Povzetek vsebine prejšnjega predavanja

Porazdelitveni zakon

Porazdelitveni zakon verjetnosti zvezne naključne spremenljivke X podamo z zbirno porazdelitveno funkcijo, ki je opredeljena z:

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

Pri tem $(X \le x)$ predstavlja dogodek A_x, da pri poskusu izmerimo vrednost na navzdol neomejenem intervalu

$$A_x = \{X \in (-\infty, x]\}$$

Opredelimo jo lahko kot:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$

kjer je $f_X(x)$ gostota verjetnosti:

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}\,P(x)}{\mathrm{d}\,x} = \frac{P(x \le X \le x + \mathrm{d}\,x)}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,F_X}{\mathrm{d}\,x}$$

Lastnosti porazdelitve verjetnosti:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x; \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

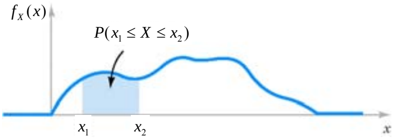
$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

$$0 \le F_X(x) \le 1$$

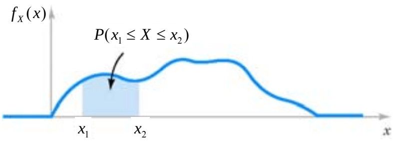
Lastnosti porazdelitve gostote verjetnosti:

$$f_X(x) \ge 0 \quad x \in [a,b]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$$



Na osnovi funkcije gostote in porazdelitve verjetnosti lahko izrazimo verjetnost $P(x_1 \le X \le x_2)$:



$$P(x_1 < X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \int_{-\infty}^{x_2} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_{-\infty}^{x_1} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

4.3.5 Enakomerna porazdelitev

Naključna spremenljivka X je porazdeljen enakomerno na intervalu $[a, b]$, če ima gostoto porazdelitve, ki je konstantna na tem intervalu in enaka 0 izven intervala:

$$f_X(x) = \begin{cases} C, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Na osnovi pogoja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C\,\mathrm{d}\,x = \int_{a}^{b} C\,\mathrm{d}\,x = C(b-a) = 1 \qquad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{(b-a)}$$

Funkcija gostote verjetnosti enakomerno porazdeljene naključne spremenljivke X na končnem intervalu $[a, b]$ je poda z:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)}, & x \in [a,b] \\ 0 \quad , & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Zbirna porazdelitvena funkcija je opisana na intervalu $x < a$:

$$F_X(x) = 0$$

na intervalu $a \leq x \leq b$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{a}^{x} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = 0 + \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x}\mathrm{d}\,x = \frac{x-a}{b-a}$$

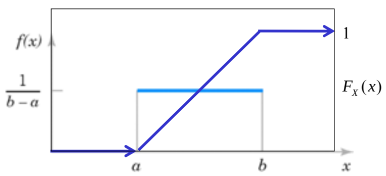
na intervalu $x > b$:

$$F_X(x) = 0$$

$\Rightarrow$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in (a,b] \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

Grafa gostote verjetnosti in porazdelitvene funkcije:



4.3.6 Normalna porazdelitev

1733 De Moivre, Binomska porazdelitev $N \to \infty$

1830 Gauss neodvisno

Poleg aproksimacije binomske porazdelitve ima normalna porazdelitev velik pomen pri opisu naključnih pojavov.

Zaporedje n neodvisnih naključnih poskusov opišemo z naključno spremenljivko X . Izvedemo N ponovitev z n poskusi. Povprečna vrednost $< X >$ ima normalno poraz.

Naključna spremenljivka X s funkcijo gostote verjetnosti:

$$f_X(x) = N(x; m, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

se imenuje normalna naključna spremenljivka X .

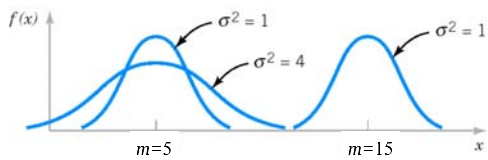
$\mathcal{N}(x; m, \sigma)$ se imenuje normalna ali Gaussova funkcija gostota porazdelitve.

