Povzetek vsebine prejšnjega predavanja

1. Osnova statističnega opisa naključnega pojava je poskus in izid poskusa.
2. Izid poskusa označimo kot dogodek A.
   - gotov dogodek G
   - nemogoč dogodek $\emptyset$
   - naključni dogodek A
   - elementarni dogodek ali izid $A=\{a_1\}$
   - sestavljeni dogodek $A=\{a_1, a_2, ...\}$

3. Dogodke $A, B,$ .. in relacije med dogodki opisujemo z relacijami, ki veljajo za množice:
   - Vsebovanost $A \subset B$,
   - Enakost $A = B$
   - Unija $A \cup B$,
   - Presek $A \cap B$, ali AB
   - Komplement, negacija, nasprotni dogodek A^C, De Morganovo pravilo
   - Nepovezanost, nezdružljivost $A \cap B = \emptyset$

Poglavje 3: Verjetnost

3.1 Statistična definicija verjetnosti.

Slučajen dogodek A je v splošnem podrejen nekim zakonitostim, ki pa pridejo do izraza šele pri velikem številu ponovitev poskusa.

Opis te zakonitosti temelji na pojmu relativne pogostosti ali frekvence dogodka A.

$$p_A = \frac{N_A}{N}$$

Statistično opredeljena verjetnost $P(A)$ dogodka A v danem poskusu je število pri katerem se navadno stabilizira relativna pogostost p_A dogodka A v velikem številu N ponovitev poskusa.

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} p_A(N) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}$$

Pri tem lahko relativno pogostost p_A dogodka A uporabimo za *mero verjetnosti dogodka* $P(A)$.

Pomen relativne frekvence p_A dogodka A:

$p_A \approx 1, \Rightarrow A$ se zgodi skoraj vedno, zelo verjetno se zgodi tudi pri naslednji ponovitvi

$p_A \approx 0, \Rightarrow A$ se zgodi zelo redko, zelo verjetno se ne zgodi pri naslednji ponovitvi

manj verjetno $0 < p_A < 1$ **bolj verjetno**

3.2 Aksiomatična definicija verjetnosti

Aksiom 1: Pri danem poskusu obstaja vzorčni prostor S, ki označuje množico vseh izidov poskusa in skupina $\mathcal{A}$ podmnožic A iz S, ki označujejo dogodke.

Aksiom 2: Vsakemu dogodku A iz skupine $\mathcal{A}$ lahko priredimo realno število $P(A) \geq 0$, ki ga imenujemo verjetnost dogodka A.

Aksiom 3: Verjetnost $P(G)$ gotovega dogodka G je enaka 1, $P(G) = 1$

Aksiom 4: Za paroma nezdružljive dogodke A_i, $i=1,\ldots,$ za katere je $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$ velja:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Urejeno trojico (S, $\mathcal{A}$, P) imenujemo verjetnostni prostor.

3.3 Lastnosti verjetnosti $P(A)$

1. Za slučajen dogodka A velja $N_A \leq N \Rightarrow$

   $0 \leq p_A \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

2. $A = G$ (gotov) , $\quad p_A = 1 \;\Rightarrow\; P(G) = 1$

   $A = N$ (nemogoč) , $\quad p_A = 0 \;\Rightarrow\; P(N) = 0$

3. Če $A \subset B$, $N_B \geq N_A \Rightarrow p_A \leq p_B$

   $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

4. A in B nezdružljiva dogodka z relativno pogostostjo $p(A) = p_A = N_A/N$ in $p(B) = p_B = N_B/N$

$$p(A \cup B) = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = p_A + p_B$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Gornji izraz lahko razširimo na poljubno število paroma nezdružljivih dogodkov A_i:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n)$$

