b \cdot x_2(t)) = a \cdot f(x_1(t)) + b \cdot f(x_2(t)) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

Enotna impulzna enota I

$$I(t - t_1)\Delta t = \begin{cases} 1 : \tau \in \left(\tau_1 - \frac{\Delta t}{2}, t_1 - \frac{\Delta t}{2} \right) \\ 0 : \text{drugo} \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} I(t - t_1) \to \delta(t - t_1)$$





28. Kako naključni proces izčrpno okarakteriziramo z verjetnostjo ?

Pri izčrpnem opisu določimo poljubno porazdelitev povezane verjetnosti na naslednji način:

$$P[X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \dots, X(t_n) \le x_n, Y(t_{n+1}) \le y_n, \dots, Y(t_{m+1}) \le y_m]$$

Iz take splošne opredeljene porazdelitve verjetnosti lahko nato določimo vsako porazdelitveno funkcijo, ki jo potrebujemo za izračun različnih momentov. Ker je tak splošen opis v praksi preveč obsežen, se raje posvetimo raznim statističnim povprečjem in drugim kazalcem.

29. Kako sta povezani srednja vrednost in korelacijska funkcija vhodnega in izhodnega signala ?

$$E[X(t)] = \int x dP(x,t) = m_x = konst.$$

$$\begin{aligned} E[X(t_1)X(t_2)] &= \iint x_1 x_2 dP(x_1, x_2; t_1, t_2) \\ &= \iint x_1 x_2 dP(x_1, x_2; t_2 - t_1) \\ &= R(t_2 - t_1) \\ &= R(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

$h(t_1, t_2) = h(t_1 - t_2)$ odzivna funkcija

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t')] \cdot h(t - t')dt' \\ &= m \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - t')dt; \qquad z = t - t' \end{aligned}$$

$$E[Y(t)] = m \int_0^{+\infty} h(z)dz$$

$$R_{yy} = E[Y(t_1)Y(t_2)] = \iint R_{xx}(t'_1 - t'_2) \cdot h(t_1 - t'_1) \cdot h(t_2 - t'_2)dt_1 dt_2$$

$$z_1 = t_1 - t'_1$$

$$z_2 = t_2 - t'_2$$

$$R_{yy} = \iint R_{xx}(t_1 - z_1 - t_2 + z_2) \cdot h(z_1) \cdot h(z_2)dz_1 dz_2$$

30. Kako sta povezani povprečna vrednost vhodnega in izhodnega signala ?

$h(t_1, t_2) = h(t_1 - t_2)$ odzivna funkcija

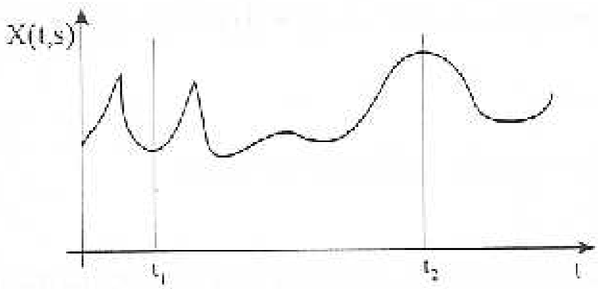
$$\mathrm{E[X(t)]} = \int \mathrm{xdP(x, t)} = m = konst.$$

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t')]h(t - t')dt' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} mh(t - t')dt' \qquad z = t - t' \\ &= m \int_0^{+\infty} h(z)dz \end{aligned}$$

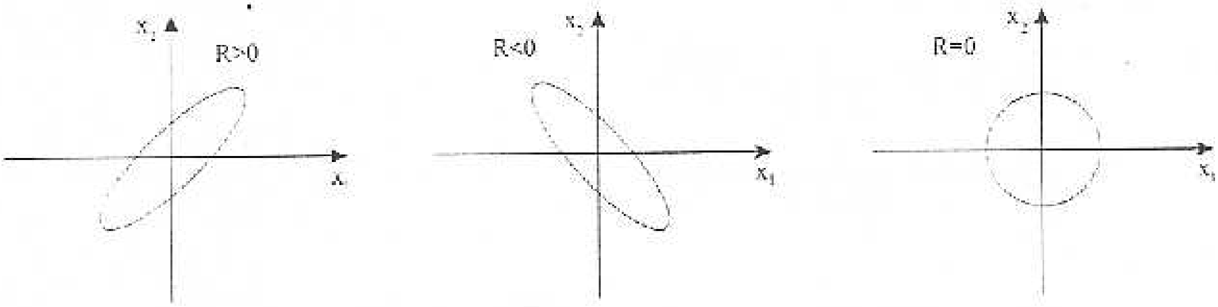
- zvezen naključni proces pa splošno opišemo s funkcijo indeksa t, ki mu ustreza zaloga vrednosti z lastnostmi kontinuuma. Pri zveznem procesu s ponovitvami dobivamo splošno različne funkcije X(t,s). Skupino takih funkcij imenujemo »ensemble« in jo uporabljamo za empirični opis poskusa.

