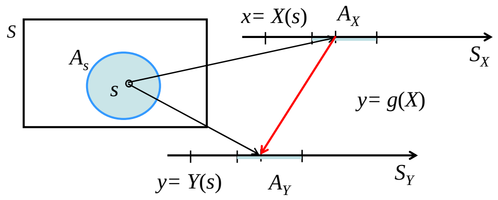
Povzetek vsebine prejšnjega predavanja



$$y = Y(s) = g(X(s)) = g(X)$$

$$P(A_Y) = P(A_X) = P(x : 0 \le g(X) \le y)$$
$$= P(X \in g^{-1}(A_Y))$$

Povratno enolične funkcije naključne spremenljivke

$$Y = g(X), \quad X = g^{-1}(Y) = h(Y)$$

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = P(x : g(x) \le y,\, x \in S)$$

$$= P[X \le h(y)] = P(x : x \le h(y),\, x \in S_X)$$

$$= \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Za monotono naraščajočo odvajanjem po y dobimo:

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\int_{-\infty}^{h(y)} f(x)\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} = f_X(h(y))\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}$$

V splošnem primeru za povratno enolične funkcije velja;

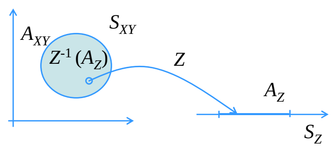
$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} = f_X(h(y))\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}\right|$$

5.2 Skalarne funkcije vektorskih naključnih spremenljivk

Primer:

$$Z = X + Y$$

Gostota verjetnosti $f_{XY}(x,y)$ je znana. Zanima nas $f_Z(z)$



$$P(A_Z \subset S_Z) = P(Z^{-1}(A_Z) \subset S_{XY})$$

$\Rightarrow$ porazdelitev verjetnosti lahko zapišemo:

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z)$$

$$= P(x, y : x + y \le z;\, x, y \in S_{XY})$$

$$= \iint_{A_{XY}} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

pri tem je:

$$A_{XY} = \{x, y : x + y \le z\}$$

Ob upoštevanju:

$$A_{XY} = \{x, y : x + y \le z\} \quad \Rightarrow \quad y \le z - x$$

zapišemo izraz za porazdelitev verjetnosti z:

$$F_Z(z) = \iint_{A_{XY}} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

Izraz za gostoto verjetnosti dobimo z odvajanjem:

$$f(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\right)$$

Z uvedbo nove spremenljivke $u=z-x$ in posrednim odvajanjem dobimo:

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,z-x)\,\mathrm{d}x$$

Za neodvisni spremenljivki X in Y velja:

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$$

$\Rightarrow$ *konvolucijski integral*

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$ ali *konvolucija*.

Primer **:** Spremenljivki X in Y sta neodvisni in imata standardno normalno porazdelitev:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{in} \quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Gostota verjetnosti vsote $Z=X+Y$ je podana z:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Z ureditvijo eksponenta sledi:

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(2x^2-2zx+z^2)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{z^2}{2}+(x-\frac{z}{\sqrt{2}})^2\right]}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2}x-\frac{z}{\sqrt{2}})^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2}x-\frac{z}{\sqrt{2}})^2}\,\mathrm{d}x$$

Z vpeljavo nove spremenljivke:

$$t=\sqrt{2}x-\frac{z}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t$$

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2}x-\frac{z}{\sqrt{2}})^2}\,\mathrm{d}x$$

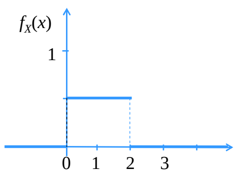
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

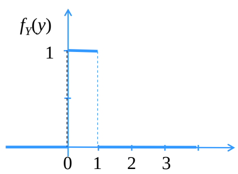
$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

Primer **:** Grafično določanje konvolucije spremenljivki X in Y :

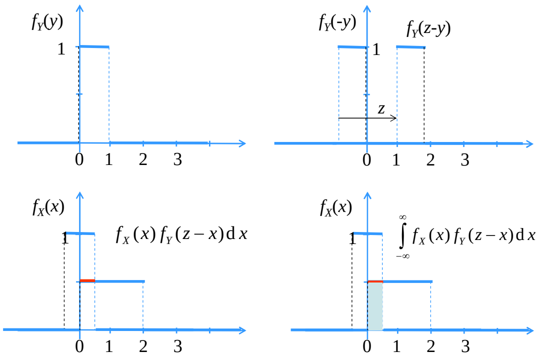
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$f_X(x)=\begin{cases} ½ & x\in[0,2] \\ 0 & drugod \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} 1 & y\in[0,1] \\ 0 & drugod \end{cases}$$

