## Ponovitev prejšnjega predavanja

*Množico vseh možnih izidov poskusa*, ki ustreza celotemu vzorčnemu prostoru $S$ imenujemo *populacija* $X$.

*Izbrano podmnožico izidov iz populacije $X$ imenujemo vzorec:*

$$\boldsymbol{V} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

V primeru, ko so posamezne naključne spremenljivke $X_i$ , ki nastopajo v vzorcu medsebojno neodvisne in imajo isto porazdelitev $f(x)$, predstavlja vzorec

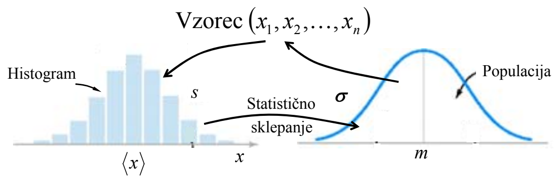
$$\boldsymbol{V} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

*naključni vzorec*.

Osnovna naloga statistike je na osnovi izbranega naključnega vzorca

$$\boldsymbol{V} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

sklepati na statistične lastnosti obravnavane populacije $X$.




Statistike, ki se uporabljajo za oceno parametrov $\theta$ populacije $X$ na osnovi naključnega vzorca $\boldsymbol{V}$ imenujemo cenilke.

Pri tem je v splošnem statistika $\boldsymbol{Z}$ opredeljena s poljubno merljivo funkcijo naključnega vzorca $\boldsymbol{V}$.

$$Z = Z(\mathbf{V}) = Z(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Da neko statistiko $Z = \hat{\Theta}$ uporabimo kot cenilko za parametra $\theta$ morajo vrednosti statistike $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\Theta}(V)$ imeti lastnost:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\hat{\theta} - \theta\right| < C\right] = 1$$

kjer je $C$ izbrana pozitivna konstanta.

1) Doslednost cenilke:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right| < \boldsymbol{\varepsilon}\right] = 1$$

2) Nepristranost cenilke $\hat{\Theta}$

$$\mathrm{E}\left[\hat{\Theta}\right] = \boldsymbol{\theta}$$

3) Asimptotska nepristranost cenilke

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\hat{\Theta}\right] = \lim_{n\to\infty} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} + O(n)\right) = \boldsymbol{\theta}$$

Vzorčna relativna frekvenca dogodka $A$

$$p_n(A) = \frac{n(X_i \in A)}{n}$$

je nepristranska in dosledna cenilka verjetnosti dogodka $A$.

Vzorčno povprečje

$$\mathrm{E}\left[\langle X \rangle_n\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m = m$$

je nepristrana in dosledna cenilka povprečne vrednosti populacije $X$

Vzorčna varianca

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \langle X\rangle_n\right)^2$$

je asimptotsko nepristranska med tem ko je popravljena vzorčna varianca

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \langle X\rangle_n\right)^2$$

nepristranska in dosledna cenilka variance populacije $X$

V splošnem je statistika $\boldsymbol{Z}$ opredeljena s poljubno merljiva funkcija $\boldsymbol{Z}$ naključnega vzorca $\boldsymbol{V}$.

$$Z = Z(\mathbf{V}) = Z(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$\Rightarrow$

Statistika $\boldsymbol{Z}$ je naključna spremenljivka.

Kar pomeni, da ima $\boldsymbol{Z}$ zalogo vrednosti in neko porazdelitev verjetnosti $F_Z(z)$ .

### 9.3.1 Porazdelitev statistike vzorčnega povprečja

Vzorčno povprečje naključnega vzorca smo opredelili z:

$$Z_n = \langle X\rangle_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Pri tem so $X_i$ statistično neodvisne in imajo enako gostoto porazdelitve:

$$f_{X_i}(x) = f_{X_j}(x)$$

**Centralni limitni teorem**:

Če vzorčimo iz populacije $X$ z neznano porazdelitvijo verjetnosti bo porazdelitev vzorčnega povprečja $\langle X\rangle_n$ približno normalna z srednjo vrednostjo in varianco:

$$E\left[\langle X\rangle_n\right] = m \quad \text{in} \quad \mathrm{Var}(\langle X\rangle_n) = \frac{\sigma_X^2}{n}$$

Oziroma če je naključni vzorec

$$\boldsymbol{V} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

velikosti $n$ izbran iz poljubne populacije $X$ z:

$$E[X] = m \quad \text{in} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$$

in če je $\langle X\rangle_n$ vzorčno povprečje potem porazdelitev statistike:

$$Z = \frac{\langle X\rangle_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

z $n \to \infty$ limitira k standardni normalni porazdelitvi.