25. Kako je definirana korelacijska funkcija naključnega procesa ?

Običajno nas v tem primeru zanima korelacija spremenljivke X pri dveh različnih časih. Določena je s izrazom:



$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1,t_2) &= E[X(t_1),X(t_2)] \\ &= \iint x_1 x_2 \, dP(x_1,x_2;t_1,t_2) \\ &= \iint x_1 x_2 f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1 dx_2 \end{aligned}$$



Ker je povezana verjetnost odvisna od obeh vrednosti parametra t, je zato tudi korelacija spremenljivke X pri obeh časih na splošno odvisna od obeh vrednosti parametra t. Zaradi tega jo imenujemo kar korelacijska funkcija oz. avtokorelacijska funkcija (za razliko od križnokorelacijske funkcije pri vektorskih naključnih procesih).

26. Kdaj je proces stacionaren, stacionaren v širšem in ožjem smislu in kdaj je ergodičen ?

i) Proces $\{X(t),\ t \in T\}$ je stacionaren, če so vse porazdelitve povezanih verjetnosti invariantne na premik parametra t. Za poljuben premik t_0 velja:

$$P[X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \ldots] = P[X(t_1 + t_0) \le x_1, X(t_2 + t_0) \le x_2, \ldots]$$

18. Pojasni kako določimo gostoto porazdelitve vsote dveh spremenljivk ?

Verjetnost, ki pripada nekemu dogodku v prostoru A_Z je enaka $A_{X,Y}$.
$Z = X + Y$

i) X,Y sta odvisni

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = P[X + Y \leq z] = \iint_{A_{X,Y}} f_{XY}(x, y)dxdy; \qquad A_{X,Y} = [x, y; x + y \leq z]$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x, y)dydx$$

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z - x)dx$$

ii) X,Y naključno neodvisni

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)dx; \qquad \text{konvolucijski integral}$$

19. Kako določimo gostoto za funkcijo Z = X – Y iz porazdelitve verjetnosti obeh komponent?

i) X,Y sta odvisni

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = P[X - Y \leq z] = \iint_{A_{X,Y}} f_{XY}(x, y)dxdy; \qquad A_{X,Y} = [x, y; x - y \leq z]$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x-z} f_{X,Y}(x, y)dydx$$

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, x - z)dx$$

ii) X,Y sta naključno neodvisni

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(x - z)dx$$

20. Definiraj povprečno vrednost in korelacijo ?

i) povprečna vrednost
Empirično povprečno vrednost spremenljivke X vpeljemo s izrazom

$$< x > = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{N_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \qquad p_i = \frac{N_i}{N}$$

v) Gostota porazdelitve verjetnosti

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \cdot \partial y}$$, če je F_{XY} odvedljiva

vi) robni porazdelitvi in njuni gostoti

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(x',y')dx'dy'$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x',y')dx'dy'$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

13. Kako sta definirani kumulativna porazdelitvena funkcija in gostota porazdelitvene verjetnosti za dvodimenzionalen primer ?

i) Kumulativna porazdelitvena funkcija

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x',y')dx'dy' = P[X \le x, Y \le y]$$

ii) gostota porazdelitve verjetnosti

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$, če je F_{XY} odvedljiva

14. Kakšna sta povezana in pogojna verjetnost v dvodimenzionalnem primeru ?

i) povezana verjetnost, ki ustreza infinitizimalnem majhnem področju

$$P[x \le X \le x+dx, y < Y \le y+dy] = P[x \le X \le x+dx | y < Y \le y+dy] \cdot P[y < Y \le y+dy]$$

ii) pogojna verjetnost, kadar je $f_Y(y) \neq 0$

$$P[x < X \le x+dx | y < Y \le y+dy] = \frac{f_{XY}(x,y)dxdy}{f_Y(y)dy} = \frac{f_{XY}(x,y)dx}{f_Y(y)}$$

$$\frac{dP[x|y]}{dx} = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = f_{X|Y}(x|y)$$