5. Imamo nasprotna dogodka A in A^C

$$A \cup A^C = G \Rightarrow P(A \cup A^C) = 1$$

$A \cup A^C$ nezdružljiva $\Rightarrow P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) = 1$

$$\Rightarrow \quad P(A^C) = 1 - P(A)$$

6. Izidi poskusa tvorijo popoln sistem S enako verjetnih izidov $E_1, E_2, \ldots, E_s$, kjer je:

$$\bigcup_{i=1}^{S} E_i = G$$

Ker so E_i paroma nezdružljivi in enako verjetni je:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{S} E_i\right) = \sum_{i=1}^{S} P(E_i) = 1$$

$$\Rightarrow P(E_i) = \frac{1}{s}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

Nadalje naj bo A unija r izidov iz S:

$$A = (E_1 \cup E_2 \cup \ldots E_r)$$

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots P(E_r)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{r}{s}$$

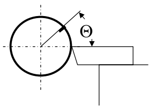
Dogodki E_i v popolnem sistemu S so med seboj enako verjetni kadar so pogoji poskusa enaki za vse izide oziroma simetrični.

Primer : (Metanje poštene ali igralne kocke.) Kolika je $P(A)$, če je $A=2n$?

Pogoji poskusa so simetrični za vse izide E_i, $i = 1, \ldots 6$. Za A so godni trije izidi:

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Primer: Ustavljanje obdelovanca na stružnici.



Elementarni dogodek $A = \{\Theta\}$;
Vzorčni prostor S je interval :

$S=\{\Theta : 0 \le \Theta < 2\pi\}$

Dogodek popišemo z intervali. Verjetnost je odvisna od širine intervala:

$$P(\alpha \le \Theta \le \beta) = \frac{\alpha - \beta}{2\pi}$$

Verjetnost za nastop elementarnega dogodka $A=\{\theta=\alpha\}$ je enaka za vse elementarne dogodke in znaša:

$$P(\alpha \le \Theta \le \alpha) = P(\Theta = \alpha) = \frac{\alpha - \alpha}{2\pi} = 0$$

$\Rightarrow$ Na osnovi elementarnih dogodkov se ne da vedno smiselno opisati izidov poskusa.

Dogodke zato tvorimo iz sestavljenih dogodkov, ki jih opisujejo intervali.

3.3 Pogojna in povezana verjetnost

Pri poskusu X lahko opazimo, da je nastop nekega dogodka A pogojen z nastopom nekega drugega dogodka B oziroma nastop dogodka B vpliva na nastop dogodka A in obratno.

Primeri:	dogodek A	dogodek B
	padavine	vlažnost > 80%
	nesreča	padavine

$P(A/B)$ ....pogojna verjetnost dogodka A v poskusu X z dodatnim pogojem B

ali verjetnost dogodka A pri pogoju, da se je zgodil dogodek B

$\Rightarrow$ za dogodek A na splošno obstojita dve verjetnosti dogodka A.

$P(A)$ brezpogojna verjetnost

$P(A/B)$ pogojna verjetnost

Vzemimo, da ima dogodek B pri poskusu X verjetnost $P(B) > 0$. Poskus X ponovimo N-krat. Pri tem:

N_B ….. št. ponovitev ugodnih za dogodek B
$N_{A\cap B}$ ….. št. ponovitev ugodnih za dogodek $A\cap B$.

Relativna pogostost dogodka A pri pogoju, da se je zgodil dogodek B:

$$p(A/B) = \frac{N_{A\cap B}}{N_B}$$

$$p(A/B) = \frac{N_{AB}}{N_B} = \frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

kjer je:

$p_{A\cap B}= N_{AB}/N$ relativna frekvenca dogodka $A\cap B$
$p_B= N_B/N$ ….. relativna frekvenca dogodka B

Ker $P(B) > 0$, je pri $N >> 0$ tudi $N_B >> 0$ veliko število. $p_{A/B}$, $p_{A\cap B}$ in p_B se stabilizirajo pri $P(A/B)$, $P(A\cap B)$ ter $P(B)$ in velja:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Poleg $P(A/B)$ lahko definiramo tudi pogojno verjetnost $P(B/A)$: to je verjetnost dogodka B pri poskusu X z dodatnim pogojem A, če $P(A)>0$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

pri tem je $P(AB)$ povezana verjetnost dogodkov A in B.

