Poglavje 11

Statistične hipoteze

11.1 Osnovni pojmi

Na razpolago imamo naključno spremenljivko X, naključni vzorec $\boldsymbol{V}$ in izbrano statistiko Z opredeljeno na vzorcu $\boldsymbol{V}$.

Pogosto naletimo na problem, ko je potrebno sprejeti ali zavrniti neko trditve oziroma domnevo v zvezi z vrednostjo parametra populacije X, ki smo ga ocenili iz vzorca V s pomočjo statistike Z.

Trditev ali domnevo imenujemo hipoteza.

Postopek sprejemanja domneve pa testiranje hipoteze.

Primer : Stroj dela izdelke z 1% napako. Na osnovi testnega vzorca ugotovimo, da je prisotnih 10% izdelkov z napako.

Povečanje izdelkov z napako je

1) bodisi naključno ali

2) posledica spremembe v procesu izdelave izdelka.

Trditev oziroma domneva, ki jo je potrebno preveriti se lahko glasi:

povečanje števila napak je posledica naključja, (oziroma proces izdelave se ni spremenil).

Primer : Izdelujemo vlakna ki imajo trdnost X porazdeljeno z $N(x; m, \sigma) = N(x; 10, 2.5)$**.** Proces izdelave vlaken izboljšamo. Po novem postopku smo izdelali 25 vlaken, za katere smo ugotovili, da velja $\langle x \rangle_{n=25} = 11.2$ in $\sigma_{\langle x \rangle} = \sigma = 2.5$

Domneva, ki jo je potrebni preveriti je

z novim postopkom izboljšamo povprečno trdnost vlaken

Trditev oziroma domnevo o neznanem porazdelitvenem zakonu populacije imenujemo statistična hipoteza in jo označimo z $H()$.

Hipoteze o vrednostih parametrov porazdelitev imenujemo parametrične . Hipoteze o vrsti porazdelitvenega zakona imenujemo neparametrične .

Primer: Povprečna vednost normalne porazdelitve je 2 $H(m = 2)$.

Slučajna spremenljivka je normalno porazdeljena $H(F(x) = N(x; m, \sigma))$. .

Nabor vseh relevantnih hipotez pri danem problemu imenujemo dopustne hipoteze.

Izbrano hipotezo o kateri se odločimo imenujemo ničelna hipoteza in jo označimo z H_0

preostale dopustne pa imenujemo nasprotne ali alternativne hipoteze in jih označimo z H_1, H_2, ...

Primer: Hipoteze o povprečni vrednost m spremenljivke X

$$H_0(m_0 = a)$$

$$H_1(m_0 \neq a),\ H_2(m_0 > a),\ H_3(m_0 < a),$$

Za odločanje o hipoteze H_0 oblikujemo pravilo

Pravilo odločanja oblikujemo na osnovi naslednjega razmisleka:

Imamo naključno spremenljivko X, naključni vzorec $\boldsymbol{V}$ in izbrano statistiko Z opredeljeno na vzorcu $\boldsymbol{V}$.

- Z W označimo zalogo vrednosti te statistike $Z(\boldsymbol{V}) \in W$.
- Izberemo neko podmnožico $S_c \subset W$, ki jo imenujemo kritično področje.

Glede na vrednost statistike $Z(\boldsymbol{V})$ opredelimo pravilo:

če je:

$Z(\boldsymbol{V}) \in S_c$ potem H_0 zavrnemo

če je:

$Z(\boldsymbol{V}) \in W - S_c$ potem H_0 sprejmemo

z upoštevanjem pravila hipotezo H_0 bodisi zavrnemo ali sprejmemo, zato opredeljeno pravilo odločanja imenujemo statistični test hipoteze H_0

Ker je $Z(\boldsymbol{V})$ naključna spremenljivka se lahko zgodi:

1) da je $Z(\boldsymbol{V}) \in S_c$ čeprav je H_0 pravilna

na osnovi pravila zavrnemo pravilno H_0.
S tem naredimo napako, ki jo imenujemo napaka prve vrste.

2) da je $Z(\boldsymbol{V}) \in W - S_c$ četudi je H_0 napačna

ko je $Z(\boldsymbol{V}) \in W - S_c$ četudi je H_0 napačna, po pravilu sprejmemo napačno hipotezo.
S tem naredimo napako, ki jo imenujemo *napaka druge vrste*.