### 9.3.2 $\chi^2$ Hi-kvadrat porazdelitev

Imamo populacijo $X$ z normalno porazdelitvijo, ki ima:

$$E[X] = m = 0 \quad \text{in} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = 1$$

Zanima nas gostota porazdelitve naključne spremenljiv-ke oziroma statistike $Z_n$ opredeljena z:

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

S poznavanjem gostote verjetnosti $f_Z(z)$ in uporabe ***konvolucije*** lahko določimo gostoto verjetnosti vsote dveh kvadratov $Z_2$

$$f_{Z_2}(z) = \int f_Z(z) f_Z(z-x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{2/2}} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{z-x}} \mathrm{e}^{-x/2} \mathrm{e}^{-(z-x)/2} \mathrm{d}\,x$$

$$f_{Z_2}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2/2}\Gamma(2/2)} z^0 \mathrm{e}^{-z/2}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

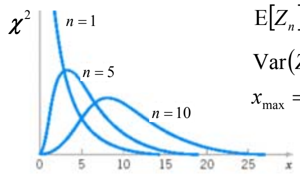
S pomočjo popolne matematične indukcije lahko pokažemo da velja:

$$f_{Z_n}(z) = \chi^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{(\frac{n}{2}-1)} \mathrm{e}^{-z/2}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

Dobljena gostota verjetnosti za  se imenuje “*hi-kvadrat*” z $n$ prostostnimi stopnjami.

$\Rightarrow$
Naključna spremenljivka opredeljena z vsoto kvadratov standardiziranih normalnih spremenljivk ima *hi-kvadrat* porazdelitev gostote verjetnosti.

Primeri grafov *hi kvadrat* porazdelitve v odvisnosti od $n$ :




$$\mathrm{E}[Z_n] = n$$
$$\mathrm{Var}(Z_n) = 2n$$
$$x_{\max} = n - 2, \quad n \ge 2$$

Vrednosti ostalih značilnih parametrov porazdelitve $\chi^2$ :

$$\mathrm{E}[Z_n^r] = m_r = n(n+2)\cdots(n+2r-2)$$
$$g_1 = 2\sqrt{2/n}$$
$$g_2 = 12/n$$

**Aditivna lastnost porazdelitve hi-kvadrat**

Naj bodo $Y_1$, $Y_2$, ...., $Y_n$, hi-kvadrat neodvisne naključne spremenljivke s prostostnimi stopnjami $k_1$, $k_2$, ...., $k_n$.

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

je hi-kvadrat naključna spremenljivka z prostostno stopnjo:

$$k = \sum_{i=1}^n k_i$$

**Primeri spremenljivk z $\chi^2$ porazdelitvijo**

1. Poljubni normalni porazdeljeni spremenljivki $X$ z:

$$E[X] = m_X \quad \text{in} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$$

lahko priredimo standardni odmik od srednje vrednosti $Z$ :

$$Z = \frac{X - m_X}{\sigma_X}$$

z:

$$E[Z] = m_Z = 0 \quad \text{in} \quad \mathrm{Var}(Z) = \sigma_Z^2 = 1$$

Vzorčni drugi moment spremenljivke $Z$ opredeljen z:

$$m_{2,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m_X}{\sigma_X}\right)^2 \propto \sum_{i=1}^n X_i^2$$

ima $\chi^2$ porazdelitev z $n$ prostostnimi stopnjami.

2. Za poljubno normalno spremenljivki $X$ z:

$$E[X]=m_X \quad \text{in} \quad \mathrm{Var}(X)=\sigma_X^2$$

je z $X_i-\langle X\rangle_n$ podan odmik od vzor. povprečja $\langle X\rangle_n$

Na osnovi odmika vpeljemo spremenljivko:

$$\chi_{n-1}^2=\frac{1}{\sigma_X^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\langle X\rangle_n\right)^2$$

ki ima $\chi^2$ porazdelitve z $n$-$1$ prostostnimi stopnjami.

3. Z uporabo spremenljivke $\chi^2$ lahko izrazimo vzorčni varianci:

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\langle X\rangle_n\right)^2=\frac{\sigma_X^2}{n}\chi_{n-1}^2$$

in

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\langle X\rangle_n\right)^2=\frac{\sigma_X^2}{n-1}\chi_{n-1}^2$$

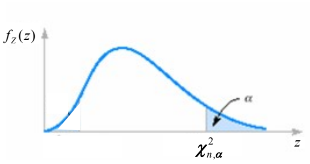
ki imata $\chi^2$ porazdelitve z $n$-$1$ prostostnimi stopnjami.

