Pregled predavanj

1. Naključni procesi (Pog. 7)
2. Vzorčenje procesov (Pog. 14)
3. Linearne transformacije procesi (Pog. 8)
4. Kaotični procesi

Poglavje 7

Naključni procesi

7.0 Osnovne definicije in primeri

Pri obravnavi lastnosti naključnih spremenljivk:

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots X_n)$$

način izvedbe n poskusov (bodisi hkratno ali v časovnem zaporedju) nima vpliva na izid opisa verjetnostnih lastnosti.

Naključni proces je pojav oziroma poskus, ki je opredeljen z $n \to \infty$ izidi zaporednih meritev naključne spremenljivke X.

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots X_n) = \{ X_n, n = 1,2,\dots \}$$

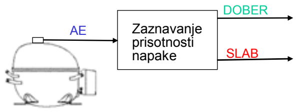
Diskretni naključni proces:

V primerih, ko pojav opišemo z diskretno izmerjenimi komponentami X_n, ki jih označimo z naravnimi števili $n = 1,2,\dots$ in predstavimo z zaporedjem:

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots) = \{ X_n, n = 1,2,\dots \}$$

kjer je X_n bodisi zvezna ali diskretna naključna spremenljivka, $\boldsymbol{X}$ imenujemo naključni diskretni proces po parametru .

Benoullijev proces:
(Proces zaznavanja prisotnosti napake kompresorjev)

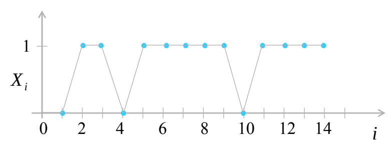


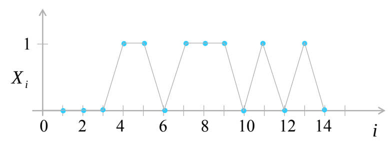
$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_i, \dots) = \{ X_i, i = 1,2,\dots \}$$

Kjer je X_i Bernoullijeva spremenljivka z zalogo vrednosti:

$$X_i = \begin{cases} 0, & dober \\ 1, & slab \end{cases}$$

Primera grafov vzorčih n dimenzionalnih zaporedij Bernoullijevega procesa:

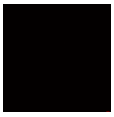


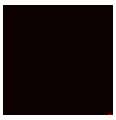


Še dva primera Bernoullijevega procesa:

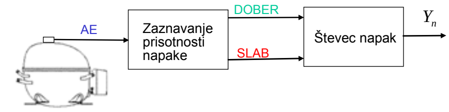
Odlet kapljice pri laserskem tvorjenju kapljic:

Prisotnost izbrizgov pri laserskem tvorjenju kapljic:





Binomski proces:
(Proces znavanja števila napak kompresorjev)



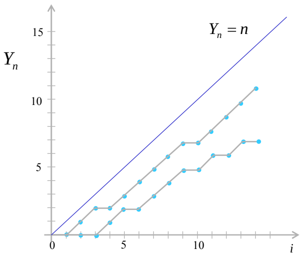
$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Kjer je X_i Bernoullijeva spremenljivka:

$$X_i = \begin{cases} 0, & dober \\ 1, & slab \end{cases}$$

Zaloga vrednosti Y_n=$(0,1,......n)$

Primera grafov vzorčnih n dimenzionalnih zaporedij Bernoullijev-ega procesa:



Zvezni naključni proces

V primerih, ko pri opisu pojava oziroma zaporedja meritev nastopa indeks $t \in \Re$ z zalogo vrednosti z zveznega intervala T=$[t_1,t_2]$:

$$\boldsymbol{X}(t) = \left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots\right) = \left\{ X_{t_n}, t_n \in [t_1, t_n] \in \Re \right\}$$

kjer je X_n bodisi zvezna ali diskretna naključna spremen-ljivka $\boldsymbol{X}(t)$ imenujemo naključni zvezni proces po parametru .

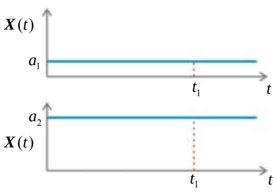
Primeri zveznih naključnih procesov:

Proces z naključno konstantno amplitudo ali nak-ljučnimi konstatntnimi funkcijami je podan z:

$$\boldsymbol{X}(t) = A$$

kjer je A naključna spremenljivka.

Primera vzorčnih funkcij procesa z naključno konstantno amplitudo $X_i(t) = a_i$:

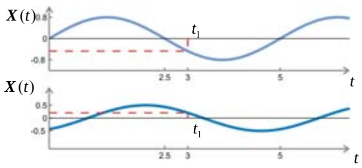


Sinusni naključni proces je poda z:

$$\boldsymbol{X}(t) = A\sin(\Omega t + \Phi)$$

kjer je so A, Ω, in Φ naključne spremenljivke.