Da bi se pri odločanju izognili možnosti napake druge vrste pravilo preoblikujemo v naslednje:

Glede na vrednost statistike $Z(\boldsymbol{V})$ opredelimo pravilo:

če je:

$Z(\boldsymbol{V}) \in S_c$ potem H_0 zavrnemo

če je:

$Z(\boldsymbol{V}) \in W - S_c$ potem se o H_0 ne odločimo

Tako preoblikovano pravilo oziroma test hipoteze H_0 imenujemo *preskus značilnosti*.

Kadar je $Z(\boldsymbol{V}) \in S_c$ pravimo, da je med hipotezo in opravljenim poskusom *značilna razlika*, kar je osnova za zavrnitev hipoteze.

$\Rightarrow$

z izbiro kritične vrednosti S_c vplivamo na verjetnost za nastop napake

Osnovni problem testiranja je:

kako izbrati S_c da bo verjetnost za nastop napake prve vrste manjša ali kvečjemu enaka vnaprej predpisani vrednosti α , ki jo imenujemo *stopnja značilnosti* testa.

Primer : Izdelujemo vlakna ki imajo trdnost X [N] porazdeljeno z $N(x;\, m, \sigma) = N(x;\, 10,\, 2.5)$. Proces izdelave vlaken izboljšamo. Vpeljava izboljšave, bi bila upravičena če bi dosegli $m_{iz} \geq 10.5$ N. Po novem postopku smo izdelali 25 vlaken, za katere smo ugotovili, da velja $\sigma_{iz} = \sigma = 2.5$N

Ugotoviti moramo ali z novim postopkom dejansko izboljšali povprečno trdnost vlaken?

V ta namen:

1) *Postavimo hipotezo*, z novim postopkom ***se trdnost ni*** spremenila $H_0(m{=}m_0)$

2) Opredelimo kritično vrednost in področje

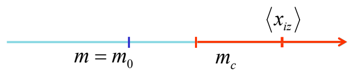
$S_c = (m_c = m_{iz,min}, \infty)$

oziroma interval zavračanja hipoteze H_0 .

3) Pomerimo trdnost novih 25. vlaken in ocenimo povprečno vrednost populacije x_{iz} s cenilko vzorčnega povprečja:

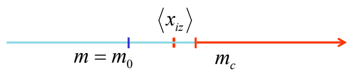
$$\langle x_{iz} \rangle_{n=25} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i,iz}$$

4) Če je vzorčno povprečje $\langle x_{iz} \rangle \in S_C$



hipotezo H_0 ***zavrnemo*** in *predlagamo vpeljavo novega postopka*.

Če vzorčno povprečje $\langle x_{iz} \rangle \notin S_C$



hipotezo H_0 ***ne zavrnemo*** in *ne predlagamo vpeljavo novega postopka*.

Za podrobnejše ovrednotenje testiranja hipoteze $H_0(m=m_0)$ je potrebno ovrednotiti verjetnost za nastop napak I in II vrste.

Ovrednotenje verjetnosti napake I vrste:

Napako I vrste naredimo, če zavrnemo $H_0(m=m_0)$ ob predpostavki, da je $H_0(m=m_0)$ pravilna.

Verjetnost za nastop *napake I vrste* je:

$$\alpha = P(\text{napaka I}) = P(H_0 \text{ zavrnemo} \,|H_0 \text{ je pravilna})$$

$H_0(m=m_0)$ zavrnemo če je:

$$\langle X \rangle \in S_C = (m_c, \infty)$$

$\Rightarrow$

$$P(\text{napaka I}) = P(\langle X \rangle \in S_C \,|H_0 \text{ je pravilna})$$

Za izračun verjetnosti napake I vrste moramo poznati porazdelitveno funkcijo vzorčnega povprečja $\langle X \rangle$:

$$f_{\langle X \rangle | H_0(m=m_0)}(\langle x \rangle)$$

za primer da je $H_0(m=m_0)$ pravilna oziroma, da je proces izdelave nespremenjen.

Za nespremenjen proces je X porazdeljen z

$$N(x; m_x, \sigma_x) = N(x; 10, 2.5)$$

zato je porazdelitev $\langle X \rangle$ tudi normalna :

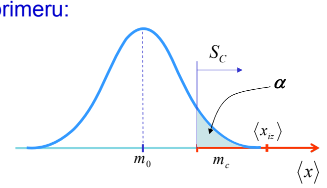
$$f_{\langle X \rangle | H_0(m=m_0)}(\langle x \rangle) = N(\langle x \rangle; m_X, \sigma_X / \sqrt{n}) = N(\langle x \rangle; 10, 0.5)$$