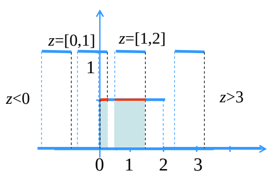




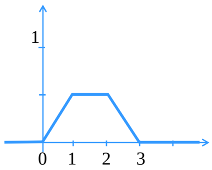
Opredelitev $f_Y(y) = f_Y(z-x)$



$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\,\mathrm{d}\,x$$



$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{z}{2} & z \in [0,1] \\ \frac{1}{2} & z \in [1,2] \\ -\frac{z}{2} + \frac{3}{2} & z \in [2,3] \\ 0 & z > 3 \end{cases}$$



5.3 Vektorske funkcije vektorskih spremenljivk

Naj bo $\boldsymbol{X}$ dvodimenzionalni naključni vektor

$$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2)$$

z gostoto povezane verjetnosti :

$$f_X(x_1, x_2) = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$$

Naj bo $\boldsymbol{Y}$ dvodimenzionalni naključni vektor:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{gX} = (g_1(X_1, X_2), g_2(X_1, X_2)) = (Y_1, Y_2)$$

---

kjer je $\boldsymbol{g}$ povratno enolična vektorska funkcija.

Ker je $\boldsymbol{g}$ povratno enolična velja:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{Y}) = (h_1(Y_1, Y_2), h_2(Y_1, Y_2)) = (X_1, X_2)$$

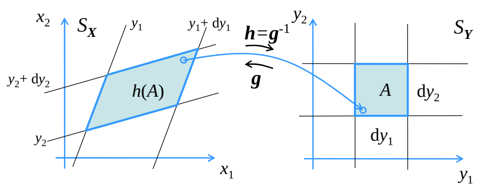
Zanima nas z gostota povezane verjetnost vektorske spremenljivke $\boldsymbol{Y}$:

$$f_Y(y_1, y_2)$$

če poznamo :

$f_X(x_1, x_2)$ in $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{gX}$

Opazujmo preslikavo majhnega področja A



$$P(\boldsymbol{Y} \in A_Y) = P(\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}_X) = P(\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{h}(A_Y))$$

Za diferencial verjetnosti lahko zapišemo:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)\,\mathrm{d}\,y_1\,\mathrm{d}\,y_2 = f_{X_1,X_2}(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)) \cdot \; plo\check{s}(h(A))$$

Površina inverzne preslikave $h(A)$:

$$plo\check{s}(h(A)) = |J|\,\mathrm{d}\,y_1\,\mathrm{d}\,y_2$$

Kjer je J jakobij transformacije $\boldsymbol{h}$:

$$J = \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{bmatrix} \partial h_1/\partial y_1 & \partial h_1/\partial y_2 \\ \partial h_2/\partial y_1 & \partial h_2/\partial y_2 \end{bmatrix}$$

in:

$$|J| = \left|\frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(y_1, y_2)}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial y_1 & \partial h_1/\partial y_2 \\ \partial h_2/\partial y_1 & \partial h_2/\partial y_2 \end{bmatrix}\right|$$

Z upoštevanjem izraza za $h(A)$ je gostota povezane verjetnosti vektorske naključne spremenljivke $\boldsymbol{Y}$ podana z :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)\,\mathrm{d}\,y_1\,\mathrm{d}\,y_2 = f_{X_1,X_2}(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))\cdot \text{ploš}(h(A))$$

$\Rightarrow$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))|J|$$

6. Statistična povprečja

Naključna spremenljivka X je najizčrpneje opisana, če je podana njena zaloga vrednosti:

$$X = \{x : 0 \le x \le b\}$$

in porazdelitev verjetnosti po zalogi vrednosti.

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

Pogosto naključno spremenljivko opišemo s številskimi karakteristikami, ki opisujejo samo poglavitne značilnosti kot na primer, centralno tendenco, raztros itd.

6.1 Osnovne definicije

Naj bo dana diskretne naključna spremenljivko X

$$X : \begin{Bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n \\ p_1, p_2, \ldots, p_i \ldots, p_n \end{Bmatrix}$$

Izraz:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_k x_k\, p_k$$

imenujemo *statistično povprečje* ali povprečna vrednost spremenljivke X.