Vrednosti porazdelitvena funkcija $\chi^2$ so podane tabelarično. Tabela podaja verjetnosti:

$$P\left(X\geq\chi_{n,\alpha}^2\right)=\int_{\chi_{n,\alpha}^2}^{\infty}f_Z(z)\,\mathrm{d}z=\alpha$$

Kjer je $\chi_{n,\alpha}^2$ označuje vrednost *hi-kvadrat* spremenljivke $X$ z $n$ prostostnimi stopnjami, pri kateri je:

$$P\left(X\geq\chi_{n,\alpha}^2\right)=\alpha$$




### 9.3.3 Studentova porazdelitev *t*

Vzorčimo iz normalne populacije $X$ z:

$$\mathrm{E}[X]=m_X \quad \text{in} \quad \mathrm{Var}(X)=\sigma_X^2$$

Vzorčno povprečje $\langle X\rangle_n$ populacije $X$ ima normalno porazdelitev z:

$$\mathrm{E}\left[\langle X\rangle_n\right]=m_X \quad \text{in} \quad \mathrm{Var}\left(\langle X\rangle_n\right)=\frac{\sigma_X^2}{n}$$

Na osnovi centralnega limitnega teorema ima statistika oziroma naključna spremenljivka:

$$Z=\frac{\left(\langle X\rangle_n-m_X\right)}{\sigma_X/\sqrt{n}}$$

standardno normalno porazdelitev.

Predpostavimo, da variance $\sigma_X$ populacije $X$ ne poznamo. Kaj se zgodi z porazdelitvijo spremenljivke $Z$ če v njej $\sigma_X$ nadomestimo z vzorčno varianco $S$:

$$T=\frac{\left(\langle X\rangle_n-m_X\right)}{S/\sqrt{n}}$$

V splošnem lahko pokažemo, da:

Če je $Z$ normalna spremenljivka in $V$ hi-kvadrat spremenljivka z $n$ prostostnimi stopnjami in če sta $Z$ in $V$ statistično neodvisni, potem ima spremenljivka:

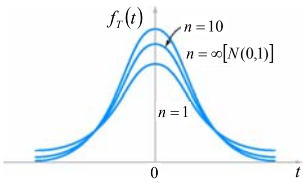
$$T=\frac{Z}{\sqrt{V/n}}$$

gostoto verjetnosti:

$$f_T(t)=\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\cdot\frac{1}{\left[(t^2/n)+1\right]^{(n+1)/2}} \qquad -\infty<t<\infty,$$

ki se imenuje *Studentova* ali $t_n$ porazdelitev z $n$ prostostnim stopnjami.

Primeri grafov Studentove gostote verjetnosti:




$$\mathrm{E}[T_n]=0$$

$$\mathrm{Var}(T_n)=n/(n-2)$$

$$t_{\max}=0$$

Vrednosti ostalih značilnih parametrov:

$$\mathrm{E}[T_n^{2r}]=m_{2r}=\frac{1\cdot 3\cdots(2r-1)}{(n-2)(n-4)\cdots(n-2r)}n^r$$

$$g_1=0$$

$$g_2=3\frac{n-2}{n-4}-3,\quad n>4$$

V našem primeru imamo spremenljivko:

$$T=\frac{(\langle X\rangle_n-m_X)}{S/\sqrt{n}}=\frac{(\langle X\rangle_n-m_X)}{\sqrt{S^2/n}}$$

Kjer je $\langle X\rangle_n-m_X$ normalna in $S^2$ hi-kvadrat spremenljivka z $n$-1 prostostnimi stopnjami, ki sta statistično neodvisni.

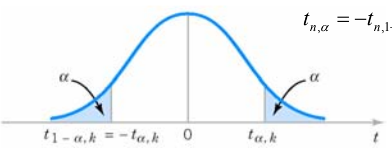
Zato ima gornja statistika $T$ Studentovo oziroma $t$ porazdelitev z $n$-1 prostostnimi stopnjami:

$$f_T(t)=\frac{\Gamma[(n)/2]}{\sqrt{\pi n-1}\,\Gamma((n-1)/2)}\cdot\frac{1}{[(t^2/(n-1))+1]^{(n)/2}}$$

