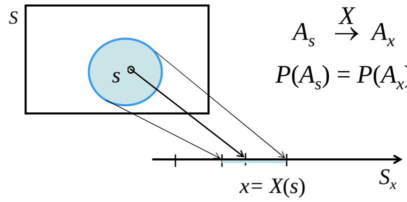
Povzetek vsebine prejšnjega predavanja

Elementarnemu dogodku $s \in A_s$ z naključno spremenljivko X priredimo vrednost $x \in A_x$



$$A_s \xrightarrow{X} A_x$$

$$P(A_s) = P(A_x)$$

Verjetnosti dogodkov A_s in A_x sta enaki:

$$P(A_s) = P(A_x)$$

Naključno spremenljivko X oziroma pripadajoči naključni pojav najizčrpneje opišemo, če poznamo *porazdelitev verjetnosti* X.

V nadaljevanju bomo zato:

- podrobneje opredelili pojem porazdelitve verjetnosti oziroma porazdelitvene funkcije
- podali njihove osnovne lastnosti
- predstavili nekatere porazdelitvene funkcije, ki jih pogosto srečamo pri opisu naključnih pojavov.

4.2 Porazdelitev verjetnosti

4.2.1 Porazdelitev verjetnosti diskretne naključne spremenljivke

Diskretna naključna spremenljivka X je spremenljivka, ki ima za *zalogo vrednosti števno neskončno množico* $S_x=\{x_1, x_2,..., x_i,..., x_n\}$.

Naključni dogodek, ko pri poskusu izmerimo vrednost x_i označimo z $A_i =\{X = x_i\}$.

Vsakemu dogodku $\{X = x_i\}$ pripada ustrezna verjetnost :

$$P\{X = x_i\}=p_i$$

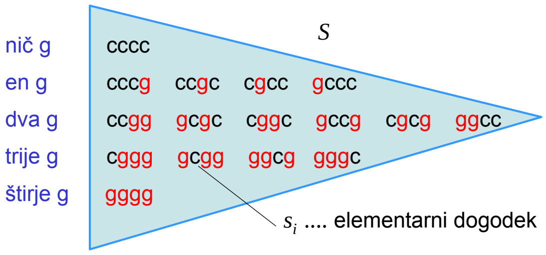
Porazdelitev verjetnosti naključne spremenljivke X po vzorčnem prostoru S_x je opisana z množico vrednosti :

$$\{p_1, p_2,..., p_i,..., p_n\}.$$

Najpogosteje jo predstavimo tabelarično z *verjetnostno shemo*:

$$X : \begin{Bmatrix} x_1, x_2,..., x_i,..., x_n \\ p_1, p_2,..., p_i..., p_n \end{Bmatrix}$$

Primer : Metanje štirih kovancev. Zanima nas, kolikokrat se pri metu pojavi grb.



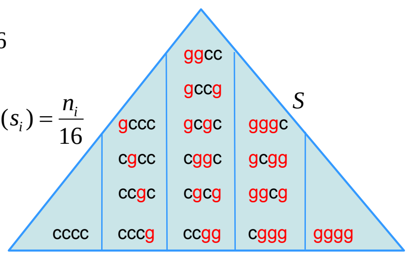
$S=\{s_i, i=1, ..., n=16\}$, $s_i \cap s_j=Ø$, $P(s_i)=1/n=1/16$

Izide poskusov, pri katerih se pojavi i grbov, predstavimo s sestavljenimi dogodki A_i :

$P(s_i)=1/n=1/16$

$s_i \cap s_j=Ø$

$$P(A_i) = \sum_{i=1}^{n_i} P(s_i) = \frac{n_i}{16}$$



$S \;=\; \{ \quad A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4 \quad \}$

$P(A_i) = \{ \quad 1/16, \quad 4/16, \quad 6/16, \quad 4/16, \quad 1/16 \quad \}$