To število je:

$$\frac{n!}{x!\cdot(n-x)!}=\binom{n}{x}$$

Verjetnost, da se v n poskusih pojavi dogodek A x – krat je torej

$$P_n(x)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}$$

$$P_n(x)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x}$$

Če imamo večje število za izračunat s fakulteto si lahko pomagamo s Stirling-ovo formulo:

$$n!=n^n\cdot e^{-n}\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot n}$$

9. Kako pridemo iz binomske do Poissonove porazdelitve ?

$$p\cdot n\approx 1$$

$$n\to\infty$$

$$\Theta=p\cdot n$$

$$p=\frac{\Theta}{n}<<1$$

Θ .... povprečna vrednost

$$n>>x$$

$$P[x;n]\equiv\frac{\cancel{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\ldots(n-(x-1))}}{x!}\cdot\frac{\Theta^x}{\cancel{n^x}}\cdot\left(1-\frac{\Theta}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\Theta}{n}\right)^x$$

$$P[x;n]\equiv\frac{\Theta^x}{x!}\cdot\left(1-\frac{\Theta}{n}\right)^n$$

$$P[x;n]\equiv\frac{\Theta^x}{x!}\cdot e^{-\Theta}$$

ker je:

$$\left(1-\frac{\Theta}{n}\right)^{-x}\approx 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\Theta}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^\Theta=e^{-\Theta}$$

10. Pojasni kako v Poissonova porazdelitev vpeljemo časovno pogostost ali frekvenco dogodka ?

v_0 .... frekvenca preizkusov
v .... frekvenca dogodkov
t .... čas trajanja

$$U(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx$$

$$\int_{a}^{b} \delta(x)dx = \begin{cases} 1 & x = 0 \ \vee \ x \in (a,b) \\ 0 & x = 0 \ \vee \ x \notin (a,b) \end{cases}$$

$$\delta(x) \cdot \Delta x = 1$$

$$\Delta x = \frac{1}{\delta(x)} \to \infty ; \Delta x \to 0$$

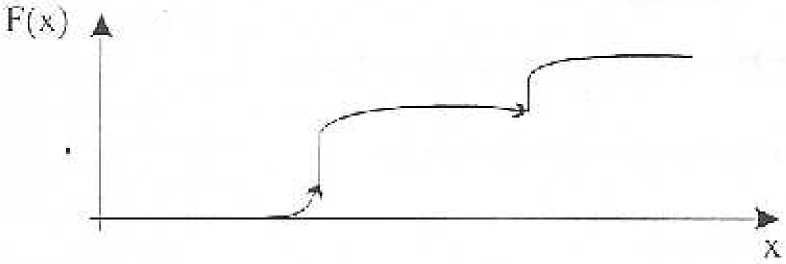
$$U(x - x_i) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x - x_i)dx$$

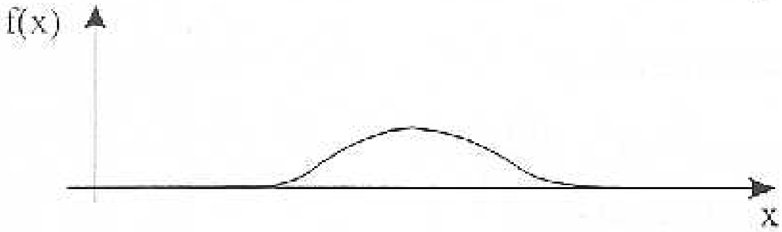
$$\delta(x) = \frac{dU}{dx}$$

in tako je

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \delta(x - x_i)$$

iii) Mešana naključna spremenljivka





a) Kumulativna ali zbirna porazdelitvena funkcija

$$F(x) = Z(x) + \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot U(x - x_i)$$