Parametra m in σ se imenujeta srednja vrednost in standardna deviacija ter določa center porazdelitve in *raztros okoli* m :

$$-\infty < m < \infty$$

$$0 < \sigma$$

Grafi normalne porazdelitve za različne m in σ:



Nekatere lastnosti funkcije gostote verjetnosti normalne spremenljivke:

Funkcija je pozitivna in simetrična:

$$f_X(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty; \qquad f_X(m+x) = f_X(m-x)$$

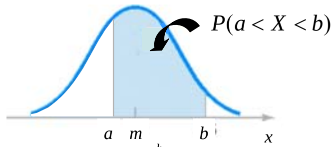
Kot za vsako gostoto verjetnosti velja tudi za normalno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \aleph(x; m, \sigma) = 1$$

Funkcije gostote verjetnosti ima maksimum pri m:

$$\aleph(x = m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

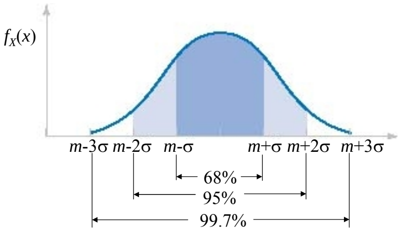
Verjetnost, da se X nahaja v nekem intervalu a,b:



$$P(a < X < b) = \int_a^b \aleph(x; m, \sigma)$$

Za normalno porazdeljeno naključno spremenljivko X velja:

$$P(m-\sigma < X < m+\sigma) = 0.6827$$
$$P(m-2\sigma < X < m+2\sigma) = 0.9545$$
$$P(m-3\sigma < X < m+3\sigma) = 0.9973$$



Standardna normalna spremenljivka

Normalna naključna spremenljivka X z

m=0 in σ^2=1

se imenuje standardna normalna spremenljivka in jo označimo s Z.

Standardizacija normalna spremenljivke

Poljubno normalna naključna spremenljivko X z

$m \neq 0$ in $\sigma^2 \neq 1$

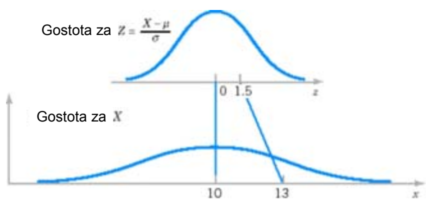
lahko s pomočjo transformacije, (standardizacije)

$$X \to Z = \frac{X-m}{\sigma}$$

prevedemo na standardno normalno spremenljivko.

Grafična ponazoritev standardizacije gostote verjetnosti normalne spremenljivke X :

$$X \to Z = \frac{X-m}{\sigma}$$



Kumulativna porazdelitvena funkcija normalne spremenljivke X:

Po definiciji porazdelitvene funkcije velja:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

S substitucijo:

$$z = \frac{x-m}{\sigma}, \quad \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{\sigma}$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,\mathrm{d}z =$$

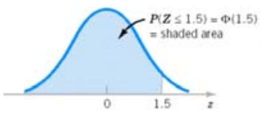
$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-z^2}{2}}\,\mathrm{d}z}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{\frac{-z^2}{2}}\,\mathrm{d}z}_{\Phi(z)}$$

Kjer je $\Phi(z)$ Laplace-ova funkcija

$\Rightarrow$:

$$F_Z(z) = \frac{1}{2} + \Phi(z), \quad z = (x-m)/\sigma$$

Za praktične potrebe je porazdelitvene funkcija $F(z)$ tabelirana in se uporablja pri izračuni verjetnosti normalno porazdeljene spremenljivke:



z	0.00	0.01	0.02	0.03
0	0.50000	0.50399	0.50398	0.51197
⋮		⋮		
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699

Povezava med porazdelitvijo verjetnosti normalne in standardne spremenljivke:

Primer: Normalno porazdeljena naključna spremenljivka X ima srednjo vrednost m=10 in standardno deviacijo σ=2. Določi vrednost x pri kateri je verjetnost, da je $P(X < x)$=0.98