Studentova porazdelitev je podana v tabeli, ki podaja:

$$P(T_n\geq t_{n,\alpha})=\int_{t_{n,\alpha}}^{\infty}f_T(t)\,\mathrm{d}z=\alpha$$

$$t_{n,\alpha}=-t_{n,1-\alpha}$$




Poglavje 10

# Osnove teorije cenilk

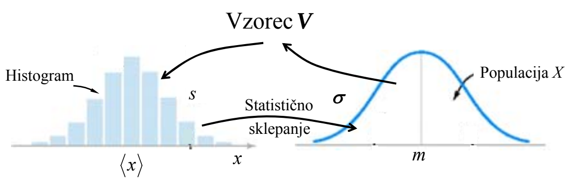
## 10.1 Točkovno ocenjevanje parametrov

Ena od poglavitnih nalog statistike je določitev porazdelitve verjetnosti opazovane naključne spremenljivke $X$.

Pri tem privzamemo, da je opazovan pojav možno opisati z eno od poznanih teoretičnih porazdelitve .

Izbrana porazdelitev je opisana z neko funkcijo $F_X(x,\boldsymbol{q})$, ki je v splošnem odvisna še od nabora značilnih parametrov $\boldsymbol{q}$.

Naša naloga je določiti nabor parametrov $\boldsymbol{q}$ na osnovi vzorca $\boldsymbol{V}$ , ki predstavlja podmnožico populacije $X$ .




Pri tem parameter $q_i$ ocenimo s pomočjo ustrezne statistike $Z$ oziroma cenilke.

### 10.1.1 Metode za določanje cenilk

**Metoda momentov**

Porazdelitvena funkcija $F_X(x,\boldsymbol{q})$ naključne spremenljivke $X$ je v splošnem odvisna od parametrov $\boldsymbol{q}$ .

Od parametrov $\boldsymbol{q}$ so odvisni tudi momenti $m_k$ naključne spremenljivke $X$:

$$m_k(\boldsymbol{q}) = \mathrm{E}\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \,\mathrm{d}\, F_X(x,\boldsymbol{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x,\boldsymbol{q})\,\mathrm{d}\,x$$

Na osnovi danega vzorca $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vrednosti momentov $m_{k,n}$ ocenimo z vzorčnim povprečji:

$$m_{k,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

$m_{k,n}$ so dosledne in nepristranske cenilke momentov $m_k(\boldsymbol{q})$

Z izenačenjem:

$$m_{k,n} = m_k(\boldsymbol{q}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

dobimo sistem enačb, iz katerega določimo $\boldsymbol{q}$ :

$$q_k = q_k(m_{1,n}, m_{2,n}, \ldots) = q_k(\boldsymbol{V})$$

***Primer*** **:** Naključna spremenljivka $X$ je enakomerno porazdeljena na intervalu z neznanima krajiščema $a$ in $b$.

$a$ in $b$ želimo oceniti iz vzorca.

Gostota porazdelitve spremenljivke $X$ je podana z:

$$f_X(x;a,b) = \begin{cases} 1/(b-a), & za \quad a \le x \le b \\ 0\ , & drugod \end{cases}$$

Z uporabo momentov:

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$$

zapišemo sistem dveh enačb:

$$m_1 = \frac{1}{a-b}\int_a^b x\,\mathrm{d}\,x = \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$m_2 = \frac{1}{a-b}\int_a^b x^2\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Z vpeljavo izraza za centralni momenta v sistem enačb:

$$\mathrm{Var}(X) = \boldsymbol{\mu}_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Lahko rešitve sistema zapišemo v obliki:

$$a = m_1 - \sqrt{3\boldsymbol{\mu}_2} \qquad \text{in} \qquad b = m_1 + \sqrt{3\boldsymbol{\mu}_2}$$

Cenilki za $a$ in $b$ dobimo z zamenjavi momentov $m_1$ in $\mu_2$ z ustreznima vzorčnima momentoma:

$$\hat{a} = \langle X\rangle - s\sqrt{3} \qquad \text{in} \qquad \hat{b} = \langle X\rangle + s\sqrt{3}$$

**Metoda največje zanesljivosti**

Se izkaže za zanesljivejšo pri majhnih vzorcih $\boldsymbol{V}$.

Imamo naključno spremenljivko $X$, ki ji pripada gostota porazdelitve $f_X(x,\boldsymbol{q})$, ki je odvisna od parametrov $\boldsymbol{q}$.

Imamo ***naključni vzorec*** $\boldsymbol{V} = (X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ katerega komponente $X_i$ so statistično neodvisne in imajo enako gostoto verjetnosti $f_X(x,\boldsymbol{q})$.