Na osnovi statistične definicije je povezana verjetnost dogodkov A in B enaka ustaljeni vrednosti relativne pogostosti dogodka $A \cap B$:

$$p_{AB} = \frac{N_{AB}}{N}$$

$\Rightarrow$ S povezano verjetnostjo dogodkov A in B opišemo verjetnost, da se pri poskusu hkrati pojavita dogodka A in B.

Iz relacij za $P(A/B)$ in $P(B/A)$ sledi izraz za povezano verjetnost dogodkov A in B :

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A) = P(B)\, P(A/B)$$

Primer: Tovarna izdeluje izdelek serijsko. Pri tem označimo dogodke: A izdelek I. vrste, B izdelek II. vrste, C izdelek III. vrste in D^C izmet.

Verjetnost teh dogodkov naj bo: $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.2$, $P(C) = 0.6$ in $P(D) = 0.1$ b

Zanima nas verjetnost $P(A/D)$, da je izdelek, ki ga naključno izberemo med uporabnimi izdelki prvovrsten.

Ker je $P(D) > 0$ velja:

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)},$$

Nadalje je :

$$D = A \cup B \cup C, \text{ in } A \cap D = A$$

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)}{P(D)} = \frac{0.1}{0.9} = \frac{1}{9}$$

$\Rightarrow$

$$P(A/D) = \frac{1}{9} \neq P(A) = \frac{1}{10}$$

3.3.1 Statistično odvisni in neodvisni dogodki

Naj bosta A in B dva dogodka, za katera je $P(A) > 0$ in $P(B) > 0$.

$\Rightarrow$ lahko definiramo pogojno verjetnost $P(A/B)$ in $P(B/A)$.

V splošnem se pogojna verjetnost $P(A/B)$ in verjetnost $P(A)$ za nastop dogodka razlikujeta:

$$P(A/B)\begin{cases} \neq P(A) \\ = P(A) \end{cases} \qquad P(B/A)\begin{cases} \neq P(B) \\ = P(B) \end{cases}$$

Če velja:

$$P(A \backslash B) = P(A)$$

pravimo, da je A neodvisen od B. Prav tako je dogodek B neodvisen od A, kadar je:

$$P(B/A) = P(B)$$

Če je dogodek A neodvisen od dogodka B, je tudi dogodek B neodvisen od A:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B \backslash A) = P(B)\, \underline{P(A \backslash B)}$$

$$P(A)\, P(B \backslash A) = P(B)\, \underline{P(A)}$$

$$P(B \backslash A) = P(B)$$

Če sta dogodka A in B statistično neodvisna velja:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$\Rightarrow$ kadar sta A in B neodvisna je povezano verjetnost dogodkov A in B podana z:

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A)$$

Če sta dogodka A in B neodvisna sta neodvisna tudi dogodka A in B^C dogodka A^C in B ter dogodka A^C in B^C :

$$A = AG = A(B \cup B^C) = AB \cup AB^C$$

AB in AB^C sta nezdružljiva zato velja:

$$P(A) = P(AB) + P(AB^C)$$

oziroma:

$$P(AB^C) = P(A) - P(AB)$$

Ker sta A in B neodvisna pišemo:

$$\begin{aligned} P(AB^C) &= P(A) - P(AB) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^C) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Neodvisnost dogodkov A in B se ohrani če en dogodek negiramo.

A in B neodvisna $\Rightarrow A$ in B^C neodvisna ……

Za množico dogodkov $\{A_i\}$, $i = 1, \ldots n$ pravimo, da so paroma neodvisni če velja :

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad i \neq j$$

Za množico dogodkov A_i , $i = 1, \ldots n$ pravimo, da so v celoti neodvisni če je vsak od njih neodvisen od vsakega drugega dogodka iz $\{A_i\}$ in od vsakega mogočega produkta dogodkov iz $\{A_i\}$.

Primer: 1.-proizvodna linija izdeluje neoporečne izdelek z verjetnostjo 0.8, 2- linija pa z verjetnostjo 0.4.