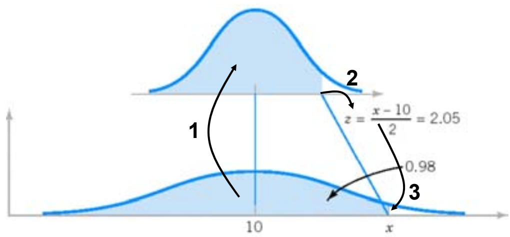
$$P(X \le x) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \le \frac{x-m}{\sigma}\right) =$$

$$= P(Z \le z) = 0.98 \quad \Rightarrow P(Z \le 2.05) = 0.9798$$

$$2.05 = \frac{x-m}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad x = \sigma \cdot 2.05 + 10 = 14.1$$

Grafični prikaz povezave

$$P(X \le x) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \le \frac{x-m}{\sigma}\right) = P(Z \le z)$$



23

4.3.6 Eksponentna porazdelitev

Pri vpeljavi Poisson-ove porazdelitve nas je zanimala naključna spremenljivka X, ki opisuje število dogodkov A na enoto časa ali dolžine.

Pogosto nas zanimata tudi čas ali razdalja do nastopa naključnega dogodka A. Čas in razdalja sta tudi naključni spremenljivki X.

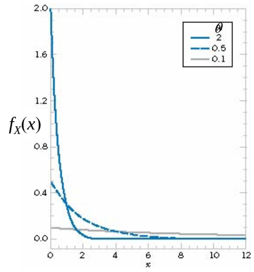
Ob predpostavki, da je θ povprečna vrednost nastopa dogodka A, ki je izid Poisson-ovega procesa, je funkcija gostote verjetnosti X časa nastopa dogodka A opredeljena z eksponentno porazdelitvijo:

$$f_X(x) = (x;\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}\, e^{-\boldsymbol{\theta} x}; \quad za\ 0 \le x \le \infty$$

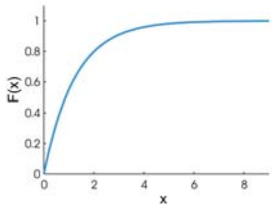
Pripadajoča porazdelitvene funkcija je opredeljena z:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = 1 - e^{-\boldsymbol{\theta} x}; \quad za\ x \ge 0$$

Graf eksponentne gostote verjetnosti za različne θ



Primer porazdelitve verjetnosti



Primer: Prijavljanje za delo na računalniku lahko popišemo s Poissonovim procesom s povprečjem 25 prijav/h Kolika je verjetnost, da 6min ni prijave.

(Verjetnost, da do prijave pride po 6 min.)

θ=25 prijav/uro, X = Čas do prijave

$6\text{min} = 0.1 \text{ ure} \Rightarrow P(X > 0.1)$=?

$$P(X > 0.1) = \int_{0.1}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{0.1}^{\infty} 25 e^{-25x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$= e^{25\cdot 0.1} = 0.082$$

25

Kolika verjetnost, da je se prijava zgodi med 2 in 3 minuto.

$P(2 < X < 3)$=?

$2\text{min} = 0.033 \text{ ure}$ in $3 \text{ min} = 0.05 \text{ ure}$

$$P(0.033 < X > 0.05) = \int_{0.033}^{0.05} 25 e^{-25x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$= e^{25\cdot x}\Big|_{0.033}^{0.05} = 0.152$$

Pazi na skladnost enot !

4.3.7 Še nekatere funkcije gostote verjetnosti

χ^2 Hi-kvadrat porazdelitev

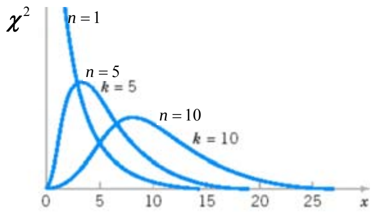
Funkcija gostote verjetnosti hi-kvadrat porazdelitve z n prostostnimi stopnjami je podana z:

$$f_{Z_n}(z) = \chi^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{(\frac{n}{2}-1)} \mathrm{e}^{-z/2}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

kjer je:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}\,t, \quad \text{za } x > 0$$ Gama funkcija

Primeri grafov *hi-kvadrat* porazdelitve v odvisnosti od n :



Porazdelitve χ^2 z rastočim n limitira k normalni gostoti.