Z(x) je zvezna odsekoma odvedljiva funkcija
U(x) je enotna stopničasta funkcija in je definirana takole:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

b) Gostota porazdelitvene funkcije

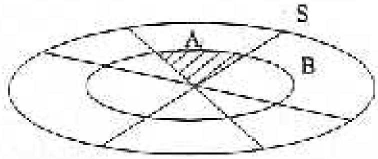
$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{dZ(x)}{dx} + \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \delta(x - x_i)$$

4. *Razloži pojem pogojne verjetnosti in izpelji Bayesov teorem ?*

i) Pogojna verjetnost dogodka B, pri pogoju A, da se zgodi dogodek A je:

$$P[B|A] = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}; \qquad P(A) \neq 0$$

ii) Izpeljava Bayesovega teorema



$$P[B] = \sum_{i=1}^{n} P[B_i] = \sum_{i=1}^{n} P[B \cap A_i]$$

$$P[B] = P[B|A_i] \cdot P[A_i] \qquad \text{apriorna vrednost}$$

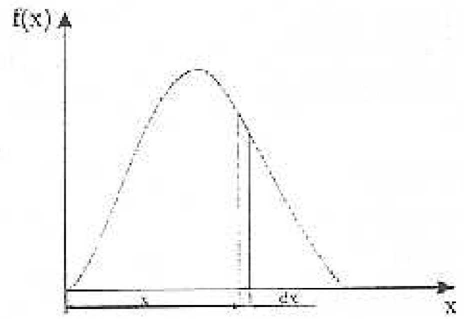
$$\sum_{i=1}^{n} P[B \cap A_i] = P[B|A_i] \cdot P[A_i]$$

$$P[A_i|B] = \frac{P[A_i \cap B]}{P[B]} = \frac{P[B|A_i] \cdot P[A_i]}{P[B]}$$

$$P[A_i|B] = \frac{P[B|A_i] \cdot P[A_i]}{P[B]}; \qquad \text{Bayesov teroem}$$

5. *Kako je definirana kumulativna porazdelitev verjetnosti in gostota porazdelitve verjetnosti za zvezno, diskretno in mešano naključno porazdelitev ?*

i) Zvezna naključna spremenljivka



a) Kumulativna ali zbirna porazdelitvena funkcija

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = P[X \in (-\infty, x)] = P[X \leq x]$$

$$F(x) = P[X \leq x]$$

IZPIT IZ OPISA NAKLJUČNIH POJAVOV

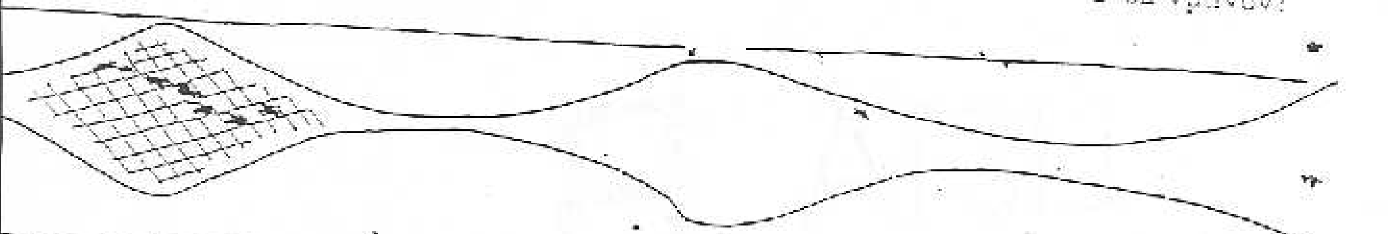
12.2.1997

1. Izpeljite binomsko porazdelitev in pokažite kako pridemo iz nje do Poissonove porazdelitve.

2. Kako definiramo cenilko funkcije? Izpeljite izraz za regresijsko premico in pojasnite kdaj jo je primerno uporabljati.

3. Kako sta definirani in medsebojno povezani korelacijska funkcija in spektralna gostota procesa? Stacionarni process ima korelacijsko funkcijo $R(t) = R_0 \exp(-|t|)$, določi izraz za spektralno gostoto $S(\omega)$.