Gostota verjetnosti naključnega vzorca $\boldsymbol{V}$ je opredeljena z funkcijo:

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{q}) = f_X(X_1,\boldsymbol{q}) \cdot f_X(X_2,\boldsymbol{q}) \cdots f_X(X_n,\boldsymbol{q})$$

ki jo imenujemo *funkcija zanesljivosti vzorca* in označuje verjetnost, da pri vzorčenju dobimo vzorec $\boldsymbol{V}$ .

Pri vzorčenju izberemo vzorec $\boldsymbol{v}=(x_1,x_2,......,x_n)$ .

Pri predpostavki, da smo vzorec $\boldsymbol{v}=(x_1,x_2,......,x_n)$ izbrali ker je bil najbolj verjeten

določimo parametre $\boldsymbol{q}$, ki nam pri danem vzorcu maksimirajo funkcijo zanesljivosti vzorca.

S tem prevedemo ocenjevanje neznanih parametrov $\boldsymbol{q}$ na problem iskanja maksimuma funkcije:

$$L(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) = f_X(x_1,\boldsymbol{q}) \cdot f_X(x_2,\boldsymbol{q}) \cdots f_X(x_n,\boldsymbol{q})$$

v odvisnosti od $\boldsymbol{q}$. Pri tem je $L$ pri izbranem vzorcu $\boldsymbol{v}$ odvisna samo še od $\boldsymbol{q}$ .

***Primer*** **:** Vzorčenje treh izdelkov s tekočega traku pokaže dva dobra in enega slabega

Določimo cenilko oziroma oceno verjetnosti za pojav dobrega izdelka.

Opraviti imamo z Bernoulijevo spremenljivko $X$. Porazdelitev verjetnosti je podana z:

$$f_X(x,p) = \begin{cases} p, & za\ X = 1\,(dober) \\ 1-p, & za\ X = 0\,(slab) \end{cases}$$

Vzorec s katerim razpolagamo je:

$$\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$$

in pripadajoča funkcija zanesljivosti:

$$L(\boldsymbol{v},p)=f(1,p)\cdot f(1,p) \cdot f(0,p)=p^2(1-p)$$

Maksimum zanesljivosti $L$ dobimo v točki kjer je izpolnjne pogoj:

$$\frac{\mathrm{d}\,L}{\mathrm{d}\,p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\big(p^2(1-p)\big) = 2p - 3p^2 = 0$$

Rešitve enačbe :

$$2p - 3p^2 = 0$$

sta pri : $p=2/3$ in $p=0$.

$L$ ima maksimum pri $p=2/3$ kar je rešitev.

***Primer*** **:** Spremenljivka $X$ ima normalno porazdelitev s parametroma $m$ in $\sigma$. S oskusom smo dobili vzorec $\boldsymbol{v}=(x_1,x_2,......,x_n)$ . Ocenimo parametra $m$ in $\sigma$, da bo verjetnost vzorca $\boldsymbol{v}$ maksimalna.

Funkcija zanesljivosti je podana z:

$$L(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) = f_X(x_1,\boldsymbol{q}) \cdot f_X(x_2,\boldsymbol{q}) \cdots f_X(x_n,\boldsymbol{q})$$

in ima pri normalni porazdelitvi $X$ obliko:

$$L(\boldsymbol{v};m,\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{(2\boldsymbol{\pi})^{n/2}\boldsymbol{\sigma}^n}\exp^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Z logaritmiranjem funkcije zanesljivosti dobimo:

$$\ln L(\boldsymbol{v};m,\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{n}{2}\ln 2\boldsymbol{\pi} - n\ln\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2$$

Iz pogoja za ekstrem dobimo enačbi:

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\frac{n}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 = 0$$

Rešitev dobljenega sistema enačb je podan z:

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \langle X \rangle$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle X \rangle)^2 = s^2$$

Ocena za je pristranska. Do istih cenilk pridemo tudi z metodo momentov.

V splošnem dobimo z obema metodama različne rezultate.

Oziroma potrebne lastnosti cenilk (doslednost, nepristranost) za oceni parametra $q$ v splošnem lahko izpolnjuje več različnih statistik $Z$.