Primer: Naj bo naključna spremenljivko X realizirana N krat. Pri tem ima ki krat vrednosti xi, i=1…,n)

Povprečna vrednost vseh realizacij je podano z aritmetično sredino:

$$\hat{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i k_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, f_i$$

za velik N:

$$\hat{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i k_i \to \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = \mathrm{E}[X]$$

Naj bo naključna spremenljivko X z neskončno zalogo vrednosti.

Statistično povprečje X je opredeljeno z vrsto:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i$$

Če je zgorna vrsta divergentna tedaj statistično povprečje na obstaja.

Potreben pogoj za konveregenco:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\, p_i < \infty$$

Za zvezno naključno spremenljivko X ima vlogo verjetnosti p_i diferencial $p(x)\mathrm{d}x$.

Vrsta preide v integral:

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\,\mathrm{d}\,x$$

V tem primeru obstaja le če:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)\,\mathrm{d}\,x < \infty$$

Ne glede na naravo naključne spremenljivke lahko splošno definicijo statističnega povprečja zapišemo z:

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \,\mathrm{d}\, F(x)$$

Kjer integral predstavlja Lebesque-Stieltjesov integral

Ki obstaja le če:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \,\mathrm{d}\, F(x) < \infty$$

Primer 1: Zaloga vrednosti spremenljivko $X = x_1 = a$ in verjetnostjo $P\ (X = a) = 1$

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}(a) = aP(X = a) = a1 = a$$

Primer 2: Naj bo X Bernoullijeva spremenljivka z zalogo vrednosti 1 in 0 ter pripadajočo verjetnostjo p in q= 1-p.

$$\mathrm{E}[X] = 1.P(X = 1) + 0P(X = 0) = p$$

Primer 3: Naj bo X_n binomska spremenljivka s zalogo vrednosti k=1,2,...,n in porazdelitvijo:

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Statistično povprečje binomske spremenljivke je:

$$\mathrm{E}[X_n] = \sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Izraz pod vsoto razvijemo:

$$k\frac{n!}{k!(n-k)!} = k\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdots(k-1)\cdot k\cdot 1\cdot 2\cdots(n-k)} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Z upoštevanjem gornjega izraza sledi:

$$\mathrm{E}[X_n] = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

$$= n.p\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} = n.p(p+q)^{n-1}$$

$$= n.p$$

Primer 4: Enakomerno porazdeljena naključna spremenljivka X ima gostoto porazdelitve:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Statistično povprečje X je enako:

$$\mathrm{E}[X] = \int x f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

***Primer* 5:** Določimo povprečje zvezne spremenljivke X, ki je normalno porazdeljena:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Statistično povprečje naključne spremenljivke X je:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\,x$$

Z vpeljavo spremenljivke $t=(x-m)/\sigma$ dobimo:

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\sigma+m}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma\,\mathrm{d}t$$

$$=m\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t}_{1}+\underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t}_{0}=m$$

Statistično povprečje funkcije naključne spremenljivke

Naj bo X naključna spremenljivka s podano porazdelitvijo verjetnosti. Opredeljena je funkcija:

$$Y=g(X)$$

Z upoštevanjem verjetnosti:

$$P(Y=y_i)=P(X\in g^{-1}(y_i))$$

opredelimo statistično povprečje:

$$\mathrm{E}[Y]=\sum_i y_i P(Y=y_i)=\sum_i y_i P(X\in g^{-1}(y_i))$$

Z upoštevanjem, da inverzni sliki $g^{-1}(y_i)$ v splošnem ustreza množica izključujočih se dogodkov oziroma točk $x\in S_X$ za katere velja:

$$g^{-1}(y_i)=\{x:g(x)=y_i;x\in S_X\}$$

lahko zapišemo:

$$P(Y=y_i)=P(X\in g^{-1}(y_i))=\sum_{x_k\in g^{-1}(y_i)}P(X=x_k)$$

Izraz za statistično povprečje naključne spremenljivke Y dobi obliko:

$$\mathrm{E}[Y]=\sum_i y_i P(Y=y_i)$$

$$=\sum_i y_i P(X\in g^{-1}(y_i))=\sum_i y_i\sum_{x_k\in g^{-1}(y_i)}P(X=x_k)$$

oziroma:

$$\mathrm{E}[Y]=\sum_k g(x_k)P(X=x_k)$$

Kjer teče k tako da zavzame X vse možne vrednosti.