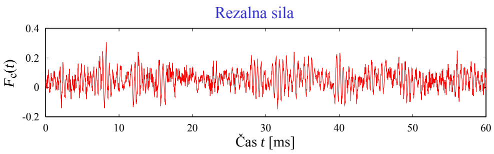
Primera vzorčnih funkcij $X_i(t) = a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ sinusnega naključnega procesa:



Še nekateri primeri zveznega naključnega procesa:

- Merjenje premera d zveznega procesa zdelava žice
- Signali rezalnih sil F, pomikov, pospeškov ….

Primer izmerjene vzorčne funkcije signala rezalne sile:



7.1 Opis naključnih lastnosti procesov

Diskretni naključni proces predstavimo kot vektorsko naključno spremenljivko X s števno neskončno mnogo komponentami:

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots) = \{\, X_i, i = 1, 2, \ldots\}$$

Kjer je X_i naključna spremenljivka z zalogo vrednosti v vzorčnem prostoru S_{Xi} .

Naključni vektor $\boldsymbol{X}$ ima zalogo vrednosti podano v števno neskončno dimenzionalnem vzorčnem prostoru:

$$S_{\boldsymbol{X}} = S_{X_1} \times S_{X_2} \cdots$$

Posamezni izid diskretnega naključnega procesa lahko predstavimo z vektorjem $\boldsymbol{x}_s$ oziroma z vzorčnim zaporedjem, ki ima števno neskončno mnogo komponent:

$$\boldsymbol{x}_s = (x_1, x_2, \ldots)$$

$\boldsymbol{x}_s$ predstavlja točko vzorčnega prostora:

$$S_{\boldsymbol{X}} = S_{X_1} \times S_{X_2} \cdots$$

Analogno lahko zvezni naključni proces:

$$\boldsymbol{X}(t) = (X(t); t \in T)$$

predstavimo kot vektorsko naključno spremenljivko $\boldsymbol{X}(t)$ z neskončno mnogo komponentami X_{ti}

$$\boldsymbol{X}(t) = (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_i}, \ldots)$$

kjer ima t_i zalog vrednosti v intervalu $T \in \Re$. Naključna spremenljivka X_{ti} pa ima zalogo vrednosti v vzorčnem prostoru $S_{X_{t_i}}$.

Naključni vektor $\boldsymbol{X}(t)$ ima zalogo vrednosti podano v neskončno dimenzionalnem vzorčnem

$$S_{\boldsymbol{X}} = S_{X_{t1}} \times S_{X_{t2}} \cdots$$

Posamezni izid naključnega procesa lahko predstavimo z vzorčno funkcijo naključnega procesa:

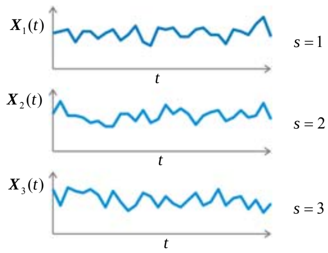
$$\boldsymbol{x}_s(t) = (x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots),$$

ki predstavlja točko vzorčnega prostora:

$$S_{\boldsymbol{X}} = S_{X_{t1}} \times S_{X_{t2}} \cdots$$

Vzorčno zaporedje ali funkcija naključnega procesa sta odvisni od dogodka s.

Nabor vzorčnih zaporedij ali vzorčnih funkcij imenujemo *skupina* ali *ensemble*.



Naključni proces v splošnem predstavimo z naključno spremenljivko $\boldsymbol{X}$, ki je odvisna od indeksa i ali zveznega parametra t in naključnega dogodka s :

$$X(i,s) \qquad X(t,s)$$

$\Rightarrow$ Naključni proces lahko obravamo bodisi:

- po vzorčnem zaporedju ali funkciji v odvisnosti od dogodka $\{s_i : i=1,2,.....\}$:

$$X = X_s(i) \qquad X = X_s(t)$$

- po ensemblu v odvisnosti od izbranega indeksa i oziroma t_i:

$$X = X_i(s) \qquad X = X_t(s)$$

Naključne lastnosti diskretnega procesa $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots)$$

opišemo če podamo funkcijo porazdelitev povezane verjetnosti $F_{\boldsymbol{X}}$:

$$F_{\boldsymbol{X}} = F_{X_1,X_2,\ldots} = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots)$$

po vzorčnem prostoru $S_{\boldsymbol{X}}$

$$S_{\boldsymbol{X}} = S_{X_1} \times S_{X_2} \cdots$$

Analogno velja za zvezni proces:

Zvezni proces $\boldsymbol{X}(t)$ najprej diskretiziramo in mu priredimo števno neskončno vrednosti pri časih:

$$\{t_i \text{: i=1,2,...}\}$$

$$\boldsymbol{X}(t) = \left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_i}\right)$$