Verjetnost za nastop napake I vrste je:

$$\alpha = P(\langle X \rangle \in S_C \,|H_0 \text{ je pravilna})$$

$$= \int_{S_C} f_{\langle X \rangle | H_0(m=m_0)}(\langle x \rangle) \mathrm{d}\langle x \rangle$$

V našem primeru:



$$\alpha = \int_{S_C} f_{\langle X \rangle | H_0(m=m_0)}(\langle x \rangle) \mathrm{d}\langle x \rangle = \int_{m_k}^{\infty} f_{\langle X \rangle | H_0(m=m_0)}(\langle x \rangle) \mathrm{d}\langle x \rangle$$

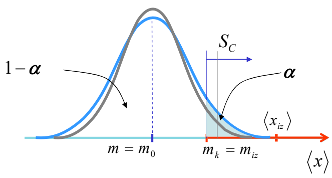
Standardizirana spremenljivka, ki ustreza m_C=

$$Z_\alpha = (m_c - m) / \sigma_{\langle X \rangle} = 1$$

$$\alpha = 0.5 - \Phi(1) = 0.16$$

Verjetnost, da pravilno hipotezo zavrnemo je $\alpha = 0.16$.
$\Rightarrow$
V povprečju bi 16 % naključnih vzorcev bi vodilo k zavrnitvi pravilne hipoteze.

Napako I vrste oziroma stopnjo značilnosti α lahko zmanjšamo tako, da povečamo območje sprejemanja 1- α in/ali pa, da povečamo velikost vzorca n.



Ovrednotenje verjetnosti napake II vrste:

Napako II vrste naredimo, če sprejmemo $H_0(m{=}m_0)$ ob tem, da je $H_0(m{=}m_0)$ napačna.

Pogoj, da H_0 sprejmemo je: $\langle X \rangle \notin S_k$

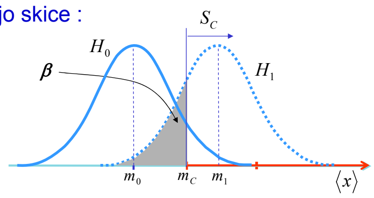
Verjetnost za nastop napake II vrste je:

$$\beta = P(\text{napaka II}) = P(H_0 \text{ sprejmemo } | H_0 \text{ je napačna})$$

Za izračun verjetnosti napake II vrste potrebujemo alternativno hipotezo H_1:

$$H_0(m{=}m_0) \quad \text{in} \quad H_1(m_1 > m_0)$$

S pomočjo skice :



verjetnost β za nastop napake II vrste podamo z:

$$\beta = P(\langle X \rangle \notin S_C \, | H_0 \text{ je napačna})$$
$$= P(\langle X \rangle \notin S_C \, | H_1(m = m_1 > m_0)) = \int_{\notin S_C} f_{\langle X \rangle | H_1(m=m_1)}(\langle x \rangle) \mathrm{d}\langle x \rangle$$

Kar ustreza verjetnosti, da izmerjeno vzorčno povprečje leži izven S_C, $\langle X \rangle \notin S_k$ n

V našem primeru je:

$$\beta = \int_{\notin S_C} f_{\langle X \rangle | H_1(m=m_1)}(\langle x \rangle) \mathrm{d}\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{m_c} f_{\langle X \rangle | H_1(m=m_1)}(\langle x \rangle) \mathrm{d}\langle x \rangle$$

Z upoštevanjem : $f_{\langle X \rangle | H_1(m=m_1)}(\langle x \rangle) = N(x; m_1, \sigma_{\langle X \rangle})$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\langle X \rangle}} \int_{-\infty}^{m_c} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2_{\langle X \rangle}}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(m_c - m_1)/\sigma_{\langle X \rangle}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_c - m_1}{\sigma_{\langle x \rangle}}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{m_1 - m_c}{\sigma_{\langle x \rangle}}\right)$$

Z:

$$\beta = P(\langle X \rangle \notin S_C | H_1) = \int_{\notin S_C} f_{\langle X \rangle | H_1}(\langle x \rangle) \mathrm{d}\langle x \rangle$$

podamo verjetnost napake II vrste oziroma verjetnost, *da* sprejmemo napačno hipotezo H_0 .

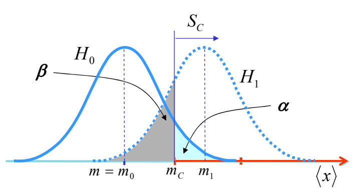
Z:

$$1 - \beta = P(\langle X \rangle \in S_C | H_1) = \int_{S_C} f_{\langle X \rangle | H_1}(\langle x \rangle) \mathrm{d}\langle x \rangle$$

pa podamo *verjetnost, da* zavrnemo napačno hipotezo H_0.