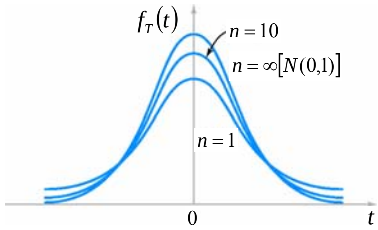
Studentova porazdelitev

Gostoto verjetnosti:

$$f_T(t) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)} \cdot \frac{1}{[(t^2/n)+1]^{(n+1)/2}} \qquad -\infty < t < \infty,$$

Kjer je $\Gamma(\ )$ gama funkcija se imenuje Studentova ali t_n porazdelitev z n prostostnim stopnjami.

Primeri grafov Studentove gostote verjetnosti:



Tudi Studentova porazdelitev gostote verjetnosti z rastočim n konvergira k standardni normalni porazdelitvi.

Snedecorjeva ali *F(u,v)* porazdelitev

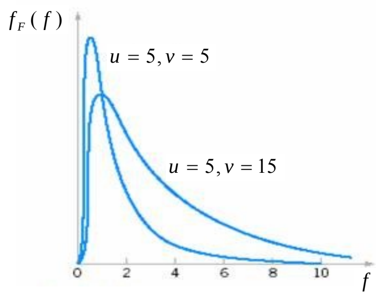
je opredeljena z gostoto:

$$f_F(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2} f^{(u/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\left[\left(\frac{u}{v}\right)f+1\right]^{(u+v)/2}}$$

Kjer je Γ(r) gama funkcija:

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{za } r > 0$$

Primeri grafov porazdelitev F za različne u in v:



4.4 Vektorske naključne spremenljivke

Do sedaj smo obravnavali naključne spremenljivke, ki jih opišemo z eno samo skalarno spremenljivko X .

Pogosto za izčrpen opis pojava potrebujemo več spremenljivk.

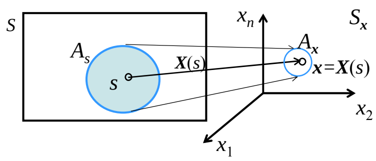
Primer: Opis atmosfere: tlak, temeperatura, vlažnost, ...

Mere izdelkov: premer, dolžina

Hitrost delcev v prostoru: V_x, V_y, V_z

Izide takih poskusov vzorčnega prostora S v splošnem predstavimo z n dimenzionalno vektorsko naključno spremenljivko $\boldsymbol{x}$ oziroma vektorsko funkcijo $\boldsymbol{X}(s)$ naključnega dogodka s:

$$\boldsymbol{X}(s) = (X_1(s), X_2(s), \ldots, X_n(s)) = \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$



$P(A_s) = P(A_x)$

V nadaljnji obravnavi se omejimo na dvodimenzionalno naključno spremenljivko $\boldsymbol{Z}$, s komponentama X in Y.

Primer: a) S tlačnim litjem izdelujemo valjčke dolžine X in premera Y. Sprašujemo po verjetnosti nastopa spremenljivke $\boldsymbol{Z}=(X, Y)$.

b) Izdelek je sestavljen iz dveh komponent A in B. X označuje življenjsko dobo A in Y označuje življenjsko dobo B. Kolika je verjetnost, da je življenjska doba izdelka manjša od t.

Za opis verjetnostnega zakona vpeljemo zbirno porazdelitveno funkcijo **povezane** verjetnosti:

$$F_{XY}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = F_Z(\boldsymbol{z})$$

Kjer je $\boldsymbol{Z}=(X, Y)$ naključna spremenljivka in $\boldsymbol{z}=(x, y)$ vrednost spremenljivke $\boldsymbol{Z}$.