In za izbrane čase podamo funkcijo porazdelitev povezane verjetnosti $F_{\boldsymbol{X}}$:

$$F_{X1, X2, \ldots} = P\,(\mathrm{X}(t_1) \le x_1,\ X(t_2) \le x_2,\ \ldots)$$

po vzorčnem prostoru $S_{\boldsymbol{X}}$:

$$S_{\boldsymbol{X}} = S_{X_{t1}} \times S_{X_{t2}} \cdots S_{X_{tn}}$$

Iz funkcije porazdelitve povezane verjetnosti $F_{\boldsymbol{X}}$:

$$F_{X_1X_2} = P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \ldots.)$$

po prostoru

$$S_{\boldsymbol{X}} = S_{X_{t_1}} \times S_{X_{t_2}} \cdots$$

lahko določimo vse porazdelitve povezane verjetnosti za končno mnogo komponent:

$$F_{X_1}(x_1) = P(X_1 \le x_1) = P(X_1 \le x_1, X_2 < \infty, \ldots.)$$

$$= F_{X_1X_2}\ldots(x_1, \infty, \ldots)$$

7.2 Primeri opisa naključnih procesov

7.2.1 Bernoullijev proces (n=2) :

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$$

Spremenljivki X_1 in X_2 sta Bernoullijevi spremenljivki z zalogo vrednosti:

$$S_{X_1} = S_{X_2} = (0,1)$$

in s porazdelitvijo verjetnosti:

$$P(X_i = 1) = p \quad \text{in} \quad P(X_i = 0) = (1-p) = q$$

Zaloga vrednosti procesa $\boldsymbol{X}$ v 2 dimenzionalnem vektorskem vzorčnem prostoru je podana :

$$S_{\boldsymbol{X}} = S_{X_1} \times S_{X_2} = \{(0,0); (0,1); (1,0), (1,1)\}$$

z $2^{(n=2)}$ vzorčnimi točkami (x_1,x_2) .

Naključne lastnosti procesa popišemo s porazdelitvijo povezane verjetnosti po prostoru $\boldsymbol{S_X}$:

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = q.q = q^2$$
$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = q.p$$
$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = p.q$$
$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = p.p = p^2$$

Posplošeno lahko zapišemo, da je zaloga vrednosti n dimenzionalnega zaporedja Bernoullijevaga procesa

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

podana s kartezičnim produktom:

$$S_X = S_{X_1} \times S_{X_2} \cdots S_{X_n}$$

Porazdelitev povezane verjetnosti po S_X je podana z množico 2^n povezanih verjetnosti:

$$P(X_1 = x_1, X_1 = x_2, \ldots X_n = x_n)$$
$$= P(X_1 = 0, X_1 = 0, \ldots X_n = 0) = q^n$$
$$\cdots\cdots\vdots\cdots\cdots$$
$$= P(X_1 = 1, X_1 = 1, \ldots X_n = 1) = p^n$$

7.2.2 Binomski proces je opisan z:

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Kjer je X_i Bernoullijeva statistično neodvisna spremenljivka:

$$X_i = \begin{cases} 0, & dober \\ 1, & slab \end{cases}$$

Porazdelitev verjetnosti binomske naključne spremen-ljivke je podana z:

$$P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

ki je odvisna od vrednosti zaporednega indeksa n .

Poleg tega velja, da Y_n niso neodvisne spremenljivke oziroma:

$$P(Y_n = k, Y_{n+1} = j) \neq P(Y_n = k) P(Y_{n+1} = j)$$

$\Rightarrow$ Določitev povezani verjetnosti je zahtevno.

7.2.3 Normalni proces :

$$\{\boldsymbol{X}(t) : t \in T\}$$

z normalno porazdelitvijo za vsak $n \in \aleph$:

$$\boldsymbol{X}(t) = \{X(t_1), X(t_2), \ldots\ X(t_n)\}$$

Gostota povezane verjetnosti je podana z:

$$f_{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_3)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |K|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2|K|} \sum_i \sum_j A_{ij} (x_i - m_i)(x_j - m_j)\right)$$

Gostota povezane verjetnosti je podana z:

$$f_{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_3)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |K|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2|K|} \sum_i \sum_j A_{ij} (x_i - m_i)(x_j - m_j)\right)$$

kjer je:

$m_i = \mathrm{E}[X(t_i)]$,

K . . . kovariančna matrika z elementi:

$K_{ij} = \mathrm{Cov}\,[X(t_i), X(t_j)]$,

$|K|$. . . determinanta matrike K

A_{ij} . . kofaktorji elementov matrike K

7.2.4 Proces s konstantnimi funkcijami:

Vzorčna funkcija procesa je konstantna z naključno amplitudo A in je podana z:

$$X(t, s) = A(s)$$

Naključne lastnosti procesa opišemo tako, da podamo :

$$F_A(a) = P(A \leq a)$$

7.2.5 Sinusni naključni proces:

Sinusni proces z naključno amplitudo A, frekvenco Ω in fazo Φ. je podana z:

$$X(t, s) = A(s)\sin(\Omega(s) + \Phi(s))$$

Naključne lastnosti procesa opišemo tako, da podamo povezano verjetnost :

$$F_{A,\Omega,\Phi}(a,\omega,\phi) = P(A \le a,\ \Omega \le \omega,\ \Phi \le \phi)$$

V predstavljenih primerih smo naključne lastnosti opisali:

- s porazdelitvijo povezane verjetnosti naključne spremenljivke
- porazdelitvijo povezane verjetnosti parametrov.