Sestavljene dogodke A_i opišemo z naključno spremenljivko X :

$$A_i \Rightarrow x_i = i, \quad i=0,...,4$$

$$\mathrm{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

Katere porazdelitev verjetnosti opišemo z *verjetnostno shemo*:

$$X : \begin{Bmatrix} x_1, x_2,..., x_i,..., x_n \\ p_1, p_2,..., p_i..., p_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0, & 1, & 2, & 3, & 4 \\ \frac{1}{16}, & \frac{4}{16}, & \frac{6}{16}, & \frac{4}{16}, & \frac{1}{16} \end{Bmatrix}$$

<u>Verjetnostna funkcija diskretne naključne spremenljivke:</u>

Porazdelitev verjetnosti diskretne naključne spremenljivke X lahko podamo z *verjetnostno funkcijo* :

$$p(x) = f_X(x) = P(X = x_i) = p_i$$

Lastnosti verjetnostne funkcije $f_X(x)$:

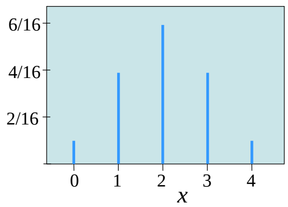
$$0 \leq f_X(x) \leq 1, \qquad za\ vsak\ x \in X$$

$$\sum_X f_X(x) = 1$$

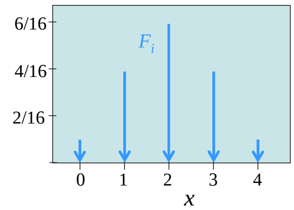
Primer : Metanje kocke. *Verjetnostna funkcija*, da se pri n=4 metih zgodi dogodek A_i da pade grb x krat.

$$f_X(x) = p(x) = \frac{4!}{x!(4-x)!} 0.5^x 0.5^{(4-x)}$$

Graf *verjetnostne funkcije* $f_X(x)$:



Mehanična interpretacija porazdelitve verjetnosti:



Če poznamo verjetnostno funkcijo $f_X(x)$ slučajne spremenljivke X, je verjetnost, da X zavzame kako vrednost na intervalu $[a,b]$, podana z:

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_i \leq b} f_X(x) = \sum_{a \leq x_i \leq b} p(x_i)$$

<u>Zbirna (kumulativna) porazdelitvena funkcija:</u>

Porazdelitev verjetnosti diskretne naključne spremenljivke X lahko podamo tudi z *zbirno porazdelitveno funkcijo*, ki je opredeljena z:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Lastnosti zbirne porazdelitvene funkcije $F_X(x)$:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1, \qquad za\ vsak\ x \in X$$

$$za\ x_1 \leq x_2, \quad F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

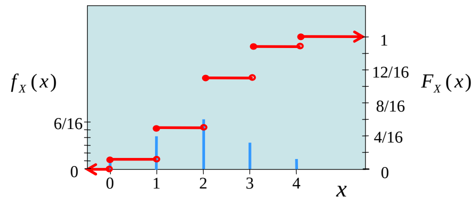
V skladu s to definicijo je *porazdelitvena funkcija* $F_X(x)$ podana na posameznih intervalih :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty, x_1) \\ p_1 & [x_1, x_2) \\ p_1 + p_2 & [x_2, x_3) \\ p_1 + ... + p_{i-1} & [x_{i-1}, x_i) \\ 1 & [x_n, \infty) \end{cases}$$

Primer : Metanje kocke. *Porazdelitvena funkcija*, da se pri n=4 metih zgodi dogodek A_i da pade grb x krat.