Primer **:** Imamo diskretno spremenljivko X z vzorčnim prostorom S_X=(-1,0,1), ki ima enakomerno porazdelitev verjetnosti $P(-1)=P(0)=P(1)=1/3$.

Opredeljena je funkcija:

$$Y=X(X-1)$$

Preslikavo upodobimo z verjetnostno shemo:

i	$P(x_i)$	x_i	y_i	$P(y_i)$
1	1/3	-1	2	1/3
2	1/3	0	0	1/3
3	1/3	1	0	1/3

i	$P(x_i)$	x_i	y_i	$P(y_i)$
1	1/3	-1	2	1/3
2	1/3	0	0	1/3
3	1/3	1	0	1/3

Statistično povprečje spremenljivke Y:

$$\mathrm{E}[Y]=\sum_i y_i P(Y=y_i)=2\frac{1}{3}+0\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{E}[Y]=\sum_i g(x_i)P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{3}x_i(x_i-1)P(X=x_i)$$

$$=2\frac{1}{3}+0\frac{1}{3}+0\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

***Primer* :** Funkcija množenja s konstanto $Y=a\mathrm{X}$

$$\mathrm{E}[Y]=\mathrm{E}[aX]=\sum_k a x_k P(X=x_k)=a\,\mathrm{E}[X]$$

Statistično povprečje zvezne naključne spremenljivke

Splošno opredelimo statistično povprečje funkcije Y naključne spremenljivke X z:

$$\mathrm{E}[Y]=\sum_{i=1}^{n} y(x_i)P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n} y(x_i)P(X\in A_i)$$

Kjer je A_i inverzna slika $y(x_i)$:

$$A_i=y^{-1}(x_i)=g^{-1}(x_i)$$

Prehod na zvezno spremenljivko izvedemo z limito:

$$\mathrm{E}[Y]=\lim_{\substack{A_i\to s\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n} y(x_i)P(X\in A_i)=\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\,\mathrm{d}\,P(x)$$

Integral na desni se imenuje Lebesgue-Stieltjesov integral.

V primeru, ko obstaja gostota porazdelitve $f_X(x)$ lahko zapišemo:

$$\mathrm{E}[Y]=\int y(x)\,\mathrm{d}\,P(x)=\int y(x)\,f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Primer : Eksponentno porazdeljena naključna spremenljivka T ima gostoto porazdelitve:

$$f_T(t)=\begin{cases} ae^{-at} & t\in[0,\infty)\\ 0 & t\notin[0,\infty)\end{cases}$$

Statistično povprečje T je enako:

$$\mathrm{E}[T]=\int y(x)\,f_X(x)\,\mathrm{d}\,x=a\int_0^{\infty} te^{-at}\,\mathrm{d}\,t$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\infty} ue^{-u}\,\mathrm{d}\,u=\frac{1}{a}$$

40

Statistično povprečje vektorskih spremenljivk

Obravnavajmo dvodimenzionalni naključni vektor:

$$\boldsymbol{Z}=(X,Y)$$

Statistično povprečje naključnega vektorja $\boldsymbol{Z}$ je opredeljeno z:

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{Z}]=\mathrm{E}[(X,Y)]=(\mathrm{E}[X],\mathrm{E}[Y])$$

Za vektor $\boldsymbol{Z}$ lahko zapišemo povezano verjetnost, da se vektor $\boldsymbol{Z}$ nahaja v področju $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$:

$$\mathrm{d}\,P(\boldsymbol{z})=\mathrm{d}\,P(x,y)=f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

Po definiciji velja:

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{Z}]=\mathrm{E}[(X,Y)]=\iint (x,y)\,\mathrm{d}P(x,y)$$

$$=\left(\iint x\,\mathrm{d}P(x,y),\iint y\,\mathrm{d}P(x,y)\right)$$

Z upoštevanjem gostote povezane verjetnosti lahko zapišemo:

$$\iint x\,\mathrm{d}P(x,y) = \iint x f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int x\Big(\underbrace{\int f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y}_{f_X(x)}\Big)\mathrm{d}x = \int x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{E}[\mathrm{X}]$$

Enak izraz dobimo tudi za Y komponento:

$$\iint y\,\mathrm{d}P(x,y) = \int y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{E}[\mathrm{Y}]$$