4. Kaj veste o χ^2 testu? Kako preverimo z njim statistično neodvistnost dveh vplivov?



LISTA B

IZPIT IZ OPISA NAKLJUČNIH POJAVOV 12.02.1997

poklicni gasilski enoti v nekem mestu imajo povprečno po dve posredovanji na dan. Predpostavimo, da je število posredovanj Poisson-ovo porazdeljeno.

a: Kolikšna je verjetnost, da bodo morali nekega dne posredovati več kot trikrat?

b: Kolikšna je verjetnost, da so v enem tednu največ trije takšni dnevi, ko je potrebno vsaj štirikrat na dan posredovati?

Slovenske zavarovalnice so objavile število povzročenih prometnih nesreč po starostnih razredih. Podatki so v tabeli

starost	15–25	25–35	35–45	45–55	55–75
število nesreč	10000	9000	5000	3000	2000

Denimo, da je starost povzročiteljev prometnih nesreč eksponentno porazdeljena $f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-x_0)}$, $x > x_0 = 15$. Oceni vrednost parametra λ

V prejšnji nalogi smo predpostavili eksponentno verjetnostno porazdelitev starosti povzročiteljev prometnih nesreč. Ali eksponentna verjetnostna porazdelitev ustreza podatkom v tabeli pri prejšnji nalogi? Uporabi rezultate in podatke iz prejšnje naloge.

Raziskava v več knjigarnah po Sloveniji je pokazala, da je dnevno povprečno število prodanih knjig normalno porazdeljeno s povprečjem 200 knjig. Po Knjižnem sejmu je bila na podlagi vzorca desetih dni ocenjena dnevna povprečna prodaja 240 knjig pri standardni deviaciji 40 knjig. Ali se je prodaja v dneh po Knjižnem sejmu značilno povečala?

3. Izpit iz Opisa naključnih pojavov — 25.05.1999

1. Povprečni proizvodni čas nekega izdelka znaša 68 minut. Na preizkušnji imamo nov stroj, s katerim izdelamo 11 izdelkov in izmerimo povprečni čas izdelave enega izdelka 59 minut pri standardni deviaciji šest minut.
   (a) Ali z novim strojem značilno hitreje proizvajamo izbrani izdelek?
   (b) Denimo, da znaša proizvodni čas izdelka na novem stroju 60 minut pri standardni deviaciji šest minut. Kolikšna je verjetnost, da z vzorcem 11 izdelkov razlike med novim in starim strojem ne bi opazili?

   Predpostavimo normalno porazdelitev proizvodnega časa izdelka.

2. V zbiralnik vode v povprečju vsak dan priteče 10 000 l vode pri standardni deviaciji 1000 l. Eno gospodinjstvo dnevno v povprečju porabi 80 l vode pri standardni deviaciji 10 l. Predpostavimo, da sta dotok vode v zbiralnik in poraba vode v posameznem gospodinjstvu normalno porazdeljena. Za koliko gospodinjstev je vode v zbiralniku, če naj je bo z verjetnostjo vsaj 0.99 za vsa gospodinjstva vsak dan dovolj? Predpostavimo neodvisnost gospodinjstev.

3. V tabeli so rezultati atleta pri teku na 200 m pred in takoj po pripravah na nadmorski višini 3 200 m. Ali t.i. višinske priprave

	I	II	III	IV	V	VI
pred	20.02	19.98	19.95	20.10	20.12	20.05
po	19.93	20.01	19.92	19.89	19.95	19.98

   kratkoročno značilno vplivajo na atletove sposobnosti?

4. Tovarna keramičnih ploščic proizvaja ploščice dveh kakovostnih razredov. Predpostavljajo, da je število napak v glini Poissonovo porazdeljeno s povprečjem ena napaka na m^2 pri ploščicah prvega in pet napak na m^2 pri ploščicah drugega kakovostnega razreda. Ploščice v škatle zlagajo ločeno, vsak kakovostni razred posebej. V vsaki škatli je po 20 kvadratnih ploščic s stranico 30 cm. Kolikšno je najverjetnejše število ploščic z vsaj eno napako v škatlah s ploščicami prvega oziroma drugega kakovostnega razreda?

Opozorilo: Pri rešitvah je obvezen odgovor s celim stavkom. Vsak manjkajoči odgovor pomeni izgubo 1/4 točke.

LISTA B

KOLOKVIJ IZ OPISA NAKLJUČNIH POJAVOV

21.1.1998

1. Zapišite aksiome verjetnosti. Izpeljite binomsko porazdelitev in pokažite kako pridemo iz nje do Poissonove porazdelitve.