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{16} & 0\le x<1 \\ \frac{5}{16} & 1\le x<2 \\ \frac{11}{16} & 2\le x<3 \\ \frac{15}{16} & 3\le x<4 \\ 1 & 4\le x \end{cases}$$

Graf *porazdelitvene funkcija*, za dogodke A_i, da se pri n=4 metih x krat zgodi grb:



Porazdelitvena funkcija je monotono naraščajoča, odsekoma zvezna:

$$F_X(x_i)=F(x_i-0)+P(X=x_i)$$
$$F_X(x_i)=F(x_i+0)$$

Iz opredelitve porazdelitvene funkcije sledi:

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x)=F_X(-\infty)=P(X\le-\infty)=0$$
$$\lim_{x\to\infty} F(x)=F(\infty)=P(X\le\infty)=1$$

Če poznamo porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ slučajne spremenljivke X, je verjetnost, da X zavzame kako vrednost na intervalu $(a,b]$, podana z:

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

4.2.2 Porazdelitev verjetnosti zvezne naključne spremenljivke

Zaloga vrednosti ***zvezne*** naključne spremenljivke X je predstavljena z intervalom realnih vrednosti

$$x\in[a,b];\ a,\ b,\ x\in\Re,$$

ali kontinuumom.

Primeri : Položaj obdelovanca na stružnici $x\in[0,2\pi]$;
Premer gredi $x\in[0,2]$;
Električna upornost bakrene žice $x\in[0,2]$;

Verjetnost zvezne naključne spremenljivke X, da se pri poskusu zgodi elementarni dogodek a, oziroma da pomerimo natančno določeno vrednost x, je:

$$P(X=x)=0$$

Opis porazdelitve verjetnosti z:
- verjetnostno shemo
- verjetnostno funkcijo

je neprimeren oziroma ni mogoč.

Verjetnost zvezne naključne spremenljivke X , da se zgodi sestavljen dogodek A_x, oziroma da pri poskusu pomerimo vrednost x, ki se nahaja v nekem intervalu širine $d>0$ je :

$$P(X\in A_x)\ge 0$$

Zbirna porazdelitvena funkcija določa porazdelitve verjetnosti za posamezne intervale

$$P(a<X\le b)=F_X(b)-F_X(a)$$

Zbirna porazdelitvena funkcija

Porazdelitev verjetnosti zvezne naključne spremenljivke X podamo z *zbirno porazdelitveno funkcijo*, ki je opredeljena z:

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

Pri tem $(X \le x)$ predstavlja dogodek A_x, da pri poskusu izmerimo vrednost na navzdol neomejenem intervalu:

$$A_x = \{X \in (-\infty, x]\}$$

Lastnosti zbirne porazdelitvene funkcije $F_X(x)$:

$F_X(x)$ je opredeljena za vsak $x \in \Re$

Zaloga vrednosti realne zvezne naključne spremenljivke X je v splošnem opredeljena na omejenem intervalu $X \in [a,b]$.

Lastnosti $F_X(x)$ na intervalu $X \in (-\infty, a)$:

Verjetnost, da izmerimo vrednost spremenljivke $X \in (-\infty, a)$ je enaka 0. Po definiciji $F_X(x)$ zato velja:

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = P(X < a) = 0$$

Lastnosti $F_X(x)$ na intervalu $X \in [a, \infty)$:

Verjetnost, da izmerimo vrednost spremenljivke $X \in [a, \infty)$ je enaka 1. Po definiciji $F_X(x)$ zato velja:

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = P(a \le X < \infty) = 1$$

Lastnosti $F_X(x)$ na končnem intervalu $X \in [a, b]$:

V ta namen primerjajmo $F_X(x)$ v dveh točkah x_1 in $x_2 \in [a, b]$. Za $x_1 \le x_2$ lahko zapišemo:

$$(-\infty, x_2] = (-\infty, x_1] \cup (x_1, x_2]$$

$$P(X \in (-\infty, x_2]) = P(X \in (-\infty, x_1]) + P(X \in (x_1, x_2])$$

$$F_X(x_2) = F_X(x_1) + P(X \in (x_1, x_2])$$

$$P(X \in (x_1, x_2]) \ge 0$$

$$\Rightarrow \qquad F_X(x_2) \ge F_X(x_1), \text{ za } x_2 \ge x_1$$

$$F_X(x_2) \ge F_X(x_1), \quad \text{za vsak } x_2 \ge x_1 \in [a, b]:$$

$\Rightarrow$ $F_X(x)$ monotona naraščajoča z zalogo vrednosti $[0, 1]$

Če upoštevamo, da je $x_1 = x_2 - \in$ lahko

$$F_X(x_2) = F_X(x_1) + P(X \in (x_1, x_2])$$

zapišemo:

$$F_X(x_2) = F_X(x_2 - \in) + P(X \in (x_2 - \in, x_2])$$

Za $\in \to 0$ velja:

$$F_X(x_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \{F_X(x_2 - \varepsilon) + P(X \in (x_2 - \varepsilon, x_2])\}$$

$$F_X(x_2) = F_X(x_2 - 0) + P(X = x_2)$$

Za zvezno spremenljivko velja $P(X = b) = 0$:

$$\Rightarrow \quad F_X(x_2) = F_X(x_2 - 0)$$

$$F_X(x_2) = F_X(x_2 + 0)$$

$F_X(x)$ zvezne naključne spremenljivke X je zvezna funkcija.

Funkcija gostote porazdelitve verjetnosti

Verjetnost P, da zvezna naključna spremenljivka X zavzame vrednost iz zaloge vrednosti $X \in [a,b]$:

$$P(X=x)=0$$

Zalogo vrednosti $X \in [a,b]$, razdelimo na množico nepovezanih podintervalov:

$$\{A_i(x_i)=(x_i, x_i+\Delta x_i\}$$

Verjetnost P, da zvezna naključna spremenljivka X zavzame vrednost v poljubnem intervalu $A_x=(x, x+\Delta x)$, zapišemo:

$$P(x < X \le x+\Delta x)=\Delta P(x)=F_X(x+\Delta x)-F_X(x)$$

V zgornjem izrazu je P odvisen od širine Δx zato:

$$\frac{\Delta P(x)}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$$

In podamo limito izraza:

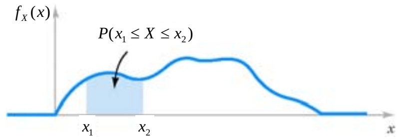
$$f_X(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta P(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$$
$$=\frac{\mathrm{d}\,P(x)}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\mathrm{d}\,F(x)}{\mathrm{d}\,x}=F'(x) \quad ,$$

ki jo imenujemo funkcija gostote verjetnosti.

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\,P(x)=f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ki označuje verjetnost, da pri poskusu izmerimo vrednost X v intervalu širine dx .

Na osnovi funkcije gostote verjetnosti lahko izrazimo verjetnost $P(x_1 \le X \le x_2)$:



$$P(x_1 < X \le x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$=\int_{-\infty}^{x_2} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x-\int_{-\infty}^{x_1} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$=F_X(x_2)-F_X(x_1)$$

Na osnovi definicije funkcije gostote verjetnosti velja tudi povezava :

$$F_X(x_1)=\int_{-\infty}^{x_1} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$

in lastnosti porazdelitve gostote verjetnosti :

$$f_X(x)\ge 0 \quad x\in[a,b]$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x=1$$

4.3 Določitev porazdelitvenih funkcij

Porazdelitveno funkcijo lahko določimo:

1) empirično iz izmerjenih relativnih frekvenc

2) analitično na osnovi predpostavk o lastnostih dogodkov

Pri analitičnem postopku upoštevamo naslednje:

a) Če S_x sestoji iz N nepovezanih toda enako verjetnih dogodkov A_i, potem je verjetnost $P(A_i)$ =1/N

b) Če se zgodi nek dogodek B pri N_B poskusih iz množice A_i je verjetnost dogodka B je $P(B)$=1/N_B

Pri določanju števila možnih dogodkov uporabljamo metode *kombinatorike*.

Obravnavamo dve množici:

$O(N)$ ... ki ima N elementov - objektov

$S(M)$ ... ki ima M elementov - mest

Sprašujemo se po številu možnih razporeditev N objektov na M mest ?