Primer : Naj bo $\boldsymbol{Z}=(X,Y)$ naključni vektor, na katerem je definirana skalarna funkcija G:

$$G(\boldsymbol{Z}) = aX + bY$$

Statistično povprečje $G(\boldsymbol{Z})$ je enako:

$$\mathrm{E}[G(\boldsymbol{Z})] = \mathrm{E}[(aX + bY] = \iint (ax + by)\,\mathrm{d}P(x,y) = a\iint x\,\mathrm{d}P(x,y) + b\iint y\,\mathrm{d}P(x,y) = a\,\mathrm{E}[X] + b\,\mathrm{E}[Y]$$

Ugotovljena lastnost:

$$\mathrm{E}[aX + bY] = a\,\mathrm{E}[X] + b\,\mathrm{E}[Y]$$

navaja, da je statično povprečje linearna operacija.

S statističnim povprečjem funkciji priredimo neko število:

$\Rightarrow$ Statistično povprečje je *linearni funkcional*

Naj bo vektor $\boldsymbol{Z}=(X,Y)$ z naključno neodvisnima komponentama X,Y in $G=XY$ na vektorju definirana funkcija:

$$\mathrm{E}[XY] = \iint xy f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint xy f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int x f_X(x)\,\mathrm{d}x \int y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$$

$\Rightarrow$

Če sta X in Y neodvisni naključni spremenljivki potem velja: $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$

Podobno lahko pokažemo, da za funkciji $g_1(X)$ in $g_2(Y)$ opredeljenih na statistično neodvisnih spremenljivkah X in Y velja:

$$\mathrm{E}[g_1(X)g_2(Y)] = \mathrm{E}[g_1(X)]\mathrm{E}[g_2(Y)]$$

Še nekatere splošne lastnosti statističnega povprečja:

Zaradi linearnosti velja:

$$|\mathrm{E}[X]| \le \mathrm{E}[|X|]$$

Če $X(s) > 0$ za vsak $s \in S$ potem:

$$\mathrm{E}[X] \ge 0$$

Če sta X_1 in X_2 naključni spremenljivki opredeljeni na S za kateri velja $X_1(s) > X_2(s)$ za vsak $s \in S$ velja:

$$\mathrm{E}[X_1] \ge \mathrm{E}[X_2]$$

6.2 Momenti porazdelitve

Med statističnimi povprečji naključnih spremenljivk X pogosto navajamo povprečja potenc $\mathrm{E}[X^k]$ ali *momenti naključnih spremenljivk*.

K-ti moment naključne spremenljivke X opredelimo z:

$$m_k = \mathrm{E}\left[X^k\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,k} P(X = x_i)$$

$$m^k = \mathrm{E}\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Beseda *moment* izhaja iz analogije iz mehanike, kjer če označimo z:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad \text{in} \quad p_i = \frac{m_i}{M}$$

težišče podano z:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i M}{M} = \mathrm{E}[X]$$

in vztrajnostni moment:

$$I = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} m_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} p_i M = M\,\mathrm{E}\left[X^2\right]$$

Izrek **:** Če obstajajo in če poznamo momente za vse k, potem množica momentov $\{\mathrm{E}\,[X^k]\}$ enolično določa funkcijo porazdelitve verjetnosti naključne spremenljivke X

Izrek **:** Imamo naključni spremenljivki X in Y. Če poznamo samo nekatere momente X in Y in so ti med seboj enaki:

$$\{\mathrm{E}\,[X^k]\} = \{\mathrm{E}\,[Y^k]\}$$

Pravimo, da sta porazdelitvi naključnih spremenljivk X in Y podobni.

Pri karakterizaciji porazdelitev naključne spremenljivke X je ugodno, da spremenljivko *centriramo* glede na srednjo vrednost:

$$\{X\} \Rightarrow \{X - \mathrm{E}[X]\} = \{X - m\}$$

Momente *centrirane spremenljivke* opredeljene z:

$$\mu_k = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^k\right] = \mathrm{E}\left[(X - m)^k\right]$$

imenujemo *središčne* ali *centralne momente*. Pri tem X-m imenujemo odklon spremenljivke X glede na srednjo vrednost m .

Prvi centralni moment je opredeljen z:

$$\mu = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])\right] = \mathrm{E}\left[(X - m)\right] = 0$$

In je vedno enak nič.