Kadar ne moremo določiti povezanih verjetnosti, uporabimo različna statistična povprečja.

7.3 Povprečje naključnega procesa

Dan je naključni proces:

$$X = X(t,s) : t \in T,\ s \in S$$

s funkcijo porazdelitve povezane verjetnosti:

$$F_{X(t_1),X(t_2),\ldots}(x_1, x_2, \ldots) = P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_1, \ldots)$$

Naj bo opredeljena funkcija g:

$$g = g\,(X(t_1), X(t_2), \ldots\, X(t_n))$$

Statistično povprečje funkcije g po skupini vzorčnih funkcij je opredeljeno z:

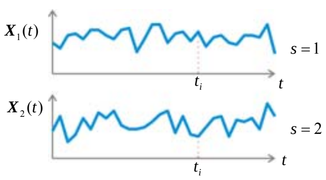
$$\mathrm{E}[g(X(t_1),\ldots X(t_n))] = \int g(x_1,\ldots, x_n)\,\mathrm{d}\,P(x_1,\ldots, x_n).$$

kjer $\mathrm{d}P\,(x_1,\ldots,x_n)$ označuje verjetnost:

$$\mathrm{d}P\,(x_1,\ldots,x_n) = (x_1 \le X(t_1) < x_1 + \mathrm{d}x_1, \ldots).$$

$$= f_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}\,x_1 \ldots \mathrm{d}\,x_n$$

Statistično povprečje procesa $X(t)$ po skupini vzorčnih funkcij ob času t_i:



$$\mathrm{E}[X(t_i)] = \int x\, f_{X(t_i)}(x)\,\mathrm{d}\,x = \int x\,\mathrm{d}\,P_{X(t_i)}(x).$$

$\mathrm{E}[X(t_i)]$ je v splošnem odvisno od časa t_i

Primeri izračuna statističnih povprečje $X(t)$ ob času t_i:

a) Proces $\{X(t){:}t \in T\}$ s konstantnimi vzorčnimi funkcijami:

$$X(t, s) = A(s)$$

$$\mathrm{E}[X(t)] = \int x f_{X(t)}(x)\,\mathrm{d}\,x = \int x\,\mathrm{d}\,P_{X(t)}(x)$$

$$= \int a\,\mathrm{d}\,P(a) = \int a f(a)\,\mathrm{d}\,a = \mathrm{E}[A]$$

$$\mathrm{E}[X(t)^2] = \mathrm{E}[A^2]$$

$\Rightarrow$ Statistično povprečje je neodvisno od **časa** t.

b) Sinusni proces z naključno amplitudo A :

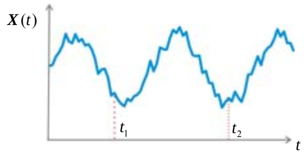
$$X(t, s) = A(s)\sin(\omega t)$$

$$\mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[A\sin(\boldsymbol{\omega}\cdot t)] = \mathrm{E}[A]\sin(\boldsymbol{\omega}\cdot t)$$

$$\mathrm{E}\left[X(t)^2\right] = \mathrm{E}\left[A^2\sin^2(\boldsymbol{\omega}\cdot t)\right] = \mathrm{E}\left[A^2\right]\sin^2(\boldsymbol{\omega}\cdot t)$$

$\Rightarrow$ Statistično povprečje je odvisno od **časa** t.

Korelacija procesa $X(t)$ pri dveh različnih časih:



Opredeljena je s statističnim povprečjem:

$$R_{XX}(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1), X(t_2)]$$
$$= \iint x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2 \quad ,$$

ki ga imenujemo avtokorelacijska funkcija procesa.

Primeri avtokorelacijske funkcije procesa $X(t)$:

a) Proces s konstantno naključno amplitudo:

$$R_{XX}(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}\left[A^2\right]$$

b) Sinusni proces:

$$R_{XX}(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1), X(t_2)]$$
$$= \mathrm{E}[A\sin(\boldsymbol{\omega}\cdot t_1)A\sin(\boldsymbol{\omega}\cdot t_2)]$$
$$= \mathrm{E}\left[A^2\right]\sin(\boldsymbol{\omega}\cdot t_1)\sin(\boldsymbol{\omega}\cdot t_2)$$

Kovarianca spremenljivke $X(t)$ pri dveh različnih časih:

Opredeljena je s kovariančno funkcijo:

$$K_{XX}(t_1,t_2) = \mathrm{E}[(X(t_1) - \mathrm{E}[X(t_1)])\cdot(X(t_2) - \mathrm{E}[X(t_2)])]$$
$$= R_{XX}(t_1,t_2) - \mathrm{E}[X(t_1)]\mathrm{E}[X(t_2)]$$

Pri $t_1=t_2$:

$$K_{XX}(t_1,t_1) = \mathrm{E}[(X(t_1) - \mathrm{E}[X(t_1)])\cdot(X(t_1) - \mathrm{E}[X(t_1)])] = \sigma^2$$

$$R_{XX}(t_1,t_1) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_1)] = \mathrm{E}\left[X(t_1)^2\right] \approx$$ Moč signala

Opažanja:

1. Momenti (povprečna vrednost, korelacijska in kovariančna funkcija) so v splošnem odvisni od časa t.
2. Obstajajo procesi, ko so momenti neodvisni od časa t.