1) $N=M$: Število možnih razporeditev N objektov na $M=N$ mest je :

$$R = M(M-1)(M-2)\ldots(M-N+1) = M! = N!$$

2) $N<M$: Število možnih razporeditev N objektov na $M>N$ mest, M-N mest ostane nerazporejenih:

$$R = M(M-1)\cdots(M-N+1)$$
$$= \frac{M(M-1)\cdots(M-N+1)(M-N)\cdots(M-M+1)}{(M-N)\cdots(M-M+1)}$$
$$R = \frac{M!}{(M-N)!}$$

3) $N>M$: Število možnih razporeditev N objektov na $M<N$ mest. N-M objektov ostane nerazporejenih.

Na prvo mesto razporedimo enega od N objektov, na drugo enega od (N-1) ..

$$R = N(N-1)\cdots(N-M+1)$$
$$= \frac{N(N-1)\cdots(N-M+1)(N-M)\cdots(N-N+1)}{(N-M)\cdots(N-N+1)}$$
$$= \frac{N!}{(N-M)!}$$

4) $N=M$: V N je E enakih objektov. Razporeditve, pri katerih so E medsebojno zamenjani, se ne razlikujejo. Razporejamo N-E različnih objektov na N mest. (N-E)<M=N

$$R = \frac{N!}{(N-(N-E))!} = \frac{N!}{E!}$$

⇒ Skupina E enakih objektov v množici N objektov povzroči, da se število razporeditev zmanjša tolikokrat kolikor je razporeditev te skupine

5) $N=M$: V N je E enakih objektov vrste A in $F = N$-E enakih objektov vrste B. Z upoštevanjem prejšnje ugotovitve lahko zapišemo število razporeditev:

$$R = \frac{N!}{E!F!} = \frac{N!}{E!(N-E)!} = \binom{N}{E}$$

$\binom{N}{E}$ Binomski koeficient

4.3.2 Binomska porazdelitev

Primeri poskusov in naključnih spremenljivk:

1) N metov kovanca, X=število grbov.

2) Stroj izdela z 1% izmetom, X =število slabih izdelkov v naslednjih 25 izdelkih

3) Naslednjih 20 rojstev otrok, X = število deklic.

4) 10% vseh poslanih bitov je prispelo z napako, X = število bitov z napako v naslednji 5 poslanih bitih.

Skupne lastnosti omenjenih poskusov in naključnih spremenljivk:

Imamo zaporedje naključnih poskusov.

Izid poskusa je bodisi, X zgodi ali X se ne zgodi,

dober ali *slab*,

A ali B

1 ali 0

Naključni poskus pri katerem sta možna samo dva izida "*dober*" ali "*slab*" imenujemo *Bernoullijev poskus*

Vzorčni prostor *Bernoullijevega poskusa* je predstavljen z izidoma:

$$S=\{dober, slab\},$$

ki mu priredimo naključno bernoulijevo spremenljivko X z zalogo vrednosti:

$$S_X=\{1,0\}$$

Najpogosteje se tudi privzame, da so izidi poskusa *nepovezani* s *konstantno verjetnostjo.*

Izpeljava binomske porazdelitve:

Označimo izida Bernoulijevega poskusa z nepovezanima dogodkoma A in B:

$S=(A,B)$, kjer je $B=A^C$

Verjetnost:

$P(A) = p$, in $P(B)=q$

Dogodka A in B sta nepovezana:

$$P(S)=P(A \cup B) = P(A) + P(B) = p + q = 1$$

$\Rightarrow$ $q=1-p$

Naredimo serijo n poskusov, v katerih se dogodka A in B pojavljata *neodvisno* s konstantno verjetnostjo p in q.

Zanima nas verjetnost, da se v seriji n poskusov dogodek A zgodi x-krat.