Zelo pomemben je drugi centralni moment ali *varianca*:

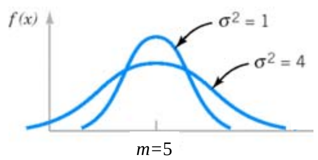
$$\mu_2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \sigma^2,$$

podaja ***srednjo vrednost kvadrata variacije naključne spremenljivke*** X okoli njene srednje vrednosti.

Pozitivni kvadratni koren variance:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

meri širino gostote porazdelitve verjetnosti okoli povprečja.



Z razširitvijo :

$$\mu_2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \sigma^2$$

$$= \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\,\mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[X]^2\right]$$
$$= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\,\mathrm{E}[X]^2 + \mathrm{E}[X]^2$$
$$= \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2$$

dobimo izraz:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2,$$

ki je pogosto bolj primerna za njen izračun kot izraz s katerim je definirana.

Primer : Podano imamo naključno spremenljivko X . Določimo povprečno vrednost in varianco naključne spremenljivke Y :

$$Y = aX + b$$

Povprečna vrednost:

$$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[aX + b] = a\,\mathrm{E}[X] + b$$

Varianca:

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}\left[(Y - \mathrm{E}[Y])^2\right] = \mathrm{E}\left[(aX + b - a\,\mathrm{E}[X] - b)^2\right]$$
$$= \mathrm{E}\left[a^2(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = a^2\,\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right]$$
$$= a^2\,\mathrm{Var}(X) \quad \Rightarrow \quad \sigma(Y) = a\sigma(X)$$

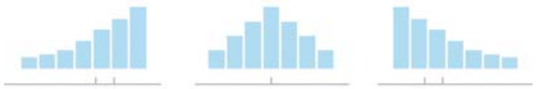
Na osnovi tretjega centralnega momenta:

$$\mu_3 = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^3\right]$$

opredelimo *koeficient nesimetričnosti* ali poševnosti:

$$g_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^2}$$

$g_1 < 0$ $\qquad$ $g_1 = 0$ $\qquad$ $g_1 > 0$



Analogno na osnovi četrtega tretjega centralnega momenta: $\mu_4 = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^4\right]$

opredelimo *koeficient sploščenosti* glede na normalno porazdelitev:

$$g_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}} - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

6.3 Povezani momenti vektorskih spremenljivk

Za vektorsko naključno spremenljivko $\boldsymbol{Z}=(X,Y)$ opredelimo množico povezanih momentov v primeru diskretne spremenljivke z:

$$\mathrm{E}\left[X^j \cdot Y^k\right] = \sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,j} y_l^{\,k} P(X = x_i, Y = y_l)$$

V primeru zvezne spremenljivke z:

$$\mathrm{E}\left[X^j \cdot Y^k\right] = \int\int x^j y^k f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

Pri tem sta j in k naravni števili.

S pomočjo povezanih momentov opisujemo relacije oziroma povezave med komponentami.

V ta namen najpogosteje uporabljamo *prvi povezani moment centrirane spremenljivke* ali kovarianco

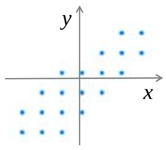
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])\right]$$

Predstavlja statistično povprečje povezane variabilnosti spremenljivk X in Y.

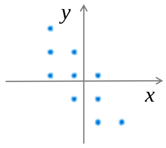
Po definiciji:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])]$$

$x \to y, -x \to -y$
$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) > 0$



$x \to -y, -x \to y$
$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) < 0$

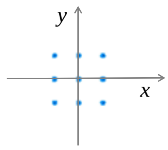


Za naključni spremenljivki X in Y za kateri velja da je:

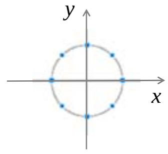
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

pravimo, da sta *nekorelirani*.

$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$



$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$



$\Rightarrow$ Kovarianca je merilo ***linearne*** povezave med spremenljivkama.

Izraz za kovarianco lahko zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] \\ &= \mathrm{E}[XY - X\,\mathrm{E}[Y] - Y\,\mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]] \\ &= \mathrm{E}[XY] - 2\,\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] + \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] \\ &= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]\end{aligned}$$

Kjer je $\mathrm{E}[XY]$ prvi povezani moment ali *korelacija*:

$$\mathrm{E}[X\,Y] = R_{XY} = \int xy f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Iz izrazov :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$$

$$\mathrm{E}[X\,Y] = R_{XY} = \int xy f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$\Rightarrow$ da za statistično neodvisna X in Y :

$$\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] \Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

oziroma X in Y sta nekorelirana.