Glede na časovno odvisnost momentov naključnih procesov ločimo stacionarne in nestacionarne procese.

7.4 Stacionarnost procesov

Definicija stacionarnosti procesa:

Proces $\{X(t)\colon t\in \mathrm{T}\}$ je stacionaren, če so vse porazdelitve povezanih verjetnosti invariantne na premik časa t:

$$P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \ldots..)$$
$$= P(X(t_1+t_0) \le x_1, X(t_2+t_0) \le x_2, \ldots..)$$

Vpliv pogoja stacionarnosti na PFV prvega reda

PFV prvega reda:

$$P(X(t_1) \le x_1) = P(X(t_1 + t_0) \le x_1)$$

$\Rightarrow$ Vsi momenti (povprečna vrednost, drugi moment ...) stacionarnega procesa X pri izbrani vrednosti t so neodvisni od t, oziroma momenti so konstantni.

Vpliv pogoja stacionarnosti na PFV drugega reda:

$$P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2)$$
$$= P(X(t_1 + t_0) \le x_1, X(t_2 + t_0) \le x_2)$$

Ker je t_0 poljuben izberemo $\Rightarrow t_0 = -t_1$:

$$P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2)$$
$$= P(X(0) \le x_1, X(t_2 - t_1) \le x_2)$$

Časovno razliko t_2-t_1 označimo s $t = t_2$-t_1 in sledi:

$$P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2)$$
$$= P(X(0) \le x_1, X(t) \le x_2)$$

$\Rightarrow$ PFV drugega reda je odvisna samo od časovne razlike t .

$\Rightarrow$ Korelacijska funkcija $R_{XX}(t_1,t_2)$:

$$R_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(0, t_2\text{-}t_1) = R_{XX}(0, t) = R_{XX}(t)$$

Lastnosti korelacijske funkcije stacionarnega procesa:

a) sodost:

$$R_{XX}(t) = R_{XX}(-t)$$

$$R_{XX}(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)\,X(t_2)] = \mathrm{E}[X(t_1 + t_0)\,X(t_2 + t_0)]$$

Ker je t_0 poljuben lahko prvič izberemo $t_0 = -t_1$ drugič pa $t_0 = -t_2$ Iz tega sledi:

$$R_{XX}(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(0)\,X(t_2 - t_1)] = \mathrm{E}[X(t_1 - t_2)\,X(0)]$$

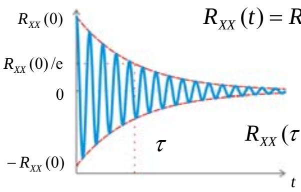
oziroma:

$$R_{XX}(t) = R_{XX}(-t)$$

b) Dve vrednosti vzorčne funkcije procesa se najmanj razlikujeta ko gre časovna razlika $t \to 0$

$$R_{XX}(0) \ge R_{XX}(t)$$

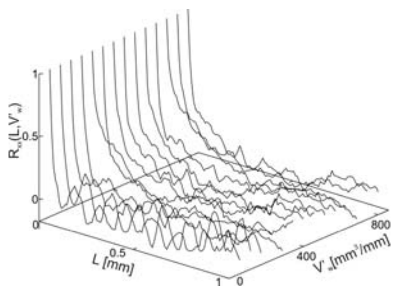
c) Uporabnost: Korelacijski čas τ, Klasifikacija procesov



$$R_{XX}(t) = R_{XX}(0)\,\mathrm{e}^{-|t|/\tau}\cos(\omega t)$$

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(0)/\mathrm{e}$$

Primeri avtokorelacijskih funkcij $R_{XX}(L)$ profilov brušene površine v odvisnosti od specifičnega volumna odnešenega materiala



Stacionarnost procesa v širšem in ožjem pomenu :

a) v širšem (blagem) pomenu:

$$E[X(t_1)] = E[X(t_1 + t_0)] = \text{cons.}$$
$$R_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(0, t_2 - t_1)$$
$$K_{XX}(t_1,t_2) = K_{XX}(0, t_2 - t_1)$$

b) v ožjem (strožjem)pomenu:

$$P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, ...)$$
$$= P(X(t_1 + t_0) \le x_1, X(t_2 + t_0) \le x_2, ...)$$

7.4.1 Ergodičnost procesov

V zvezi s stacionarnostjo opredelimo še pojem ergodičnih procesov :

Za poljubno merljivo funkcijo $g\,(X(t_1),...., X(t_n))$, opredelimo povprečje po parametru t:

$$\overline{g}(X(t_1),..., X(t_n))$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(X(t_1 + t'),..., X(t_n + t'))\,\mathrm{d}t'$$