***Primer:*** Za ocena srednje vrednosti pri normalni porazdelitvi lahko uporabimo vzorčno povprečje, mediano,..

Za primerjavo cenilk vpeljemo *povprečno kvadratično napako* :

$$\mathrm{MSE}(Z) = \mathrm{E}\left[(Z-q)^2\right]$$
$$= \mathrm{Var}(Z) - O^2$$

kjer smo upoštevali, da za nepristransko cenilko velja:

$$\mathrm{E}[Z] = q + O$$

ter da velja enakost:

$$\mathrm{E}[Z^2] = \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{E}[Z]^2$$

S pomočjo MSE vpeljemo *relativno učinkovitost* dveh cenilk parametra $q$, $Z_1$ in $Z_2$ kot kvocient:

$$k_u = \frac{\mathrm{MSE}(Z_1)}{\mathrm{MSE}(Z_2)}$$

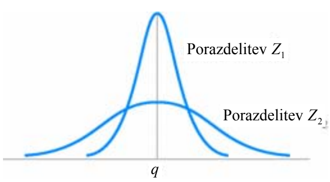
Če je $k_u < 1$ je:

$$\mathrm{MSE}(Z_1) < \mathrm{MSE}(Z_2)$$

in lahko zaključimo, da je $Z_1$ v smislu povprečne kvadratične napake boljša cenilka parametra $q$.

Ko sta $Z_1$ in $Z_2$ nepristranski cenilki parametra $q$ velja:

$$\mathrm{E}[Z_1] = \mathrm{E}[Z_2] = q$$
$$\mathrm{MSE}(Z_1) = \mathrm{Var}(Z_1)$$
$$\mathrm{MSE}(Z_2) = \mathrm{Var}(Z_2)$$

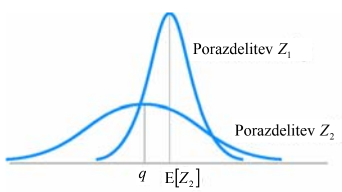



Za $\mathrm{Var}(Z_1) < \mathrm{Var}(Z_2)$ je $k_u < 1$ in po neenačbi Čebiševa:

$$P(|Z_i - q| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(Z_i)}{\varepsilon^2} \Rightarrow P(|Z_1 - q| \leq \varepsilon) > P(|Z_2 - q| \leq \varepsilon)$$

Primer ko je $Z_1$ pristranska in $Z_2$ nepristranska cenilka parametra

$$\mathrm{E}[Z_1] = q + O$$
$$\mathrm{E}[Z_2] = q$$




$$\mathrm{MSE}(Z_1) = \mathrm{Var}(Z_1) + O^2$$
$$\mathrm{MSE}(Z_2) = \mathrm{Var}(Z_2) \quad \Rightarrow \quad k_u = \frac{\mathrm{MSE}(Z_1)}{\mathrm{MSE}(Z_2)} < 1$$
$$\mathrm{Var}(Z_1) << \mathrm{Var}(Z_2)$$

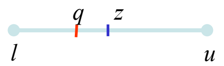
## 10.2 Intervalno ocenjevanje parametrov

Statistike, ki jih uporabljamo za oceno parametrov so naključne spremenljivke.

$\Rightarrow$ Ocena parametra $q$ s pomočjo statistike $Z$ se od vzorca do vzorca razlikuje.

Eno od meril natančnosti in zanesljivosti ocene je varianca cenilke.

Bolj podrobno oceno podamo, če na osnovi statističnih lastnosti cenilke $Z$ podamo ***interval*** $(l \leq \boldsymbol{z} \leq u)$ okoli ocenjene vrednosti $z$




v katerem z določeno verjetnostjo $P$:

$$P(l \leq z \leq u) = 1 - \boldsymbol{\alpha}$$

pričakujemo, da leži prava vrednost parametra $q$ .

Ocenjeni interval $(l \leq \boldsymbol{z} \leq u)$ imenujemo interval zaupanja

$1\text{-}\alpha$ stopnjo zaupanja in

$\alpha$ *tveganje*

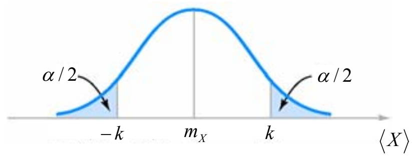
Obravnavajmo ***normalno populacijo*** $X$ z ***znano standardno deviacijo*** $\sigma_X$ in ***neznano srednjo vrednostjo*** $m$.

Naj bo $\boldsymbol{V}=(X_1,X_2,......,X_n)$ naključni vzorec populacije $X$.

Vzorčno povprečje $\langle X \rangle$ normalne populacije je normalno porazdeljeno z :

$$\mathrm{E}\langle X \rangle = m_X \quad \text{in} \quad \boldsymbol{\sigma}_{\langle X \rangle} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_X}{\sqrt{n}}$$

Zaradi normalne porazdelitve $\langle X \rangle$ okoli $m$ :




velja:

$$P(|m - \langle X \rangle| \leq k\sigma_{\langle X \rangle}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^{k} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t = 2\Phi(k) = 1 - \alpha$$

kjer je $k$ normalizirani odklon in $\Phi(k)$ Laplaceova funkcija.