Primeri sestavljenih dogodkov A_x kjer se v n poskusih A pojavi x krat:

B	A	A	B	B	A	A	A	$n = 8$, $x= 5$
B	B	B	B	B	A	B	A	$n = 8$, $x= 2$
B	A	B	B	B	A	A	A	$n = 8$, $x= 4$
B	A	A	A	A	B	B	B	$n = 8$, $x= 4$

Verjetnost za nastop posameznega sestavljenega dogodka $A_{x,i}$ v katerem so si dogodki A in B z verjetnostjo p *in* q *neodvisni*:

B	A	A	B	B	A	A	A	$n = 8$, $x= 5$
q	p	p	q	q	p	p	p	$P=p^5 q^2$

$$P(A_{x,i}) = p^x q^{n-x} = p^x (1-p)^{n-x}$$

Enaka verjetnost tudi vsem ostalim N_x sestavljenim dogodkom $A_{x,i}$ kjer se dogodek A zgodi x - krat.

Število N_x vseh ostalih sestavljenih dogodkov A_x kjer se A zgodi x – krat in B (n-x) krat je:

$$\frac{n!}{x!(n-x)!} = \binom{n}{x}$$

Množica N_x sestavljenih dogodkov $A_{x,i}$ so med seboj nepovezani.

Verjetnost, za nastop dogodka A_x:

$$P(A_x) = P(x) = \bigcup_{i=1}^{N_x} P(A_{x,i}) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Definicija

Naključni poskus, ki se sestoji iz n ponovitev tako da:

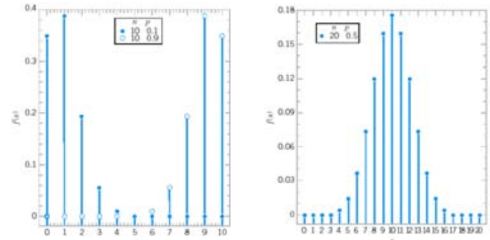
1. ponovitve poskusov so neodvisne
2. vsaka ponovitev ima samo dva možna izida, ki ju označimo z "dober" in "slab"
3. verjetnost za "dober" izid je p in je konstantna

Imenujemo binomski naključni poskus.

Naključna spremenljivka X, ki je enaka številu "dobrih" izidov x ima binomsko porazdelitev:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Primeri grafov binomske porazdelitve v odvisnosti od n in p:



Distribucija postane bolj simetrična za $p = 0 \to 0.5$ in za $p\ 1 \to 0.5$.

4.3.3 Poissonova porazdelitev

Obravnavajmo prenos n bitov podatkov. Naključna spremenljivka X= *število bitov z napako.*

Za $P(X)$ = konstanten in neodvisen od prenosa,
$\Rightarrow$ X opišemo z binomsko porazdelitvijo.

Ob predpostavki, da prenos podatkov oziroma n narašča in hkrati verjetnost za napako $P(X)$ upada tako, da je produkt:

$$np = \theta \approx 1$$

Izpeljava Poissonove poradelitve:

Izraz za binomsko porazdelitev:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

preoblikujemo v:

$$P(x) = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\theta}{n}\right)^x \left(1-\frac{\theta}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\theta^x}{x!}\left(1-\frac{\theta}{n}\right)^n \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}\left(1-\frac{\theta}{n}\right)^{-x}$$

Za n zelo velik in x majhen, n>>x :

$$P(x) = \frac{\theta^x}{x!}\underbrace{\left(1-\frac{\theta}{n}\right)^n}_{\approx e^{-\theta}} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}}_{\approx 1}\underbrace{\left(1-\frac{\theta}{n}\right)^{-x}}_{\approx 1}$$

dobimo izraz za:

$$\lim_{n\to\infty} P(X = x) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}$$

in ob upoštevanju:

$$P(X = x) = e^{-pn}\frac{(np)^x}{x!}$$

Dobljeno Poissonova porazdelitev:

$$P(X = x) = e^{-pn}\frac{(np)^x}{x!}$$

$n.p = \theta$ ... povprečna vrednost X

najpogosteje srečamo pri določanju števila napak, poškodb, pri prevarjanju kvalitete n izdelkov, za n>>x.

Primer: V tovarni izločijo v povprečju 2 na 1000 izdelkov, p=2.10^{-3}.