Dogodek A je, da 1.-linija izdela neoporečen izdelek, dogodek B je, da 2.-linija izdela neoporečen izdelek in dogodek D, da bo izdelan natanko en neoporečen izdelek.

Kolika je verjetnost dogodka D ?

Med dogodki A , B in D velja zveza:

$$D = AB^C \cup A^C B$$

$$D = AB^C \cup A^C B$$

Člena na desni sta nezdružljiva saj linija ne more hkrati izdelati neoporečnega in oporečnega izdelka.

$$\Rightarrow \quad P(D) = P(AB^C) + P(A^C B)$$

Liniji delujeta neodvisno druga od druge zato so dogodki v presekih AB^C in $A^C B$ neodvisni in sledi:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(B^C) + P(A^C)P(B) \\ &= 0.8 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 = 0.56 \end{aligned}$$

3.4 Relejni poskus in Bayesova formula

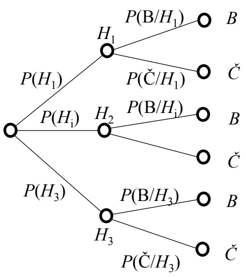
3.4.1 Relejni poskus

Poskus poteka v več stopnjah. Izid na prejšnji stopnji določa kako poteka poskus v naslednji.

Primer 1: V prvi žari sta 2 beli in 4 črne krogle. V drugi žari so 4 bele in 4 črne krogle. V tretji žari je 1 bela in 3 črne krogle.

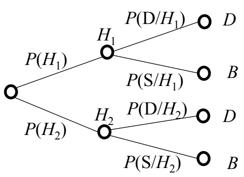
Mečemo kocko. Če padejo 1-3 pike (H_1) sežemo v prvo žaro, 4-5 pik (H_2) v drugo žaro in 6 pik (H_3) v tretjo žaro.

Potek poskusa si lahko ponazorimo z drevesom:



Zanima nas kolika je verjetnost dogodkov B in $Č$, če poznamo verjetnosti $P(H_i)$ in $P(B/H_i)$ oziroma $P(Č/H_i)$.

Primer: Izdelki prihajajo iz dveh tovarn H_1 in H_2 Iz prve 70% in iz druge 30%. Iz prve tovarne pride 90% dobrih D in 10 % slabih B. Iz druge pa 80% dobrih D in 20% slabih B



Zanima nas kolika je verjetnost dogodkov D in B, če poznamo verjetnosti $P(H_i)$ in $P(D/H_i)$ oziroma $P(B/H_i)$.

Splošna obravnava relejnega poskusa:

V relejnem poskusu z dvema stopnjama naj bodo na prvi stopnji mogoči izidi $H_1, H_2,\ldots,H_i,\ldots,H_n$. Na drugi stopnji pa naj bo B eden iz med mogočih izidov.

Kako izračunamo verjetnost dogodka B pred izvedbo poskusa če poznamo verjetnosti:

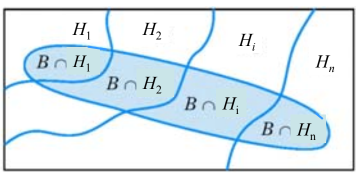
$P(H_i)$ in pogojne verjetnosti $P(B/H_i)$, $i=1,\ldots,n$

H_i, $i=1,\ldots n$ so vsi mogoči izidi poskusa na prvi stopnji. Zato velja:

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = G \quad \text{in} \quad B \cap G = B$$

in lahko zapišemo:

$$B = B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} H_i = BH_1 \cup BH_2 \cup \ldots \cup BH_n$$



Dogodki $B \cap H_i$, $i=1,\ldots n$ so paroma nezdružljivi. Zato velja:

$$P(B) = P(B \cap H_1) + \ldots + P(B \cap H_n)$$

Pri vsakem členu na desni upoštevamo relacijo:

$$P(B \cap H_i) = P(H_i)\, P(B / H_i) = P(B) P(H_i / B)$$

In dobimo izraz za popolno verjetnost dogodka B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(B / H_i)$$

3.4.2 Bayesova formula

V zvezi z relejnimi poskusi pri katerem poznamo verjetnosti:

$P(H_i)$ in pogojne verjetnosti $P(B/H_i)$, $i=1,\ldots,n$

Nas pogosto zanimajo kakšne so pogojne verjetnosti:

$$P(H_i \backslash B)$$

oziroma, kakšne so verjetnosti izidov H_i prvega dela poskusa če se je v njegove drugem delu zgodil dogodek B.