1-β imenujemo jakost testa in je tako kot napaka II vrste določena z: $f_{\langle X \rangle | H_1}(\langle x \rangle)$

Iz skice:

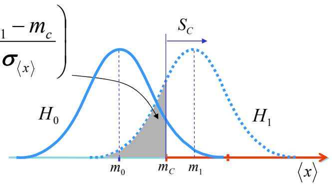


je razvidno, da z manjšanjem območja S_C zmanjšujemo verjetnost napaka I vrste α in hkrati povečujemo β verjetnost napake II vrste .

Običajno postopamo tako, da predpišemo dovoljeni α oz. stopnjo značilnosti testa s čimer posredno določimo tudi jakost testa 1-β .

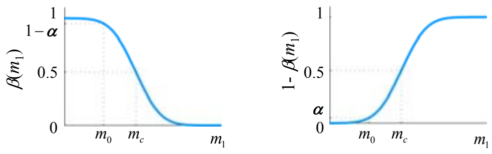
Odvisnost β od parametra m_1, ki je v našem primeru podana z :

$$\beta(m_1) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{m_1 - m_c}{\sigma_{\langle x \rangle}}\right)$$

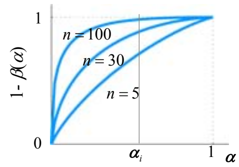


Grafično $\beta(m_1)$ in 1- $\beta(m_1)$ predstavimo z grafom, ki ga imenujemo operativna karakteristika testa in jakost testa.

Operativna karak. testa $\beta(m_1)$ in jakosti testa 1- $\beta(m_1)$:



Jakost testa 1- $\beta(\alpha)$:



Povzetek vpeljanih karakteristik pri testiranju hipotez:

α verjetnost, da pravilno hipotezo H_0 zavrnemo in s tem storimo napako I vrste, imenujemo stopnja značilnosti.

1- α verjetnost, da pravilno hipotezo H_0 ne zavrnemo.

β verjetnost, da napačno hipotezo H_0 sprejmemo in s tem storimo napako II vrste.

1- β verjetnost, da napačno hipotezo H_0 zavrnemo imenujemo jakost testa 1- β

Tabela odločitev pri testiranju hipoteze H_0:

Stanje / Odloči.	H_0 je pravilna	H_0 je napačna
H_0 ne zavrnemo	OK (1- α)	napaka II vrste (β)
H_0 zavrnemo	napaka I vrste (α)	OK (1- β)

Pomen karakteristik pri nadzoru kakovosti izdelkov:

Postavimo ničelno hipotezo:

$$H_0(),$$

ki zagotavlja, da so bili izdelki narejeni pod pogoji, ki zagotavljajo zahtevano kakovost izdelkov

in z α predpišemo največjo dovoljeno napako I vrste

Pri dobavi izdelkov izberemo vzorec izdelkov $\boldsymbol{v}$ velikosti n :

$$\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

in na njem opredelimo statistiko $Z(\boldsymbol{v})$.

Zaradi naključne narave statistike $Z(\boldsymbol{v})$ se lahko zgodi:

1) Predpostavimo, da je proces kvaliteten:

hipoteza $H_0()$ je pravilna

Če $Z(\boldsymbol{v}) \in S_C$

na osnovi vzorca zavrnemo preostale izdelke, ki so sicer lahko kakovostni.

Izdelke zavrnemo z tveganjem α, ki je enako verjetnosti α, da zavrnemo pravilno hipotezo $H_0()$.

α predstavlja tveganje dobavitelja

2) Predpostavimo, da se proces poslabšal:

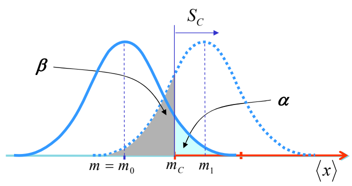
hipoteza $H_0()$ je napačna

Če $Z(\mathbf{v}) \notin S_C$

na osnovi vzorca sprejmemo preostale izdelke, ki so lahko nekakovostni.

tveganje β, da sprejmemo nekakovostne izdelke je enako verjetnosti β, da sprejmemo napačno hipotezo $H_0()$.