Za vpeljavo in razlago pojma interval zaupanja verjetnost dogodka:

$$P(|m_X - \langle X \rangle| \leq k\sigma_{\langle X \rangle}) = 2\Phi(k) = 1 - \alpha$$

zapišemo v obliki:

$$P\big((\langle X \rangle - k\sigma_{\langle X \rangle}) \leq m_X \leq (\langle X \rangle + k\sigma_{\langle X \rangle})\big) = 1 - \alpha = 2\Phi(k)$$

V izrazu:

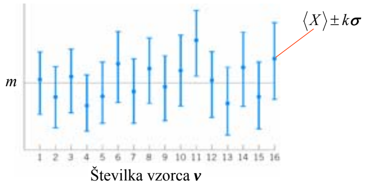
$$P\big((\langle X \rangle - k\sigma_{\langle X \rangle}) \leq m_X \leq (\langle X \rangle + k\sigma_{\langle X \rangle})\big) = 1 - \alpha = 2\Phi(k)$$

je $m$ dolčena *determinističina* vrednost izraz ne podaja verjetnosti za nastop $m$ v intervalu $\langle X \rangle \pm k\sigma_{\langle X \rangle}$ .

Pri *izbranem vzorcu* **v** je tudi $\langle X \rangle$ določena količina, in je verjetnost, da se $m_X$ nahaja v intervalu

$$P\big((\langle X \rangle - k\sigma_{\langle X \rangle}) \leq m_X \leq (\langle X \rangle + k\sigma_{\langle X \rangle})\big) = \begin{cases} 1, \; za \; m_X \in \langle X \rangle \pm k\sigma_{\langle X \rangle} \\ 0, \; za \; m_X \notin \langle X \rangle \pm k\sigma_{\langle X \rangle} \end{cases}$$

V splošnem je $\langle X \rangle$ funkcija naključnega vzorca $\boldsymbol{V}$ .




$\Rightarrow$

$$P\big(\big(\langle X \rangle - k\boldsymbol{\sigma}\big) \le m \le \big(\langle X \rangle + k\boldsymbol{\sigma}\big)\big) = 1 - \boldsymbol{\alpha} = 2\Phi(k)$$

določa verjetnost, da naključni interval $\langle X \rangle \pm k\boldsymbol{\sigma}$ pokriva (vsebuje) $m$.

$$\langle X \rangle \pm k\sigma_{\langle X \rangle}$$

predstavlja intervalno oceno parametra $m$, ki določa da interval širine $\pm k\sigma_{\langle X \rangle}$ z verjetnostjo

$$P\big(\big(\langle X \rangle - k\boldsymbol{\sigma}\big) \le m \le \big(\langle X \rangle + k\boldsymbol{\sigma}\big)\big) = 1 - \boldsymbol{\alpha} = 2\Phi(k)$$

oziroma stopnjo zaupanja $1-\alpha$ pokriva (vsebuje) $m$.

Če želimo določiti velikost interval zaupanja

$(l,u) = (-k\sigma, k\sigma)$

moramo najprej izbrati stopnjo zaupanja $1-\alpha$ .

$$P\big(\big(\langle X \rangle - k_{\alpha}\boldsymbol{\sigma}\big) \le m \le \big(\langle X \rangle + k_{\alpha}\boldsymbol{\sigma}\big)\big) = 1 - \boldsymbol{\alpha} = 2\Phi(k_{\alpha})$$

Povezava med stopnjo zaupanja in širino intervala je podana tabelarično:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-\alpha$ | 0.5 | 0.69 | 0.80 | 0.90 | 0.95 | 0.98 | 0.99 | 0.997 |
| $k_{\alpha}$ | 0.67 | 1.00 | 1.28 | 1.65 | 2.00 | 2.33 | 2.58 | 3.00 |

mejni vrednosti intervala $(l,u) = (-k\sigma, k\sigma)$ ali meji zaupanja sta tem bolj narazen čim manjše je tveganje $\alpha$ .

S širjenjem intervala zaupanja narašča verjetnost, da interval vsebuje oziroma pokriva pravo vrednost parametra $m$ .

Na drugi strani, širši ko je interval manj informacije oziroma manj natančno oceno imamo o pravi vrednosti parametra $m$ .