Primer: V prvem obravnavanem primeru nas na primer zanima, verjetnost, da je krogla iz i-te žare (dogodek H_i), če smo potegnili belo kroglo (dogodek B).

V drugem pa nas zanima verjetnost, da je dober izdelek (dogodek B) prišel iz i-te tovarne (dogodek H_i).

$$P(H_i/B) = ?$$

Nalogo rešimo s pomočjo formule za povezano verjetnost in popolno verjetnost dogodka B.

Iz relacije za povezano verjetnost:

$$P(B \cap H_i) = P(H_i)\,P(B/H_i) = P(B)P(H_i/B)$$

Izrazimo iskano verjetnost:

$$P(H_i/B) = \frac{P(H_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(H_i)P(B/H_i)}{P(B)}$$

Kjer je $P(B)$ poznana popolna verjetnost dogodka B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(B/H_i)$$

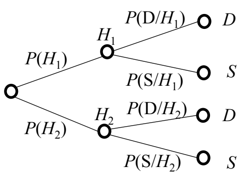
Bayesova formula za verjetnost dogodka H_i pri pogoju, da se zgodi dogodek B

$$P(H_i \backslash B) = \frac{P(H_i)P(B/H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(B \backslash H_j)}$$

V Bayesovi formuli imenujemo verjetnosti $P(H_i)$ apriorne, ker so običajno v naprej podane pogojne verjetnosti $P(H_i \backslash B)$ pa aposteriorne.

Primer: Izdelki prihajajo iz dveh tovarn H_1 in H_2 Iz prve 70% in iz druge 30%. Iz prve tovarne pride 90% dobrih D in 10 % slabih B. Iz druge pa 80% dobrih D in 20% slabih B

Drevesni diagram poteka poskusa:



Zanima nas kolika je verjetnost:

a) da je naključno izbran izdelek dober
b) da je naključno izbran izdelek slab
c) da je dober izdelek prišel iz prve tovarne
d) da je slab izdelek prišel iz prve tovarne
e) da je dober izdelek prišel iz druge tovarne
f) da je slab izdelek prišel iz prve druge tovarne

Podane so verjetnosti:

$$P(H_1) = 0.7, \quad P(D/H_1) = 0.9, \quad P(S/H_1) = 0.1$$

$$P(H_2) = 0{,}3, \quad P(D/H_2) = 0.8, \quad P(S/H_2) = 0.2$$

a) da je naključno izbran izdelek dober:

$$P(D) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(D/H_i)$$
$$= P(H_1)P(D/H_1) + P(H_2)P(D/H_2) = 0.87$$

b) da je naključno izbran izdelek slab:

$$P(S) = P(H_1)P(S/H_1) + P(H_2)P(S/H_2) = 0.13$$

c) da je dober izdelek prišel iz prve tovarne:

$$P(H_1/D) = \frac{P(H_1)P(D/H_1)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(B/H_j)}$$
$$= \frac{P(H_1)P(D/H_1)}{P(D)} = \frac{63}{87}$$

d) $P(H_1/S) = 7/13$

e) $P(H_2/D) = 24/87$

f) $P(H_2/S) = 6/13$

Poglavje 4: Naključne spremenljivke

4.1 Osnovni pojmi

Izidi nekaterih poskusov so označeni s številkami:

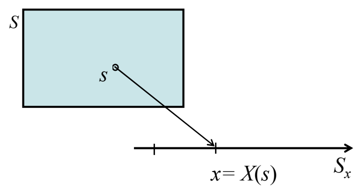
Primer: Met kocke: število pik
Streljanje v tarčo: oddaljenost zadetka od sredine tarče.