β predstavlja tveganje kupca



hipoteza $H_0()$ je pravilna

α predstavlja tveganje dobavitelja

hipoteza $H_0()$ je napačna

β predstavlja tveganje kupca

Enostranski in dvostranski testi

V primeru, ko je kritično območje S_C ali območje zavračanja opredeljeno z enostranski intervalom zavračanja:

$$S_C = (m_c, \infty)$$

oziroma, ko je alternativna hipoteza H_1 ničelne hipoteze H_0 podana v obliki:

$$H_0(m = m_0) \qquad\qquad H_0(m = m_0)$$
$$H_1(m_1 < m_0) \quad \text{ali} \quad H_1(m_1 > m_0)$$

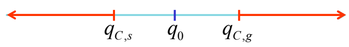
Govorimo o enostranskih alternativnih hipotezah oziroma enostranskih testih.

ko je alternativna hipoteza H_1 ničelne hipoteze H_0 podana v obliki:

$$H_0(m = m_0)$$
$$H_1(m_1 \neq m_0)$$

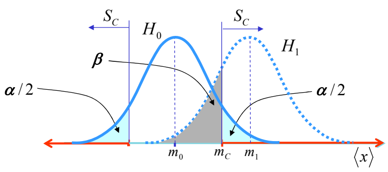
Predstavlja H_1 dvostransko alternativnih hipotezo, ki jo statistično preverimo z dvostranskim testom.

Kritično področje S_C je v tem primeru podano z:



$$S_C = (m_{c,s} > m > m_{c,g})$$

Napaka I in II vrste pri dvostranskem testu



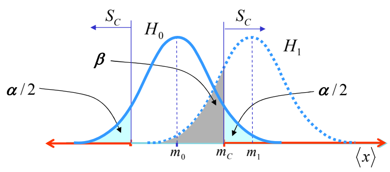
Napaka I vrste:

$$\alpha = P(\langle X \rangle \in S_C \,|H_0 \text{ je pravilna}) = \int_{S_C} f_{\langle X \rangle | H_0(m=m_0)}(\langle x \rangle) \mathrm{d}\langle x \rangle$$

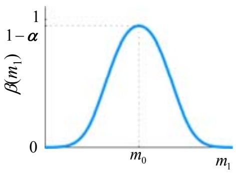
Napaka II vrste:

$$\beta = P(\langle X \rangle \notin S_C \,|H_0 \text{ je napačna})$$
$$= P(\langle X \rangle \notin S_C \,|H_1(m = m_1 \neq m_0)) = \int_{\notin S_C} f_{\langle X \rangle | H_1(m=m_1)}(\langle x \rangle) \mathrm{d}\langle x \rangle$$

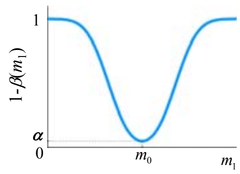
Karakteristiki dvostranskega testa



Operativna karakteristika:



Jakost testa:



Primer : Dobavijo nam vzmeti z dolžino X, z normalno porazdelitvijo. Zahtevamo, da je srednja vrednost vzmeti m_x=50 cm. Tveganje proizvajalca pri dobavi naj bo α =0.05. Za testiranje imamo vzorec 10. vzmeti z srednjo vrednostjo $\langle x \rangle$=53 cm in deviacijo S=5cm . Kaj lahko sklepamo o dobavljeni količini vzmeti.

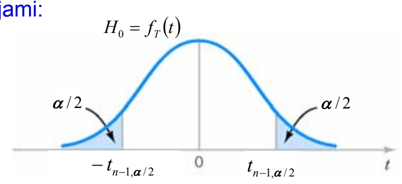
Postavimo ničelno in alternativno hipotezo:

$$H_0(m = m_0 = 50)$$
$$H_1(m_1 \neq m_0 = 50)$$

Parameter obravnave je srednja vrednost, poznamo vzorčno deviacijo S . Kot statistiko izberemo :

$$T = \frac{\langle X \rangle - m_0}{S\sqrt{n}},$$

ki ima Studentovo porazdelitve z n-1 prostostnimi stopnjami:



Iz tabele, ki tabelira verjetnost:

$$P\left(T_{n-1} \geq t_{n-1,\alpha/2}\right) = \int_{t_{n-1,\alpha/2}}^{\infty} f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\,z = \alpha/2$$

za $\alpha/2$=0.025 odčitamo:

$$t_{n-1,\alpha/2} = t_{9,0.025} = 2.2622$$

Hipotezo H_0 ne zavrnemo, ker vzorčno povprečje $\langle x \rangle$ =53 ni zunaj območja:

$$m_0 \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} = \left(50 \pm \frac{2.2622 \cdot 5}{\sqrt{10}}\right) = 50 \pm 3.58$$

Splošni postopek pri testiranji parametričnih hipotez

1. Iz vsebine problema določimo parameter obravnave.
2. Opredelimo ničelno hipotezo H_0.
3. Opredelimo ustrezno alternativno hipotezo H_1.
4. Izberemo stopnjo značilnosti α .
5. Opredelimo testno statistiko
6. Opredelimo področje zavračanja S_C .
7. Iz vzorca izračunamo potrebne količine, jih vstavimo v statistiko z, in izračunamo vrednost statistike.
8. Na osnovi vrednosti statistike H_0 zavrnemo ali pa ne in odločitev utemeljimo.