Ni pa nujno obratno:

$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \Rightarrow X$ in Y sta neodvisna

6.4 Pogojna povprečja

Naj bo $\boldsymbol{Z}=(X,Y)$ dvokomponentna naključna vektorska spremenljivka. Povprečno vednost funkcije $G(X,Y)$ lahko izračunamo:

1. Na osnovi definiciji za povprečje

$$\mathrm{E}[G(X,Y)] = \int\int g(x,y)\,f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

kjer je $f_{XY}(x,y)$ povezana verjetnost spremenljivk X,Y.

2. Kadar obstaja izrazita odvisnost med komponentama

$$f_{XY}(x,y) = f_{X|Y}(x\,|\,y)\,f_Y(y)$$

Lahko izrazimo povprečje:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[G(X,Y)] &= \int\int g(x,y)\,f_{X|Y}(x\,|\,y)\,f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int\left[\int g(x,y)\,f_{X|Y}(x\,|\,y)\,\mathrm{d}x\right] f_Y(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Z izrazom

$$\mathrm{E}[G(X,Y)\,|\,Y=y]=\int g(x,y)\,f_{X|Y}(x\,|\,y)\,\mathrm{d}\,x$$

je opredeljeno *pogojno povprečje*, ki določa povprečno vrednost funkcije $G(X,Y)$ pri pogoju, da zavzame spremenljivka Y vrednost y.

Pogojno povprečje je funkcija pogoja Y in zato v splošnem velja da:

$$\mathrm{E}[G(X,Y)]\neq \mathrm{E}[G(X,Y)\,|\,Y=y]$$

oziroma:

$$\mathrm{E}[G(X,Y)]=\int \mathrm{E}[g(x,y)\,|\,Y=y]\,\mathrm{d}\,y$$

Kadar sta X in Y neodvisni spremenljivki velja:

$$f_{X|Y}(x,y)=f_X(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[G(X,Y)\,|\,Y=y]&=\int g(x,y)\,f_{X|Y}(x\,|\,y)\,\mathrm{d}\,x\\&=\int g(x,y)\,f_X(x)\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

6.5 Neenačba Čebiševa

Neenačba Čebiševa povezuje statistično povprečje in pripadajočo varianco naključne spremenljivke X.

Za X, ki ima končno povprečno vrednost in varianco:

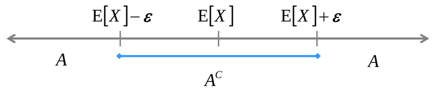
$$\mathrm{E}\left[|X|^2\right]<\infty$$

velja neenačba Čebiševa:

$$P(|X-\mathrm{E}[X]|\geq\varepsilon)\leq\frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Označimo dogodek:

$$A^C=\{x:((\mathrm{E}[\mathrm{X}]-\varepsilon)\leq X\leq(\mathrm{E}[\mathrm{X}]-\varepsilon))\}$$



Za zvezno spremenljivko X velja:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathrm{E}[X])^2\,f_X(x)\,\mathrm{d}\,x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathrm{E}[X])^2\,\mathrm{d}\,P(x)\end{aligned}$$

Ker je povsod $(x-\mathrm{E}[X])^2\geq 0$

velja:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathrm{E}[X])^2\,\mathrm{d}\,P(x)\\&\geq\int_A(x-\mathrm{E}[X])^2\,\mathrm{d}\,P(x)\end{aligned}$$

Na območju A je $(x-\mathrm{E}[X])^2\geq\varepsilon^2$

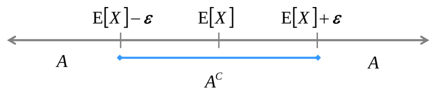
sledi:

$$\mathrm{Var}(X)\geq\varepsilon^2\int_A\mathrm{d}\,P(x)=\varepsilon^2P(X\in A)$$

Integral

$$\mathrm{Var}(X)\geq\varepsilon^2\int_A\mathrm{d}\,P(x)=\varepsilon^2P(X\in A)$$

Označuje verjetnost, da se X nahaja v A oziroma izven A^C :



$$P(X\in A)=P(|X-\mathrm{E}[\mathrm{X}]|\geq\varepsilon)\leq\frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Primer : Naj ima naključna spremenljivka X varianco 0

V tem primeru velja :

$$P(|X - \mathrm{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} = 0$$

Oziroma:

$$P(X = \mathrm{E}[X]) = 1$$