Izidi naključnih poskusov so lahko podani tudi opisno kot na primer: (dober, slab) (grb,številka, rob) (moder,zelen,črn)

V splošnem izidi naključnega poskusa predstavljajo vzorčne točke s vzorčnega prostora S, $s \in S$.

Vzorčnim točkam s prostora S priredimo neko realno spremenljivko X. Pri tem posamezne vrednosti spremenljivke X označimo z x, $x \in X$.

Vsakemu elementarnemu dogodku $s \in S$ priredimo pripadajočo realizacijo x spremenljivke $X(s) = x \in X$



Ker so izidi poskusa različni in naključni zavzame tudi spremenljivka X različne in naključne vrednosti

$\Rightarrow$ X je naključna spremenljivka

Naključna spremenljivka $X(s)$ je predpis ali funkcija, ki vsaki vzorčni točki s prostora S priredi vrednost x.

$$x = X(s),\ s \in S$$

Predpis $X(s)$ je smiseln, če vsakemu elementarnemu dogodku $s \in S$ pripada ena sama vrednost $x \in X$.

Primer: Metanje kocke. S predpisom $X(s)$ izidu poskusa (stranici kocke) enolično priredimo vrednosti $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$

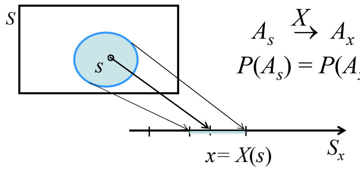
Vzorčni prostor S označuje definicijsko območje naključne spremenljivke $X(s)$.

Množica vrednosti kamor se preslikajo dogodki S imenujemo zaloga vrednosti S_x naključne spremenljivke X.

Primer: Metanje kocke. S predpisom $X(s)$ izidu poskusa (stranici kocke) priredimo naključno spremenljivko X z zalogo vrednosti $S_x = [1,6]$.

Elementarnemu dogodku $s \in A_s$ z naključno spremenljivko X priredimo vrednost $x \in A_x$

Kadar je X opredeljena tako, da je verjetnost dogodka $A_s \in S$ določena za vsak dogodek $A_x \in S_x$ pravimo, da je X merljiva funkcija na S.



$$A_s \xrightarrow{X} A_x$$
$$P(A_s) = P(A_x)$$

Naključna spremenljivka X je določena s svojo zalogo vrednosti S_x in verjetnostjo, da X zavzame vrednostjo $x \in S_x$.

Predpis, ki določa te verjetnosti se imenuje porazdelitveni zakon ali porazdelitvena funkcija verjetnosti naključne spremenljivke.

Slučajne spremenljivke bomo označevali z velikim črkami s konca abecede $X, Y, Z,$ .. ali $X_1, X_2,$ .. vrednost pa z ustrezno malo črko $x, y, z, \ldots$

Dogodek, da naključna spremenljivka X zavzame vrednost x zapišemo.

$$(X=x)$$

Dogodki, ki jih lahko opišemo s slučajno spremenljivko so še naprimer:

$$(X < x),\ (X \geq x),\ (x_1 < X < x_2),\ ....$$

Glede na naravo zaloge vrednosti S_x razlikujemo:

Diskretne *naključne spremenljivke*: zaloga vrednosti S_x je števna množica vrednosti (Primer: Izidi meta kocke)

Zvezne *naključne spremenljivke*: zaloga vrednosti S_x je kontinuum. (Primer: zaustavljanje vrtečega obdelovanca)

Mešane *naključne spremenljivke*: zaloga vrednosti S_x je sestavljena iz obeh zveznih diskretnih dogodkov.

V nadaljevanju bomo:

- podrobneje opredelili pojem porazdelitve verjetnosti oziroma porazdelitvene funkcije
- podali njihove osnovne lastnosti
- predstavili nekatere porazdelitvene funkcije, ki jih pogosteje uporabljamo pri opisu naključnih pojavov.