V praksi težimo, k dani stopnji zaupanja pri čim manjši širini intervala.

Širina intervala je podana z:

$$\langle X \rangle \pm k\boldsymbol{\sigma}_{\langle X \rangle} = \langle X \rangle \pm k\frac{\boldsymbol{\sigma}_x}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow$ Na širino lahko vplivamo z velikostjo vzorca $n$

**Intervalna ocena srednjo vrednost normalne populacije z <u>neznano standardno deviacijo</u>.**

V prejšnjem primeru smo uporabili normalno statistiko:

$$Z = \frac{\big(\langle X \rangle_n - m_X\big)}{\boldsymbol{\sigma}_X / \sqrt{n}}$$

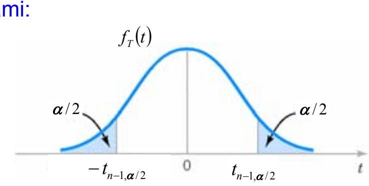
V primeru, ko ne poznamo standardne deviacije $\sigma_X$ jo ocenimo s popravljeno vzorčno varianco:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\big(x_i - \langle X \rangle\big)^2$$

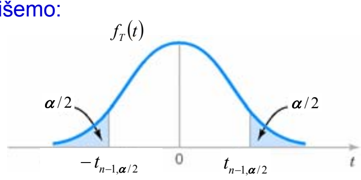
In za intervalno oceno povprečja $m_X$ populacije $X$ uporabimo statistiko:

$$T = \frac{\big(\langle X \rangle_n - m_X\big)}{S / \sqrt{n}}$$

ki ima Studentovo t porazdelitev z n-1 prostostnimi stopnjami:



Iz grafa porazdelitve in po analogiji s prejšnjim primerom lahko zapišemo:




$$P(-t_{n-1;\alpha/2} \le T \le t_{n-1;\alpha/2}) = 1-\alpha$$

ali:

$$P(-t_{n-1;\alpha/2} \le \frac{\langle X\rangle - m_X}{S/\sqrt{n}} \le t_{n-1;\alpha/2}) = 1-\alpha$$

Enačbo:

$$P(-t_{n-1;\alpha/2} \le \frac{\langle X\rangle - m_X}{S/\sqrt{n}} \le t_{n-1;\alpha/2}) = 1-\alpha$$

preuredimo v interval:

$$P\left(\langle X\rangle - t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le m_X \le \langle X\rangle + t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

ki podaja intervalno oceno povprečja $m_X$ populacije $X$ z stopnjo zaupanja 1- α

**Enostranski interval zaupanja**

Pogosto nas pri oceni intervala zanima samo ena meja medtem, ko je druga lahko poljubna ali podana v naprej.

Zato namesto dvostranega intervala zaupanja:

$$P\left(\langle X\rangle - t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le m_X \le \langle X\rangle + t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Če nas zanima zgornja meja podamo enostranskega:

$$P\left(m_X \le \langle X\rangle + t_{n-1;\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

V primeru spodnje pa:

$$P\left(\langle X\rangle - t_{n-1;\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}} \le m_X\right) = 1-\alpha$$

**Primer**: intervalna ocena zgornje meje je variance $\sigma_X^2$ normalne spremenljivke.

Vzorčno varianco lahko izrazimo z :

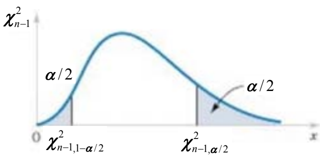
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \langle X\rangle_n\right)^2 = \frac{\sigma_X^2}{n-1}\chi_{n-1}^2$$

Kjer ima spremenljivka $\chi_{n-1}^2$ hi-kvadrat porazdelitev z n-1 prostostnimi stopnjami.

Kot statistiko za intervalno oceno variance uporabimo:

$$\chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_X^2}$$

Iz grafa porazdelitve $\chi_{n-1}^2$ sledi:




$$P(\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2 \le \chi_{n-1}^2 \le \chi_{n-1;\alpha/2}^2) = 1-\alpha$$

Z upoštevanjem:

$$\chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_X^2}$$

dobimo :

$$P(\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma_X^2} \le \chi_{n-1;\alpha/2}^2) = 1-\alpha$$

kar preuredimo v oceno intervala zaupanja za $\sigma_X^2$:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2} \le \sigma_X^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2}\right) = 1-\alpha$$

Iz intervalne ocene:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

Sledi, da je intervalna ocena zgornje meje za $\sigma^2$ podana z:

$$P\left(\sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha}}\right) = 1-\alpha$$