11.2 Testi za preverjanje hipotez

11.2.1 Prilagoditveni neparametrični test χ^2

Doslej smo privzeli, da je porazdelitvena funkcija poznana in smo s pomočjo *parametričnih testov* oziroma hipotez obravnavali samo parametre porazdelitve spremenljivke X .

Z *neparametričnimi testi* oziroma hipotezami domnevamo o tipu porazdelitvenega zakona spremenljivke X .

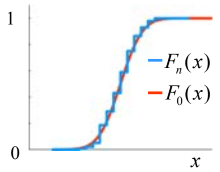
Primer: Obravnavajmo populacijo X . Na voljo imamo realizacijo naključnega vzorca:

$$\mathbf{v}=(x_1,x_2,....x_n)$$

Iz vzorca $\mathbf{v}$ tvorimo zbirno porazdelitev $F_n(x)$.

Domnevamo, da $F_n(x)$ lahko opišemo s teoretično porazdelitvijo $F_0(x)$.

Grafični prikaz $F_n(x)$ in $F_0(x)$:



F_n je funkcija vzorca in je naključne narave.
Testirati je potrebno hipotezo:

$$H_0(F_n = F_0)$$

Določitev testne statistike

Obravnavajmo naključno spremenljivko X. Zalogo vrednosti spremenljivke X razdelimo na r razredov oziroma intervalov Δx :

$$S_1, S_2, \ldots, S_r$$

Verjetnost p_{i0} za nastop razreda S_i je podana z:

$$p_{i_0} = P(X \in S_i | H_0) = \int_{\Delta x} \mathrm{d}\, F_0$$

Na razpolago imamo vzorec $\boldsymbol{v}$ spremenljivke X :

$$\boldsymbol{v}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

Od vrednosti x_i jih n_i spada v razred S_i .

Za primerjavo porazdelitev pogostosti n_i in hipotetičnih pogostosti np_{i0} opredelimo statistiko:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_{i_0})^2}{np_{i_0}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n_{i_0})^2}{n_{i_0}} = n \sum_{i=1}^{r} \frac{(p_i - p_{i_0})^2}{p_{i_0}}$$

Večja, ko je χ^2 slabše je ujemanje porazdelitev $F_n(x)$ in $F_0(x)$ ter obratno.

$\Rightarrow$
Na osnovi statistike χ^2 bomo H_0 zavrnili kadar bo:

$$\chi^2 \geq \chi_C^2$$

Ker je χ^2 naključna spremenljivka zgornji pogoj opredelimo z verjetnostjo:

$$P(\chi^2 \geq \chi_C^2) = \alpha$$

V ta namen moramo poznati porazdelitev χ^2 .

Pokazano je, da je v splošnem asimptotična porazdelitev statistike χ^2, $\chi^2(n \to \infty)$ $\Rightarrow$ hi-kvadrat.

$$np_{i_0} \geq 5 \text{ ziroma } \quad n_i \geq 5$$

Število prostostnih stopenj je:

$$k=r-l-1$$

Kjer je r število razredov in l neznanih parametrov porazdelitve $F_0(x)$, ki jih določamo iz vzorca.

S poznavanjem porazdelitve statistike pri dani stopnji značilnosti izračunamo α :

$$P(\chi^2 \geq \chi_C^2 = \chi_{k,\alpha}^2) = \alpha$$

Če je iz vzorca izračunana statistika:

$$\chi^2 > \chi_C^2$$

F_0 izrazito odstopa od empirične F_n in H_0 zavrnemo.

V primeru, ko je $\chi^2 < \chi_C^2$, H_0 ne zavrnemo, kar še ne pomeni, da je H_0 pravilna!

Primer : V tabeli imamo predstavljen rezultat 10 poskusov, ugotavljanja števila X slabih izdelkov v vzorcih velikosti n=10 .

x	0	1	2	3
n_x	4	3	2	1

Preverimo, ali lahko s tveganjem $\alpha = 0.05$ zavrnemo H_0 , da je porazdelitev števila slabih izdelkov x Poissonova.