38

Podobno kot za enodimenzionalno naključno spremenljivko velja:

1) Verjetnost za nastop vrednosti z izven območja končnih vrednosti je 0:

$$\lim_{x,y\to-\infty} F_{XY}(x,y) = 0$$

2) Verjetnost, da z zavzame katerokoli vrednost na ravnini x,y je 1:

$$\lim_{x,y\to\infty} F_{XY}(x,y) = 1$$

$\Rightarrow$ $$0 \le F_{XY}(x,y) \le 1$$

Poleg povezane porazdelitve verjetnosti spremenljivk X in Y nas pogosto zanima porazdelitev **verjetnosti posamezne spremenljivke** X ali Y.

Ob upoštevanju, da velja:

$$P(X \le x, Y \le \infty) = P(X \le x)$$

porazdelitev verjetnosti spremenljivke X zapišemo:

$$F_X(x) = F_{XY}(x,\infty) = P(X \le x, Y \le \infty) = P(X \le x)$$

---

in porazdelitev verjetnosti Y:

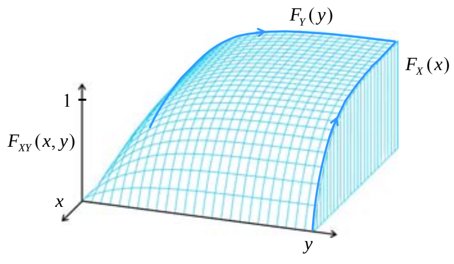
$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y) = P(X \le \infty, Y \le y) = P(Y \le y)$$

Porazdelitvi verjetnosti:

$F_X(x) = F_{XY}(x,\infty)$ in $F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$

imenujemo robni ali koordinatni porazdelitvi verjetnosti.

Primer grafa dvodimenzionalne porazdelitve povezane verjetnosti $F_{XY}(x,y)$ in pripadajoči robni porazdelitvi:



Verjetnost za nastop naključnih spremenljivk X in Y je mogoče izraziti tudi s pomočjo *funkcije gostote* ***povezane*** *verjetnosti*:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

za katero velja:

$$f_{XY}(x,y) \geq 0 \quad \text{za vsak } x \text{ in } y$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 1$$

43

S pomočjo gostote povezane verjetnosti izrazimo porazdelitev povezane verjetnosti $P(Z \leq z)$:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

in robni porazdelitvi verjetnosti:

$$F_X(x) = F_{XY}(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

S pomočjo gostote povezane verjetnosti $f_{XY}(x,y)$ izrazimo tudi robni gostoti verjetnosti:

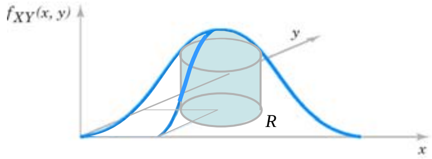
$$f_X(x) = \frac{\partial F_{XY}(x,\infty)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

in

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

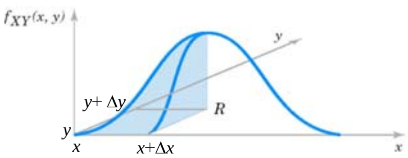
Z pomočjo gostote povezane verjetnosti $f_{XY}(x,y)$ izrazimo verjetnost, da se Z nahaja znotraj nekega območja R



$$P([X,Y] \in R) = \iint_R f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,xdy$$

Pogosto predstavlja R pravokotno področje:

$$R=[(x+\Delta x), (y+\Delta y)]$$



$$P([x \leq X \leq x+\Delta x, y \leq Y \leq y+\Delta y]) = \int_{x}^{x+\Delta x}\int_{y}^{y+\Delta y} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,xdy$$

Δx, Δy majhna $\Rightarrow P = f_{XY}(x,y)\,\Delta x\,\Delta y$

Gostota pogojne verjetnosti

Pri opisu verjetnosti nastopa dveh dogodkov A in B smo vpeljali pojem pogojne verjetnosti:

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ugotovili smo, da v splošnem lahko nastop dogodka B vpliva na verjetnost nastopa dogodka A.