Za ergodični proces velja :

$$P(\overline{g} = E[g]) = 1$$

Povprečenje vzorčne funkcije po času

$\Leftrightarrow$ povprečenje po ensemblu

$$E[g(X(t_1),.....X(t_n))] = \overline{g}(X(t_1),.....X(t_n))$$

Velja relacija:

$\{X(t): t \in T\}$ ergodičen $\Rightarrow$ $\{X(t): t \in T\}$ stacionaren

7.5 Vektorski naključni procesi

Definicija:
Naključni pojav, za katerega opis potrebujemo spremljati več različnih naključnih spremenljivk $\{X(t), Y(t)\ ...\ \}$, opišemo z vektorskim naključnim procesom:

$$\boldsymbol{Z}(t) = \{(X(t), Y(t), \ldots); t \in T\}$$

Primer:
Opis vremena: (Temperatura, vlažnost, tlak, hitrost vetra ....)

Naključne lastnosti vektorskega procesa opišemo s porazdelitvami:

$$P(X(t_1) \le x_1), \quad P(Y(t_1) \le y_1)$$
$$P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le t_2), \quad P(Y(t_1) \le y_1, X(t_2) \le t_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

V ta namen je za izčrpen opis potrebno poznati porazdelitev povezane verjetnosti:

$$P(X(t_1) \le x_1,..., X(t_n) \le x_n, Y(t_1) \le y_1,..., Y(t_n) \le y_n)$$

Pri opisu naključnih lastnosti se najpogosteje zadovoljimo z določitvijo raznih statističnih momentov.

Križna korelacijska funkcija je opredeljena z:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \iint xy f_{XY}(x, y; t_1, t_2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \iint xy\,\mathrm{d}P_{XY}(x, y; t_1, t_2)$$

in podaja statistično povprečje produkta komponent X in Y pri različnih časih t.

Iz definicije:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = \mathrm{E}\big[X(t_1)Y(t_2)\big]$$

sledi lastnost:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = R_{YX}(t_2,t_1)$$

Za stacionarne procesa pa podobno kot pri avtokorela-cijski funkciji pokažemo odvisnost od razlike časov:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_2-t_1) = R_{YX}(t_1-t_2)$$

in sodost križne korelacijske funkcije:

$$R_{XY}(t) = R_{YX}(-t)$$

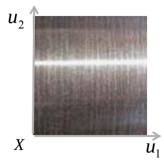
7.6 Naključna polja

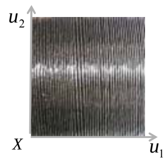
Definicija:

S skalarnim naključnim poljem opišemo naključni pojav X, ki je odvisen od vektorskega parametra $\boldsymbol{u}$ in naključnega dogodka s:

$$X = X(u_1,u_2,s)$$

Primer: Površina obdelovanca

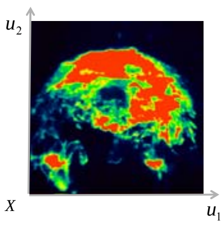




Skalarna polja so lahko tudi časovna odvisna

$$X = X(u_1,u_2,t)$$

Primer: Časovno odvisno polje (vizualizacija procesa)



Pogosto naletimo tudi na vektorska naključna polja pri katerih je naključna spremenljivka vektor:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t,s)$$

Kot primer vektorskega polja lahko navedemo hitrostno polje v turbulentem toku na izstopu iz vodne turbine.

Če poleg hitrosti toka opazujemo še temperaturo imamo naključno polje podano z:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t),\vartheta(\boldsymbol{r},t),s)$$

Splošno lahko naključno polje podamo z

$$\left\{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r},s) : \boldsymbol{r} = (u_1,u_2,\ldots u_n) \in \Re^n, s \in S\right\}$$

Najkčne lastnosti polja opišemo z množico povezanih verjetnosti:

$$P(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}_1) \le \boldsymbol{x}_1),$$
$$P(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}_1) \le \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}_2) \le \boldsymbol{x}_2),\cdots\cdots\cdots$$

Nekatere lastnosti naključnih polj:

Homogenost: invariantnost porazdelitev na prostorski premik

Izotropnost: invariantnost poradelitve na zasuk

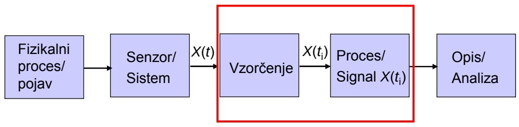
Homogenost in stacionarnost: invariantnost na prostorski in časovni zamik

Poglavje 14

Vzorčenje procesov

14.0 Uvod

Mesto vzorčenja v eksperimentalnem stavku:



14.1 Osnovni pojmi vzorčenja

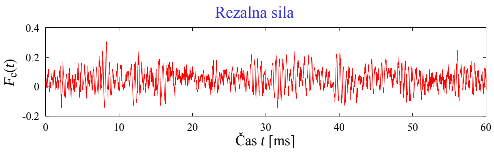
Obravnavamo zvezni naključni proces (senzorski signal)

$$\{\, X(t) : t \in T \,\}$$

$X(t)$ ... naključna spremenljivka (diskretna ali zvezna)

t ... zvezni parameter procesa, (čas)

Primer izmerjene vzorčne funkcije signala rezalne sile:



Naključni proces najpogosteje okarakteriziramo s statističnim povprečjem $\mathrm{E}[\, X(t_i)\,]$ pri izbranem času $t_i \in T$:

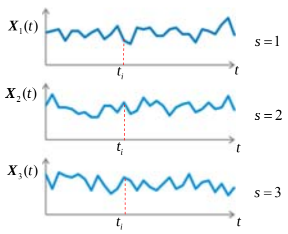
$$\mathrm{E}\big[X(t_i)\big] = \int x(t_i) \cdot f_{X(t_i)}(x)\,\mathrm{d}\,x = \int x(t_i)\,\mathrm{d}\,P_{X(t_i)}(x).$$

V ta namen potrebujemo funkcijo robne porazdelitve verjetnosti:

$$F_{X(t_i)} = P(X(t_1) \le \infty, \ldots\ldots X(t_i) \le x_i, \ldots\ldots X(t_n) \le \infty)$$

V primeru, ko imamo na razpolago n vzorčnih funkcij, s_j, j=1...n lahko $\mathrm{E}[\, X(t_i)\,]$ ocenimo s cenilko povprečja :

$$\langle X(t_i) \rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X(t_i, j) = m_x(t_i), t_i \in T$$



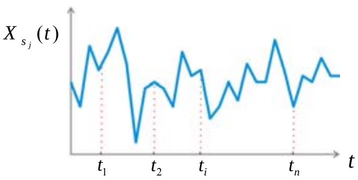
Za procese, ki so stacionarni vsaj v širšem pomenu velja:

$$\mathrm{E}[\, X(t_i)\,] = m = \text{konst.}$$

Časovno empirično povprečenje vzorčne funkcije:

Imamo vzorčno funkcijo $X_{sj}(t)$, $t \in T$ procesa, ki je stacionaren v širšem smislu.

Izberimo končno število časov $\{t_i \in T, i=1,...n\}$ v katerih $X_{sj}(t)$ zavzame vrednosti: $\{ x_{si}(t_i), i=1,...n \}$.



Na množici vrednosti $\{ x_{si}(t_i), i=1,...n \}$ opredelimo časovno povprečje vzorčne funkcije :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{s_j}(t_i) = \overline{X}(s_j)$$

$\overline{X}(s_j)$ je odvisen od naključnega dogodka s in predstavlja novo naključno spremenljivko.

Splošno lahko novo naključno spremenljivo $\overline{X}(s_j)$ zapišemo z izrazom:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X(t_i),$$

ki je splošen in se ne nanaša več samo na izbrano vzorčno funkcijo $\overline{X}(s_j)$.

Statistično povprečje cenilke časovnega povprečja:

$$\mathrm{E}\left[\overline{X}\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X(t_i)\right] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}\left[X(t_i)\right]$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{m} = \mathrm{m}$$

$\Rightarrow$ Cenilka povprečja $\overline{X}$ je nepristranska.

$\Rightarrow$ E[] časovnega povprečja za izbrano vzorčno funkcijo stacionarnega procesa je enako E[] povprečij po vzorčnih funkcijah (ensemblu) za izbrani čas t_i

Statistični raztros cenilke časovnega povprečja:

Opišemo ga z varianco spremenljivke $\overline{X}$:

$$\mathrm{Var}\left[\overline{X}\right] = \mathrm{E}\left[\left(\overline{X} - \mathrm{E}\left[\overline{X}\right]\right)^2\right]$$
$$= \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X(t_i) - \mathrm{E}\left[\overline{X}\right]\right)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X(t_j) - \mathrm{E}\left[\overline{X}\right]\right)\right]$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}\left[\left(X(t_i) - m\right)\left(X(t_j) - m\right)\right]$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}\left[X(t_i), X(t_j)\right]$$

Za stacionarni proces $X(t)$ je kovariančna funkcija odvisna le od razlike časov $t = t_i - t_j$:

$$\mathrm{Cov}\left[X(t_i), X(t_j)\right] = K_{XX}(t_i, t_j) = K_{XX}(t)$$

$\Rightarrow$ Za oceno statističnega raztrosa cenilke $\overline{X}$ potrebujemo kovariančno funkcijo $K_{XX}(t)$.

Ocene raztrosa cenilke $\overline{X}$ za različna vzorčenja procesa:

1. Vzorčenje z majhnimi časovnimi razmaki $(t_i - t_j) \to 0$:

$$\mathrm{Cov}[X(t_i), X(t_j)] = K_{XX}(t_i - t_j) \approx K_{XX}(0)$$
$$= \sigma^2 \quad \text{za vse i, j.}$$
$$\Rightarrow \mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

Zaradi koreliranosti oziroma statistične povezanosti vzorcev, z večanjem števila vzorcev n ne izboljšamo ocene.