Iz podatkov izračunamo:

$$\theta = \langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}(4\cdot 0 + 3\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1) = 1$$

Iz Poissonove porazdelitve: $P(x) = \theta^x e^{-\theta}/x!$

izračunamo hipotetične verjetnosti p_{i0} in pogostosti n_{io}=$p_{i0}\, n$:

x	0	1	2	3
p_{io}	0.37	0.37	0.18	0.06
n_{io}	3.7	3.7	1.8	0.6

Iz vrednosti za n_x in n_{io} izračunamo statistiko:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4}\frac{(n_i - n_{i_0})^2}{n_{i_0}} = 0.445$$

Iz tabele porazdelitve χ^2 za k=r-l-1=4-1-1=2 dobimo kritično vrednost statistike:

$$\chi_C^2 = \chi_{k,\alpha}^2 = \chi_{2,0.05}^2 = 5.991$$

In interval zavračanja:

$$S_C = (5.991, \infty)$$

Ker :

$$\chi^2 = 0.445 \notin Sc = (5.991, \infty)$$

Hipotezo H_0 ,da je $F_n = F_o$ = Poissonova porazdelitev ne zavrnemo.

11.2.2 Test Kolmogorova

Primeren je za hitro oceno ujemanja med predpostav-ljeno teoretično F_0 in na osnovi vzorca $\boldsymbol{v}$ izmerjeno empirično porazdelitvijo F_n verjetnosti populacije X .

Velja namreč, da je:

$$D_n = \max_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F_0(x)|$$

Naključna spremenljivka, katere porazdelitev lahko določimo po analitični poti.

V ta namen vpeljemo statistiko:

$$\Lambda_n = D_n\sqrt{n}\ ,$$

ki ji ustreza asimptotična porazdelitev verjetnosti Kolomogorov-Smirnova:

$$\lim_{n\to\infty} = P(\Lambda_n < \lambda) = Q(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$$

Pri tem n predstavlja velikost vzorca $\boldsymbol{v}$. Porazdelitev K-S je podana v tabeli.

Postopek uporabe testa Kolmogorova:

1) Imamo vzorec $\boldsymbol{v}$ velikosti n iz katerega tvorimo empirično porazdelitev F_n.
2) Na osnovi poteka F_n predpostavimo, da porazdelitev populacije X lahko opišemo z F_0.
3) Izračunamo maksimalno razliko:

$$D_n = \max_{-\infty<x<\infty} \left|F_n(x) - F_0(x)\right|$$

4. Za podano stopnjo značilnosti oziroma zavračanja testa α iz tabele določimo kritično vrednost λ_c.
5. Če je izračunana statistika:

$$\Lambda_n = D_n\sqrt{n} > \lambda_c$$

hipotezo o ujemanju porazdelitev F_n in F_0 zavrnemo.

V primeru ko:

$$\Lambda_n = D_n\sqrt{n} < \lambda_c$$

pa nimamo razloga za zavrnitev hipoteze.

Primerjava dveh vzorcev ali empiričnih porazdelitev

K-S test lahko uporabimo tudi za oceno ali vzorca $\boldsymbol{v}_1$ in $\boldsymbol{v}_2$ razsežnosti $n_1$in n_2 pripadata isti poulaciji X.

V ta namen izračunamo maksimalno razliko:

$$D_{n_1,n_2} = \max_{-\infty<x<\infty} \left|F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)\right|$$

vzorčnih porazdelitev F_{n1} in F_{n2} .

In uporabimo modificirano statistiko Λ_n:

$$\Lambda_{n_1,n_2} = D_{n_1,n_2}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}, \quad \text{za } n_1 \neq n_2$$

ki v primeru n_1=n_2 dobi obliko:

$$\Lambda_{n_1,n_2} = D_{n_1,n_2}\sqrt{n/2}, \quad \text{za } n_1 = n_2$$

Statistiki $\Lambda_{n1,n2}$ ustreza porazdelitev Kolmogorov-Smirnova. Če pri izbrani stopnji zavračanja α velja:

$$\Lambda_{n_1,n_2} > \lambda_c$$

je razlika med obema porazdelitvama značilna oziroma vzorca vzorca $\boldsymbol{v}_1$ in $\boldsymbol{v}_2$ ne pripadata isti populaciji X .