Posledično smo vpeljali kriterij in pojem odvisnega in neodvisnega dogodka.

48

Z vpeljavo pojma gostote pogojne verjetnosti lahko podoben kriterij vpeljemo tudi pri naključnih vektorskih spremenljivkah.

Približek za povezano verjetnosti vektorske spremenljivke Z

$$P(x \le X \le x+dx, y \le Y \le y+dy) =$$
$$P(x \le X \le x+dx \mid y \le Y \le y+dy)\, P(y \le Y \le y+dy)$$

na majhnem področju:

$$R=[(x+\mathrm{d}x), (y+\mathrm{d}y)]$$

lahko z uporabo gostote povezane in robne verjetnosti zapišemo:

$$P(x \le X \le x+dx, y \le Y \le y+dy) = f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

in

$$P(y \le Y \le y+dy) = f_Y(y)\,\mathrm{d}\,y$$

oziroma:

$$f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y =$$

$$P(x \le X \le x+dx \mid y \le Y \le y+dy)\, f_Y(y)\,\mathrm{d}\,x$$

za

$$f_Y(y) \ne 0$$

sledi izraz za pogojno verjetnost:

$$P(x \le X \le x+dx \mid y \le Y \le y+dy) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}\,x$$

$\Rightarrow$ Pogojna verjetnost za X na intervalu $\mathrm{d}x$ je sorazmerna s širino intervala $\mathrm{d}x$.

Zato vpeljemo gostoto pogojne verjetnosti spremenljivke X pri pogoju Y s kvocientom:

$$\frac{P([x \le X \le x+dx \mid y \le Y \le y+dy])}{\mathrm{d}\,x} =$$

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Z gostoto pogojne verjetnosti spremenljivke X izračunamo verjetnost spremenljivke $X \in A$ pri pogoju, da je $Y \in (y+\mathrm{d}y)$.

$$P(X \in A \mid y \le Y \le y+dy) = \int_{x \in A} f_{X|Y}(x \mid y)\,\mathrm{d}\,x$$

Podobno kot pri dogodkih sta tudi spremenljivki X in Y naključno neodvisni če je:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = f_X(x)$$

oziroma:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

5.1 Funkcije skalarnih spremenljivk

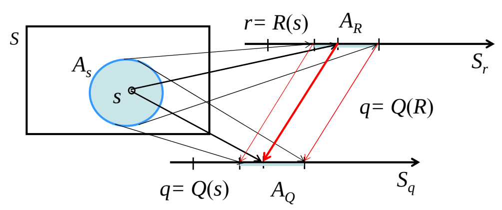
Primer : Zamislimo si poskus, pri katerem izdelamo kroglico. Izid poskusa opišemo:

I. da izdelamo kroglico s polmerom $r \le a$. Dogodek opišemo z intervalom v prostoru polmerov:

$$A_R = \{r : 0 < r \le a;\, r \in S_r\}$$

II. Isti dogodek opišemo v prostoru presekov z:

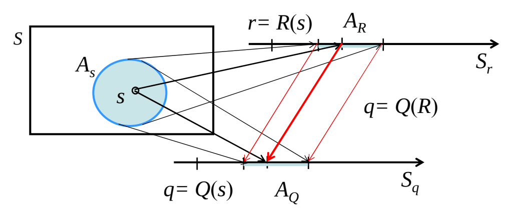
$$A_Q = \{q : 0 < q \le \pi a^2;\, q \in S_q\}$$



$q=Q(s) = Q(R(s)) = Q(R)$

$q= Q(R)$

$f_R(r) \Rightarrow f_Q(q)$



Oba dogodka A_R in A_Q opisujeta isti abstraktni dogodek $A_S \in S$. Zato moremo dogodku A_Q pripisati isto verjetnost kakor dogodku A_R :

$P(A_S)=P(A_R)$ in $P(A_S)=P(A_Q)$

$P(A_Q)= P(A_{Q(R)}) = P(A_R)$

Nadalje velja:

$$P(A_Q) = P(A_R) = P\{r : 0 < \pi r^2 \leq q; r \in S_r\}$$

$\Rightarrow$

Funkcijska zveza podana z $Q=\pi R^2$ generira porazdelitev verjetnosti v prostoru presekov iz porazdelitve verjetnosti v prostoru polmerov.