Določimo verjetnost, da opazimo, tri slabe izdelke v skupini 1000 izdelkov

1) Izdelava izdelkov je medsebojno neodvisna

2) p=2.10^{-3} << 1 in n >>1

$\Rightarrow$ Lahko uporabimo Poissonovo porazdelitev

$$np = \theta = 2$$

$$P(X=3) = e^{-pn}\frac{(np)^x}{3!} = e^{-2}\frac{(2)^3}{3!} = 0.18$$

Še en primer uporabe Poissonove porazdelitve:

Relativno pogostost nastop dogodka A pogosto opišemo s povprečnim številom θ dogodkov A v nekem intervalu opazovanja bodisi v času t, na površina s ali volumnu v.

Primer: Pri proizvodnji zgoščenk je zaznanih vpovprečju 0.1 škodljivih delcev na cm^2. Število škodljivih delcev ima Poissonovo porazdelitev.

Kolika je verjetnost da na cm^2 nastopi 1 delec?

Definicija

Interval opazovanja nastopov dogodkov A lahko razdelimo na podintervale dovolj majhne, da je :

- verjetnost, da se v podintervalu nahaja več kot en dogodek A enaka *0*.
- verjetnost dogodka A je enaka za vse podintervale in je sorazmerna velikosti podintervala in
- Verjetnost da nastopi dogodek A v podintervalu je neodvisen od nastopa v prejšnjem podintervalu

Tak poskus se imenuje *Poissonov process*

Za *Poissonov proces* velja, če je povprečno število nastopov dogodka A v intervalu enako $\theta > 0$. Ima naključna spremenljivka $X=x$ dogodkov A v intervalu Poissonovo porazdelitev podano z:

$$P(X=x) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Primer: Pri proizvodnji zgoščenk je zaznanih v povprečju 0.1 škodljivih delcev na cm^2 Kolika je verjetnost, da na cm^2 nastopi 1 delec?

$$P(X=1) = e^{-0.1}\frac{(0.1)^x}{x!} = 0.09$$

4.3.4 Hipergeometrična porazdelitev

Problem: Dnevna proizvodnja N proizvodov vsebuje V proizvodov z napako. Brez nadomeščanja iz N izberemo naključno n proizvodov.

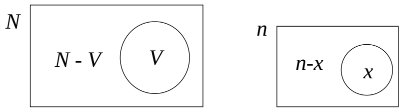
Kolika je verjetnost, da je v n izbranih x proizvodov z napako.

Za splošno vpeljavo *hipergeometrične* porazdelitve obravnavajmo:

skupino N objektov, ki vsebuje V objektov iste vrste *A*. Brez nadomeščanja zberemo podskupino z n objekti.

Iščemo verjetnost $P(X=x)$, da bo v naključno izbrani podskupini z n objekti, x objektov te vrste *A*.

Dogodek A: označuje vključitev objekta vrste *A* v podskupino n objektov,
dogodek A^C: pa vključitev ostalih objektov v podskupino n objektov



Vseh možnih podskupin n objektov iz skupine N je:

$$\binom{N}{n}$$

x objektov iz množice V objektov A izberemo na $\binom{V}{x}$ načinov.

n-x objektov A^C iz preostalih N-V objektov na $\binom{N-V}{n-x}$ načinov.

Poradelitev verjetnost za dogodek X, da množica n objektov vključuje x objektov skupine A in n-x objektov skupine A_C se imenuje *hipergeometrična* in je opredeljena z:

$$P(X=x)=\frac{\binom{V}{x}\binom{N-V}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Pri naraščanju $N \to \infty$ se ob konstantnem razmerju V/N približuje binomski, ki ustreza vzorčenju z vračanjem.

Primer : Zaboj vsebuje 100 ojnic lokalnega dobavitelja in 200 ojnic tujega dobavitelja. Naključno brez nadomeščanja izberemo 4 ojnice. Kolika je verjetnost, da so vse štiri izbrane od lokalnega dobavitelja $P(X=4)$?

$$P(X=x)=\frac{\binom{V}{x}\binom{N-V}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{100}{4}\binom{300-100}{4-4}}{\binom{300}{4}}=0.0119$$