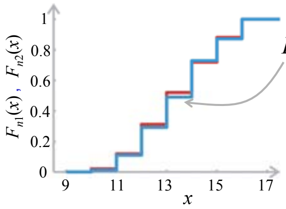
Primer: Imamo dva stroja, S_1 in S_2 , ki izdelujeta enake izdelke dolžine X_1 in X_2 Na voljo imamo dva vzorca $\boldsymbol{v}_1$ in $\boldsymbol{v}_2$ velikosti n , po enega za vsak stroj. Iz vzorcev smo določili porazdelitvi pogostosti $F_{1,n}$ in $F_{2,n}$.

x	9	10	11	12	13	14	15	16
$n_{1,i}$	0	2	12	31	52	72	88	100
$n_{2,i}$	0	1	11	29	49	73	87	100

Zanima nas ali lahko pri stopnji zavračanja α=0.05 zavrnemo hipotezi:

1) Obe porazdelitvi F_{n1} in F_{n2} sta enaki:
$H_0(F_{n1} = F_{n2})$
2) Porazdelitev $F_{n1} = F_{n2}$ je normalna:
$H_0(F_{n1} = F_{n2} = \mathcal{N})$

Grafa porazdelitev F_{n1} in F_{n2} :



$$D_{n_1,n_2} = |F_{n,1}(13) - F_{n,2}(13)| = 0.03$$

$$\lambda_n = D_n\sqrt{n/2} = 0.21$$

Iz tabele porazdelitve K-S za α=0.05 preberemo kritično vrednost λ_α statistike Λ_{n_1,n_2} :

$$\lambda_\alpha = \lambda_{0.05} = 1.358$$

Interval zavračanja:

$$S_C = (1.358, \infty)$$

Ker:

$$\lambda_n = 0.21 \notin S_C = (1.358, \infty)$$

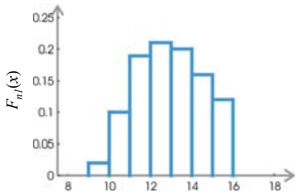
Hipoteze $H_0(F_{n1} = F_{n2})$ o enakosti obeh porazdelitev ***ne moremo zavrniti***.

Za testiranje druge hipoteze $H_0(F_{n1} = F_{n2} = \mathcal{N})$ je potrebno oceniti srednjo vrednost in varianco populacije X_1 ali X_2 .

V ta namen iz določimo porazdelitev relativnih frekvenc:

$$f_{1i} = \Delta n_{1i} / n$$

x	9.5	10.5	11.5	12.5	13.5	14.5	15.5
$f_{1i}=\Delta n_{1i}/n$	0.02	0.10	0.19	0.21	0.20	0.16	0.12



Iz vzorčne porazdelitve verjetnosti ocenimo srednjo vrednost in varianco:

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{8} x_i f_i = 12.94$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x_i \rangle\right)^2 f_i = 2.53 \Rightarrow S = 1.59$$

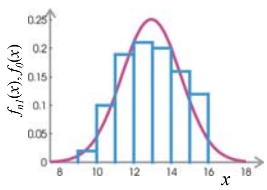
S pomočjo vzorčne srednje vrednosti in variance opredelimo standardni odmik:

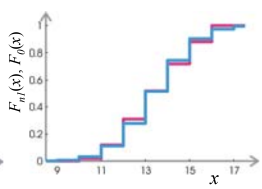
$$z = \frac{x - \langle x \rangle}{S}$$

In hipotetitično normalno porazdelitev:

$$F_0(z) = 0.5 + \Phi(z)$$

Grafa empirične in hipotetične porazdelitve gostote:





Izračunamo standarditirane vrednosti $F_{n1}(z)$, $F_0(z) = \mathcal{N}$ in razlike $|F_{n1}(z) - F_0(z)|$:

x_i	9.5	10.5	11.5	12.5	13.5	14.5	15.5
z_i	-1.85	-1.22	-0.59	-0.04	0.67	1.30	1.93
$F_0(z)$	0.03	0.11	0.28	0.52	0.75	0.90	0.97
$F_{n1}(z)$	0.02	0.12	0.31	0.52	0.72	0.88	1.00
$\lvert F_0(z)- F_{n1}(z)\rvert$	0.01	0.01	0.03	0.00	0.03	0.02	0.03

Vrednost K-S statistike je:

$$\lambda_n = D_n\sqrt{n/2} = 0.03\sqrt{100} = 0.3$$

Ker:

$$\lambda_n = 0.3 \notin S_C = (1.358, \infty)$$

Hipoteze $H_0(F_{n1} = F_{n2} = N)$, da je F_{n1} normalna pri izbrani stopnji zavračanja $\alpha = 0.05$ ***ne moremo zavrniti***.