2. Vzorčenje z velikimi časovnimi razmaki $(t_i - t_j) > \tau$:

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}\left[X(t_i), X(t_j)\right] = \begin{cases} \sigma^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\mathrm{Var}\left[\overline{X}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}\left[X(t_i), X(t_j)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$\Rightarrow$

V primeru statistično nepovezanih vzorcev naključnega procesa $\{X(t),\, t \in T\}$:

$$X(t_i),\ X(t_j); \qquad (t_i - t_j) > \tau$$

lahko oceno povprečne vrednosti $\overline{X}$ izboljšamo z večanjem števila n (statistično nepovezanih) vzorcev.

14.2 Periodično vzorčenje

Obravnavamo zvezni naključni proces (senzorski signal)

$$\{\, X(t) : t \in T \,\}$$

Vzorčenje procesa pričnemo pri $t = 0$ in ga s konstantni časovnim razmakom :

$$(t_i - t_j) = \Delta t = \frac{T}{n} = konst$$

vzorčimo v n točkah:

Vzorčne točke so opredeljene z $\{t_i = i\,\Delta t,\ i = 1,\ldots,n\}$, oziroma celotni interval $T = n\,\Delta t$.

Cenilka povprečja naključnega procesa je opredeljena z:

$$\overline{X}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(i\Delta t)$$

Statistični raztros te cenilke je podan z varianco:

$$\mathrm{Var}\left[\overline{X}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}\left[X(t_i), X(t_j)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{XX}(t_i, t_j) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{XX}(t_i - t_j)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{XX}((i-j)\Delta t)$$

Vrednosti, ki se pojavijo v dvojni vsoti po indeksih i in j lahko zapišemo s kovariančno matriko :

$$K = \begin{bmatrix} K_{XX}(0) & K_{XX}(\Delta t) & \cdots & K_{XX}((n-1)\Delta t) \\ K_{XX}(\Delta t) & K_{XX}(0) & \cdots & K_{XX}((n-2)\Delta t) \\ \vdots & \cdots & K_{XX}(0) & \vdots \\ K_{XX}((n-1)\Delta t) & K_{XX}((n-2)\Delta t) & \cdots & K_{XX}(0) \end{bmatrix}$$

ki je simetrična .

Z upoštevanjem simetrije kovariance, dvojno vsoto po indeksih $i=1,\ldots,n$ in $j=1,\ldots,n$ prevedemo na enojno vsoto po indeksu $k=1,\ldots,(n-1)$:

$$\mathrm{Var}\left[\overline{X}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{XX}((i-j)\Delta t)$$

$$= \frac{nK_{XX}(0)}{n^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)K_{XX}(k\Delta t)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)K_{XX}(k\Delta t)$$

Če nadalje upoštevamo, da velja:

$t_k = k\cdot\Delta t,\ k=1,\ldots,(n\text{-}1)$ in $T = n\,\Delta t$

dobi izraz za varianco:

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(1-\frac{k}{n})K_{XX}(k\Delta t)$$

obliko:

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2\Delta t}{T} + \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{n-1}(1-\frac{t_k}{T})K_{XX}(t_k)\Delta t$$

(T=*konst*., $n\to\infty$?)

Z večanjem števila vzorcev $n\to$:, pri konstantni širini intervala T gre $\Delta t \to \mathrm{d}t$, in $\Sigma\to\int$ ter dobimo:

$$\underset{\lim n\to\infty}{\mathrm{Var}(\overline{X})} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma^2\Delta t}{T} + \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{n-1}(1-\frac{t_k}{T})K_{XX}(t_k)\Delta t\right)$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T(1-\frac{t}{T})K_{XX}(t)\,\mathrm{d}t$$

Dobljeni izraz opisuje vpliv širine intervala T na varianco cenilke $\overline{X}$ pri $n\to\infty$.

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{2}{T}\int_0^T(1-\frac{t}{T})K_{XX}(t)\,\mathrm{d}t$$

v splošnem pri periodičnem vzorčenji s konstantnim razmikom:

- $n\to\infty$ ne izboljšamo ocene povprečja
- z večanjem intervala T se ocena izboljša

Nadalje velja, da pri periodičnem vzorčenju cenilko povprečne vrednosti z upoštevanjem relacij:

$t_k = k\cdot\Delta t,\ k=1,\ldots,(n\text{-}1)$ in $T = n\,\Delta t$

zapišemo v obliko:

$$\overline{X}(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X(k\Delta t) = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}X(t_k)\Delta t,$$

ki v limitnem primeru ko $n\to\infty$ preide v intergral:

$$\overline{X} = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,\mathrm{d}t$$

Statistiki:

$$\overline{X}(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}X(t_k)\Delta t,$$

oziroma

$$\overline{X} = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,\mathrm{d}t$$

običajno uporabljamo pri oceni povprečne vrednosti procesa