***Primer* :** Naj bo X diskretna naključna spremenljivka s porazdelitvijo verjetnosti:

$P_X(X=0)=p$ in $P_X(x=1)=1\text{-}p=q$

Določimo porazdelitev verjetnosti za funkcijo:

$Y=X+1$

$P_X(X=0)=p = P_Y(Y=1)$

$P_X(X=1)=q = P_Y(Y=2)$

Določimo porazdelitev verjetnosti za funkcijo:

$Z=X(X\text{-}1)$

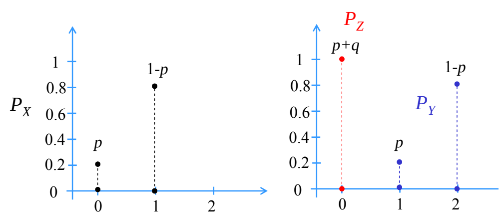
$P_X(X=0)=p = P_Z(Z=0)$

$P_X(X=1)=q = P_Z(Z=0)$

$\Rightarrow P_Z(Z=0)=1$

Grafični prikaz porazdelitev P_X , P_Y in P_Z za funkciji

$Y=X+1$ in $Z=X(X\text{-}1)$:



60

Posplošitev obravnavanega primera:

Podana je porazdelitev F_X naključne spremenljivke X. Zanima nas porazdelitev verjetnosti F_Y spremenljivke Y določene s funkcijo:

$$Y = g(X)$$

S funkcijo g preslikamo:

$$S_X \to S_Y$$

$$A_X \to A_Y \Rightarrow P(A_Y)=P(A_X)$$

Če je to mogoče za vse A_Y je Y funkcija naključne spremenljivke ali Borelova funkcija.

Porazdelitev verjetnosti spremenljivke Y je podana z:

$$F_Y = P(\{x: g(x) \le y, x \in S_X\})$$

Na osnovi povezave:

$$\int_{-\infty}^{y} f_Y(y) = F_Y(y)$$

opredelimo gostoto verjetnosti spremenljivke Y :

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}\,F_Y(y)}{\mathrm{d}\,y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} P(\{x : g(x) \le y, x \in S_X\})$$

Povratno enolične funkcije naključne spremenljivke

I. $Y(X)$ monotono naraščajoča funkcija X :

$$Y = g(X), \quad X = g^{-1}(Y) = h(Y)$$

Za porazdelitveno funkcijo velja:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X \le x) = P(X \le h(y))$$

Ob poznani gostoti porazdelitve spremenljivke X, lahko zapišemo:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Z odvajanjem

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$

po y dobimo:

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}\,F_Y(y)}{\mathrm{d}\,h}\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y} = f_X(h(y))\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y}$$

II. Če $Y(X)$ monotono padajoča funkcija X :

$$Y = g(X), \quad X = g^{-1}(Y) = h(Y)$$

potem velja:

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[X \ge h(y)]$$

$$F_Y(y) = \int_{h(y)}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}\,F_Y(y)}{\mathrm{d}\,h}\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y} = -f_X(h(y))\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y}$$

65

ker je Y monotona padajoča funkcija je:

$$\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y} < 0$$

Zato lahko v primeru, ko je Y monotona funkcija v obeh primerih velja:

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}\,F_Y(y)}{\mathrm{d}\,h}\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y} = f_X(h(y))\left|\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y}\right|$$

Primer : Y je linearna transformacija naključne spremenljivke X:

$$Y = aX + b$$

X ima gostoto verjetnosti $f_X(x)$.

$$X = h(Y) = \frac{Y - b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y} = \frac{1}{a}$$

$$f_Y(y) = f_X(h(y))\left|\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y}\right| = f_X\left(\frac{y - b}{a}\right)\frac{1}{|a|}$$