2. Kako je definirano statistično povprečje za diskretne in za zvezne spremenljivke? Definicija variance in korelacije. Kako je definirano vzorčno povprečje? Izpeljite izraz za varianco vzorčnega povprečja in pojasnite kakšne so lastnosti te cenilke?

3. Kaj veste o χ^2 testu? Kako preverimo z njim statistično neodvisnost dveh vplivov?

4. Opišite postopek analize variance.

LISTA B

2. Kolokvij iz Opisa naključnih pojavov 17.01.1998

1. Med 500 vpisanimi študentkami jih 400 študij zaključi v petih letih, medtem ko med 600 študenti študij v petih letih zaključi 400 študentov. Ali lahko trdimo, da je delež študentk, ki v petih letih zaključijo študij, za vsaj 0.1 večji od deleža enako uspešnih študentov?
2. V tabeli je podana odvisnost števila študentov, ki opustijo študij, od zaporednega leta študija.

Leto	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)
Osip	240	70	40	10

Ali je osip študentov eksponentno porazdeljen?

3. V tabeli so podani rezultati testa fizičnih (F) in umskih sposobnosti (U) 360 naključno izbranih ljudi.

	U-Odl.	U-Povp	U-Slabe
F-Odl.	50	40	50
F-Povp	30	70	10
F-Slabe	30	70	20

Ali so fizične in umske sposobnosti pri ljudeh neodvisne?

4. V službi za nadzor kvalitete proizvodnje spremljamo delež nepopolnih izdelkov. Zadnjih nekaj mesecev je znašal v povprečju 0.1. V tekočem mesecu pa je bilo med 600 izdelanimi izdelki le 30 slabih. Če dejansko gre za zmanjšanje deleža nepopolnih izdelkov na 0.05, kolikšna je verjetnost, da tega pri testu ne bi opazili?

---

2. Kolokvij iz Opisa naključnih pojavov 15.01.1999

1. Na vzorcu 5 trgovin v mestu in 7 trgovin na deželi smo izmerili povprečni dnevni promet 425 000 Sit pri standardni deviaciji 20 000 Sit v trgovinah v mestu in 300 000 Sit pri standardni deviaciji 14 000 Sit v trgovinah na deželi. Ali lahko trdimo, da je povprečni dnevni promet v mestnih trgovinah za več kot 100 000 Sit večji od prometa v trgovinah na deželi? Predpostavimo normalno porazdelitev dnevnega prometa.
2. V tabeli je podano število smrtno ponesrečenih motoristov v sedmih starostnih skupinah.

Starost	[15–19]	[19–25]	[25–35]	[35–45]	[45–55]	[55–65]	[65–80]
Št. mrtvih	720	750	320	280	200	230	210

Ali je smrtnost motoristov v nesrečah eksponentno porazdeljena?
Nasvet: Uporabi porazdelitev $f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-x_0)}$, $x > x_0$

3. Preučujemo vpliv deleža zračnih mehurčkov v asfaltni masi na trdnost asfalta. Za potrebe eksperimenta smo izbrali tri različne deleže zračnih mehurčkov: nizkega, srednjega in visokega. Rezultati eksperimenta so v tabeli.

	1	2	3	4	5
Nizek	106	90	103	90	86
Srednji	80	69	94	91	83
Visok	73	80	62	69	70

Ali delež zračnih mehurčkov vpliva na trdnost asfalta?

4. Proizvajalec in kupec sta se dogovorila za naslednji način skupnega preverjanja kvalitete jeklenih vrvi. Vrvi so sprejete kot ustrezne, če leži povprečna sila, potrebna za njihovo pretrganje v intervalu [12,13] kN. Za preverjanje se naključno izbere vzorec 16 vrvi.
   (a) Kolikšno je tveganje proizvajalca, da vrvi, katerih dejanska povprečna sila pretrganja znaša 12.3 kN pri standardni deviaciji 0.5 kN, ne bodo sprejete kot ustrezne?
   (b) Kolikšno je tveganje kupca, da bodo vrvi, katerih dejanska povprečna sila pretrganja znaša 11.8 kN pri standardni deviaciji 0.5 kN, sprejete kot ustrezne?

[illegible]